

### 3. QUANDO IL LIMITE E' ... BANALE: LA "CONTINUITA'"

Nel caso di una funzione reale di variabile reale, quando si fa tendere  $x$  ad un valore finito  $x_0$  appartenente al dominio  $D$  della funzione, il caso di gran lunga più frequente è che la  $y$  tenda ad un altro valore finito, quello che si ottiene, banalmente, assegnando a  $x$  il valore  $x_0$ , ossia ponendo  $x = x_0$  nell'espressione della funzione e svolgendo i calcoli. Si dice allora che la funzione in esame è "continua in  $x_0$ ":

$$y = f(x) \text{ continua in } x_0 \in D \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Lo ribadiamo: la continuità, per le funzioni di uso comune, è la "regola", la discontinuità è l'eccezione.

Ad esempio, una funzione polinomiale è continua in ogni punto  $x_0$  del suo dominio (che è poi tutto  $\mathbb{R}$ ).

Nella figura qui a destra è rappresentata la funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

che ha appunto questa proprietà:

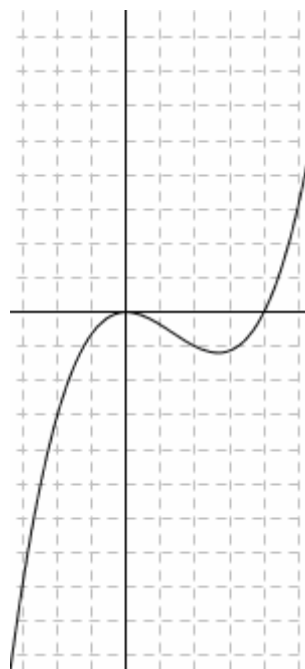
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) = f(2) = \frac{1}{8} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) = f(1) = \frac{1}{8} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) = f(0) = \frac{1}{8} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) = f(-3) = \frac{1}{8} \cdot (-27) - \frac{1}{2} \cdot 9 = \\ &= -\frac{27}{8} - \frac{9}{2} = \frac{-27 - 36}{8} = -\frac{63}{8} \end{aligned}$$

ecc. ecc. ecc.



**Continuità su di un intervallo = continuità in ogni punto di quell'intervallo.**

La continuità di una funzione su tutto un intervallo può essere descritta, in modo poco "matematico" ma molto intuitivo, come "la possibilità di disegnare il grafico senza mai distaccare la matita dal foglio"

A volte si parla di "continuità a sinistra" o "a destra" in un punto  $x_0$ :

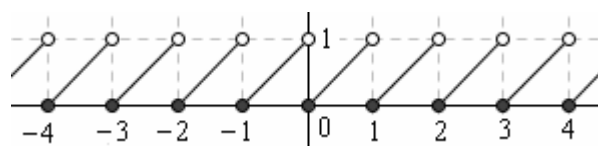
$$y = f(x) \text{ continua a sinistra in } x_0 \in D \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$y = f(x) \text{ continua a destra in } x_0 \in D \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Ad esempio, la funzione "mantissa"  $y = m(x)$  è continua a destra, ma è discontinua a sinistra, in corrispondenza di ogni valore  $x_0$  intero.

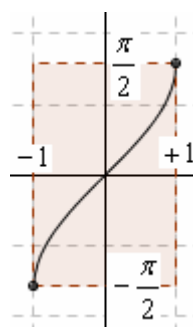
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} m(x) = 0 = f(3);$$

$$\text{invece } \lim_{x \rightarrow 3^-} m(x) = 1 \neq f(3)$$



Ancora: la funzione  $y = \arcsin x$  è continua su tutto il suo dominio  $D = [-1, +1]$ .

In corrispondenza delle due estremità del dominio, è più corretto parlare di continuità "unilaterale":  
continuità a destra, in  $x = -1$ ;  
continuità a sinistra, in  $x = +1$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x &= -\frac{\pi}{2} = \\ &= \arcsin(-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x &= \frac{\pi}{2} = \\ &= \arcsin(+1) \end{aligned}$$