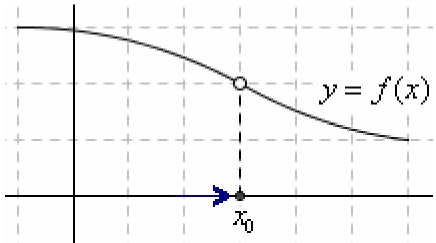
4. IL LIMITE DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO: RICAPITOLIAMO

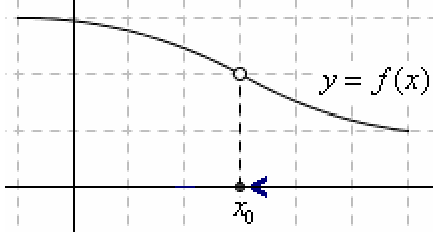
A) LIMITE FINITO PER x CHE TENDE A UN'ASCISSA FINITA

Consideriamo una funzione $y=f(x)$, e sia x_0 un'ascissa fissata.
"Far tendere x a x_0" significa far assumere a x valori sempre più vicini a x_0.

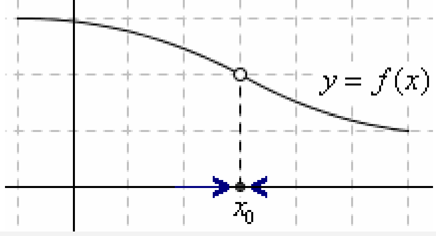
Possiamo far tendere x a x_0
"da sinistra"…
(scriveremo $x \to x_0^{-}$)



… oppure "da destra" …
(scriveremo $x \to x_0^{+}$)



… o, ancora, quando non abbia importanza
distinguere il caso $x > x_0$ dal caso $x < x_0$,
"bilateralmente"
(scriveremo $x \to x_0$)

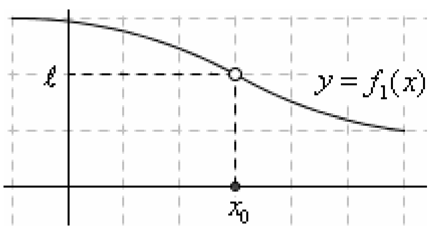


Mentre si sta facendo tendere x a x_0, interessa stabilire
"a cosa tende (= si avvicina) il valore corrispondente di y".

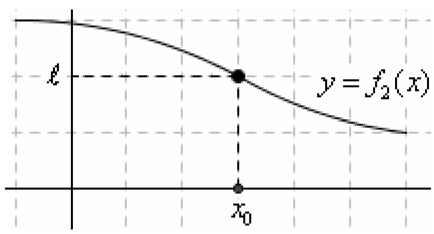
Se accade che, quando x è molto prossima a x_0, l'ordinata corrispondente è molto prossima ad un certo valore ℓ
(come nel caso dell'ultima figura, nella quale, per x prossimo a 3, $y=f(x)$ è prossima a 2),
allora si scriverà $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$ che si legge: "il limite, per x che tende a x_0, di $f(x)$, è ℓ"

Quando noi pensiamo al $\lim_{x \to x_0} f(x)$,
NON CI INTERESSA MINIMAMENTE COSA ACCADE PER x **UGUALE A** x_0;
anzi, con $x = x_0$ la funzione potrebbe anche non esistere
(è questo il caso illustrato in figura, dove il pallino vuoto, il "buco",
evidenzia proprio la non esistenza della funzione con $x = x_0$).
Noi vogliamo stabilire a quale valore si avvicina la y, quando x SI AVVICINA a x_0.
E' in esame dunque il comportamento della funzione **IN PROSSIMITA' DI** x_0, ma **NON IN** x_0.

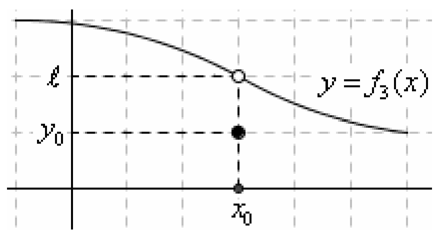
Per questa ragione, TUTTE E TRE le funzioni seguenti
sono perfettamente equivalenti dal punto di vista del limite per $x \to x_0$,
in quanto esse differiscono solamente per il comportamento IN x_0,
che ai fini della determinazione del limite E' IRRILEVANTE.



$f_1(x_0)$ *NON ESISTE*
$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \ell$



$\exists\, f_2(x_0) = \ell$
$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = \ell$



$\exists\, f_3(x_0) = y_0 \neq \ell$
$\lim_{x \to x_0} f_3(x) = \ell$

Non possiamo tuttavia a questo punto pretendere di aver DEFINITO in modo *rigoroso* cosa si intenda per "limite". Con quali parole, infatti, abbiamo cercato di descrivere questo concetto? Rileggiamole:

«Se accade che, quando x è molto prossima a x_0, l'ordinata corrispondente è molto prossima a un dato valore ℓ, allora si scriverà $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ che si legge: "il limite, per x che tende a x_0, di $f(x)$, è ℓ"»

Ma adesso riflettiamo…

cosa significa esattamente "x MOLTO PROSSIMA a x_0", "y MOLTO PROSSIMA a ℓ"?

In che senso va inteso l'avverbio "MOLTO"? Insomma: MOLTO … QUANTO?

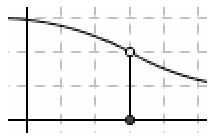
IL NOSTRO PRIMO TENTATIVO DI DEFINIZIONE, DIFETTA CLAMOROSAMENTE IN PRECISIONE!

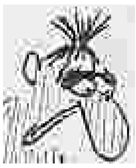
POTREMMO ritenere di colmare l'ambiguità esprimendoci nel modo seguente:

«Se accade che, *quanto più* x si approssima a x_0, *tanto più* l'ordinata corrispondente si approssima a ℓ, allora si scriverà $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e si leggerà: "il limite, per x che tende a x_0, di $f(x)$, è ℓ"».

TUTTAVIA,

questa descrizione potrebbe essere adeguata per la funzione rappresentata nella figura qui a fianco …



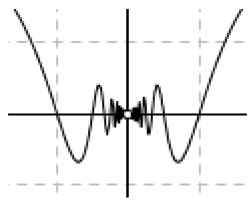


… ma escluderebbe quei casi in cui l'avvicinamento di y a ℓ è "globale" ma non "unidirezionale",

come nel caso, che abbiamo già incontrato, della funzione $y = f(x) = sen\dfrac{\pi}{x}$,

per la quale abbiamo convenuto che sia ragionevole poter scrivere $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

anche se l'avvicinamento della y all'ordinata 0 non ha carattere "monotòno", ma oscillante

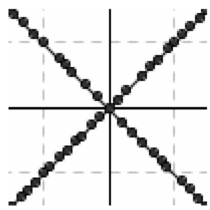


… ed escluderebbe anche il caso, ancora più anomalo, della

$$L(x) = \begin{cases} x & se\ x\ \grave{e}\ razionale\ (x \in \mathbb{Q}) \\ -x & se\ x\ \grave{e}\ irrazionale\ (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

per la quale abbiamo accettato la correttezza della scrittura $\lim\limits_{x \to 0} L(x) = 0$

pur in presenza di un avvicinamento della y all'ordinata 0 non "monotòno", bensì "saltellante"



Il problema di definire rigorosamente il "limite" è tutt'altro che semplice.

Lo affronteremo nel capitolo seguente (considerando, inoltre, anche i casi in cui sia coinvolto l' "infinito").

UNA DEFINIZIONE DI LIMITE, PER ESSERE SODDISFACENTE, DOVRÀ

♪ tradurre in modo non ambiguo e rigorosamente quantitativo
e idee di una x "molto prossima a x_0", cui corrisponde una y "molto prossima a ℓ;

♫ richiedere *non soltanto* che la y si avvicini "indefinitamente" a ℓ
(cioè: penetri in un intorno arbitrariamente piccolo di ℓ),
ma richiedere contemporaneamente che, purché la x sia "sufficientemente vicina" a x_0,
la y corrispondente *non fuoriesca più da tale intorno*.

Come vedremo,

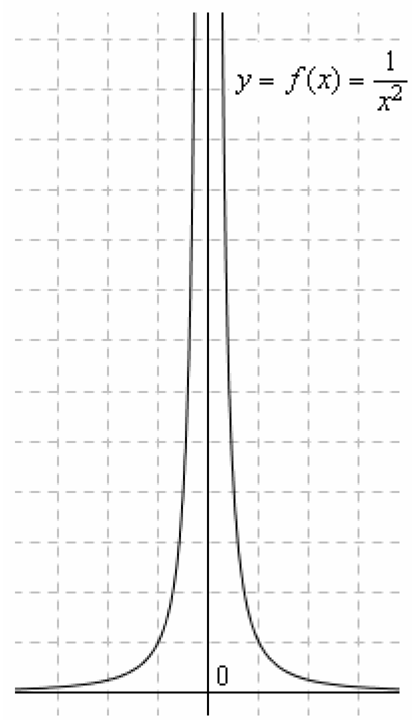
SI RIUSCIRÀ AD ELABORARE UNA DEFINIZIONE CORRETTA A PATTO DI **RIBALTARE L'ORDINE** IN CUI VENGONO PRESI IN CONSIDERAZIONE x_0 E ℓ:
infatti, spontaneamente si è portati a pensare
PRIMA alla x che si avvicina a x_0, POI alla y corrispondente che si avvicina a ℓ;
UNA DEFINIZIONE MATEMATICAMENTE INECCEPIBILE PARTIRÀ INVECE DA ℓ, PARLANDO DI UNA y CHE SI MANTIENE VICINA A ℓ TANTO QUANTO LO SI DESIDERA,
A PATTO DI PRENDERE x SUFFICIENTEMENTE VICINA A x_0.

B) LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE A UN'ASCISSA FINITA

Nel caso della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ rappresentata qui a fianco,
diciamo che, al tendere di x a 0, la $f(x)$ tende a $+\infty$,
perché constatiamo che, quando x tende a 0,
la y corrispondente assume valori altissimi, arbitrariamente alti,
più alti di 1.000.000, più alti di 1.000.000.000.000.000.000, insomma:
più alti di qualsiasi "tetto" prefissato.
In generale, la scrittura

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

è utilizzata per indicare che
"al tendere di x a x_0, la y diventa alta, altissima,
fino a portarsi al di sopra di qualsiasi 'tetto' prefissato".
La definizione rigorosa, che formuleremo nel prossimo capitolo,
esprimerà questa condizione
ribaltando l'ordine in cui vengono considerate la x e la y:
la y "si mantiene al di sopra di qualsiasi tetto prefissato",
purché x venga presa "sufficientemente vicina" a x_0.



x	$y = \frac{1}{x^2}$
1	1
0,1	100
0,01	10000
0,001	1000000
0,0001	100000000
0,00001	10000000000
0,000001	1000000000000
0,0000001	100000000000000

Se voglio che la y stia al di sopra,
tanto per fare un esempio,
del "tetto" 1000.000.000.000
(mille miliardi)
mi basta prendere valori di x
sufficientemente vicini all'ascissa 0:
precisamente, mi basta prendere x
compreso fra
$-0,000001$ e $0,000001$
(s'intende, x diverso da zero)

C) LIMITE FINITO PER x CHE TENDE A INFINITO

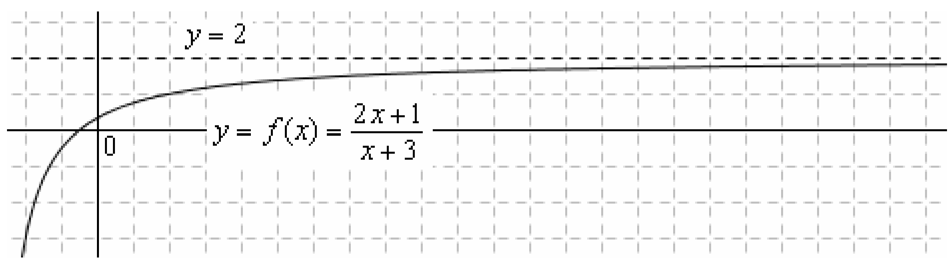
Nel caso della funzione $y = f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ rappresentata qui sotto,
diciamo che, al tendere di x a $+\infty$, la $f(x)$ tende a 2,
perché constatiamo che, quando x viene presa positiva e molto grande,
la y corrispondente assume valori molto prossimi a 2.

In generale, la scrittura

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R})$$

è utilizzata per indicare che "al tendere di x a $+\infty$, la y si avvicina all'ordinata ℓ".

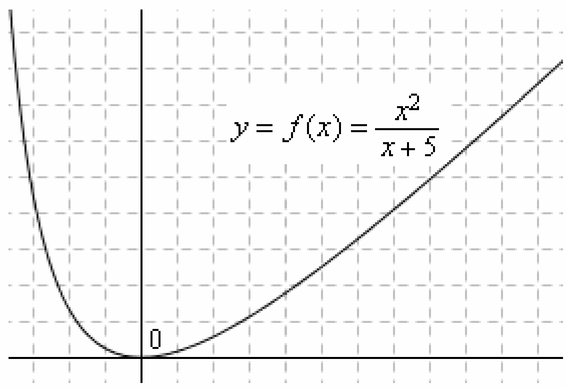
La definizione rigorosa, che daremo nel prossimo capitolo, esprimerà questa condizione
capovolgendo l'ordine in cui vengono considerate la x e la y:
la y "si mantiene vicina tanto quanto noi vogliamo all'ordinata ℓ",
purché x venga presa "sufficientemente vicina" a $+\infty$, cioè "sufficientemente grande".



x	$y = \frac{2x+1}{x+3}$
1	0,75
10	1,615384…
100	1,951456…
1000	1,995014…
10000	1,999500…

D) LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE A INFINITO

Nel caso della funzione $y = f(x) = \frac{x^2}{x+5}$
rappresentata qui a fianco, diciamo che,
al tendere di x a $+\infty$, la $f(x)$ tende a $+\infty$,
perché constatiamo che,
quando x viene presa positiva e molto grande,
la y corrispondente diventa altissima,
così da oltrepassare, verso l'alto,
qualunque barriera prefissata.



In generale, la scrittura

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

è utilizzata per indicare che
"per x grandissima, la y assume valori grandissimi"

La definizione rigorosa, che daremo nel prossimo capitolo,
esprimerà questa condizione
ribaltando l'ordine in cui vengono pensate la x e la y:
la y si mantiene maggiore di qualsiasi numero prefissato,
purché x venga presa "sufficientemente grande".