8. PUNTUALIZZAZIONI VARIE SULLE DEFINIZIONI DATE

1) NIENTE PAURA

Non bisogna spaventarsi troppo di fronte a queste definizioni rigorose di limite!

- ✓ Da una parte, di una definizione non ambigua di limite c'era senza dubbio bisogno …
  - per **un'esigenza squisitamente intellettuale** di approfondimento ("guardar dentro" nelle cose!);
  - per **disporre di un criterio non equivoco** che permetta di decidere se si possa parlare o meno di una "tendenza a limite", quando ci si imbatta in una funzione dalla natura "insolita";
  - per **fondare su di una base sicura la dimostrazione di teoremi** sui limiti, i quali possano poi giustificare procedimenti di calcolo vari:
    - ♪ sia in relazione a funzioni ottenute tramite operazioni, composizioni o inversioni a partire da altre funzioni;
    - ♫ sia nelle applicazioni successive del concetto di limite (derivata, integrale …).
- ✓ D'altro canto, **NELLA PRATICA, quando dovremo calcolare un limite, noi quasi sempre continueremo a operare esattamente come prima**; a questo punto, però, il nostro apparato di definizioni e teoremi giustificherà da un punto di vista rigoroso quanto ci sentivamo già autorizzati a fare, in assenza di una definizione precisa, sulla base del "buon senso".

2) DUE RIGHE DI STORIA

Alla definizione di "limite" che abbiamo esposto si giunse, storicamente, molto tardi:
fin dall'antichità i matematici fatalmente incontrarono il concetto di limite
nell'ambito di molte delle problematiche più interessanti,
ma fu soltanto con un lavoro del matematico tedesco Heine, pubblicato nel **1872** (!),
che apparve la definizione con l' "epsilon-delta" usata al giorno d'oggi.
Heine si ispirò comunque alle lezioni dell'altro tedesco **Weierstrass**,
mentre già il francese **Cauchy** (1789-1857) aveva brillantemente e abbondantemente lavorato,
pur senza riuscire ad evitare qualche carenza di rigore, sulla tematica del "limite".
Il secolo XIX è caratterizzato, in generale, da un lavoro di ricerca sui fondamenti dell'analisi infinitesimale (concetto di numero reale, di limite, di derivata, di integrale) ad opera di studiosi come Bolzano, Cauchy, Dedekind, Cantor, Weierstrass.

3) ESERCIZI DI APPLICAZIONE DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE NEI VARI CASI

(ovvero: come si controlla, tramite la definizione, la correttezza di un limite assegnato)

a) **Verificare, direttamente tramite la definizione di limite, che** $\boxed{\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}+5\right)=7}$

Si tratterà di impostare la disequazione $\boxed{\left|\frac{x}{2}+5-7\right|<\varepsilon}$

dove ε indica un numero >0 arbitrariamente fissato,
poi di risolverla con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata
"su tutto un intorno di $x_0=4$, privato al più del punto 4".

$$\left|\frac{x}{2}+5-7\right|<\varepsilon;\ \left|\frac{x}{2}-2\right|<\varepsilon;\ -\varepsilon<\frac{x}{2}-2<\varepsilon,\ 2-\varepsilon<\frac{x}{2}<2+\varepsilon;\ \boxed{4-2\varepsilon<x<4+2\varepsilon}$$

$\boxed{OK!}$ **La disequazione è verificata su tutto un intorno di $x_0=4$**

b) **Verificare, direttamente tramite la definizione di limite, che** $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty}$

Si tratterà di impostare la disequazione $\boxed{\frac{1}{x^4}>M}$

dove con M si indica un numero >0 arbitrariamente fissato, poi di risolvere la disequazione
e far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di $x_0=0$, privato al più del punto 0.

$$\frac{1}{x^4}>M;\quad x^4<\frac{1}{M},\ x\neq 0;\quad |x|<\sqrt[4]{\frac{1}{M}},\ x\neq 0;\qquad \boxed{-\sqrt[4]{\frac{1}{M}}<x<\sqrt[4]{\frac{1}{M}},\ x\neq 0}$$

$\boxed{OK!}$ **La disequazione è verificata su tutto un intorno di $x_0=0$, privato del punto 0.**

c) **Verificare, direttamente tramite la definizione di limite, che** $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=2}$

Imposteremo la disequazione $\boxed{\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\varepsilon}$

dove con ε si indica un numero positivo arbitrariamente fissato;
dovremo poi risolvere la disequazione e far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di $+\infty$.

$$\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\varepsilon;\quad \left|\frac{2x-1-2x}{x}\right|<\varepsilon;\quad \left|-\frac{1}{x}\right|<\varepsilon;\quad \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon;\quad |x|>\frac{1}{\varepsilon};\quad \boxed{x<-\frac{1}{\varepsilon}\ \vee\ x>\frac{1}{\varepsilon}}$$

$\boxed{OK!}$ **La disequazione è verificata, in particolare, per tutti gli x maggiori di $\frac{1}{\varepsilon}$;**

e l'intervallo $\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right)$ costituisce un intorno di $+\infty$.

4) PSICOLOGIA E RIGORE

Ripensiamo alla definizione di limite finito per x che tende a un valore finito, data ad esempio nella forma:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ /\ |x-x_0|<\delta \wedge x\neq x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Quando si è trattato di esporta a parole, abbiamo scritto:

*Si dice che "il limite, per x che tende a x_0, di $f(x)$ è uguale a ℓ" se e solo se:
per ogni $\varepsilon>0$ (**piccolo a piacere**) esiste un $\delta>0$ tale che, se la distanza di x da x_0 è minore di δ
(e x è diverso da x_0: il comportamento della funzione IN x_0 non ci interessa),
la distanza di $f(x)$ da ℓ risulti minore di ε*

E' importante osservare che **locuzioni del tipo:**

- per ogni $\varepsilon>0$, **PICCOLO A PIACERE**
- per un $\varepsilon>0$ fissato, **ARBITRARIAMENTE PICCOLO**
- **COMUNQUE PICCOLO** si fissi $\varepsilon>0$

hanno soprattutto una funzione PSICOLOGICA:

dal punto di vista matematico, possiamo essere più "asciutti" e **dire semplicemente**:
"**PER QUALSIASI** $\varepsilon>0$", "**COMUNQUE SI FISSI** $\varepsilon>0$", "per un $\varepsilon>0$ **ARBITRARIO**".

PROPRIO PER QUESTO la definizione data è completamente rigorosa!
Essa non fa più riferimento (come nei discorsi introduttivi al concetto di limite)
a descrizioni vaghe e matematicamente discutibili del tipo:
"x molto vicina a x_0, $f(x)$ molto vicina a ℓ" (… bella forza! QUANTO vicina? …),
"piccola differenza", "piccola distanza" (… ma QUANTO piccola, insomma? …)
Questi tentativi "ingenui" di descrizione vengono ora rimpiazzati
da un INEQUIVOCABILE gioco di quantificatori: PER OGNI … ESISTE …

Analogo discorso, naturalmente, vale per espressioni linguistiche come
"arbitrariamente grande", "grande a piacere", ecc. da noi usate in relazione al numero M
nelle definizioni di limite infinito (ribadiremo questo aspetto più avanti).

5) PSICOLOGIA, RIGORE E LA PRATICA DEGLI ESERCIZI

La locuzione " ε arbitrariamente piccolo" (o "piccolo a piacere"), discussa al precedente punto 4),
è comunque adottata da molti testi anche perché
è **utile a suggerire**, quando ce ne sia bisogno, **la seguente IMPORTANTE OSSERVAZIONE:**

se, in un caso specifico, devo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$,

potrò supporre, se lo ritengo comodo o utile, ε piccolo a mio piacere,
abbastanza piccolo da consentire tutti i passaggi algebrici
di cui io avverta l'esigenza ai fini del procedimento.
Infatti, se riesco a dimostrare che – tanto per fare un esempio –
PER TUTTI GLI $\varepsilon<0{,}001$ è possibile trovare un δ "che vada bene",
allora, evidentemente, resterà pure dimostrato che
PER QUALUNQUE ε esiste un δ che va bene.

Considera a proposito l'esercizio seguente.

Supponiamo che sia richiesto di dimostrare, servendosi della definizione, che $\boxed{\lim_{x\to 3}\sqrt{x-2}=1}$

Imposteremo allora la disequazione $\boxed{\left|\sqrt{x-2}-1\right|<\varepsilon}$

con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata in tutto un opportuno intorno dell'ascissa 3
(… fatta eccezione, al più, per $x=3$; ma in questo es. si vede comunque subito che l'eccezione non si verificherà).

Dunque scriveremo:

$$-\varepsilon<\sqrt{x-2}-1<\varepsilon$$
$$1-\varepsilon<\sqrt{x-2}<1+\varepsilon$$

… e a questo punto,
per liberare x dalla "prigionia" della radice quadrata, desidereremmo poter elevare al quadrato.
Però sappiamo che una disequazione può essere elevata al quadrato
(nel senso che, così facendo, si muta in una disequazione con le stesse soluzioni di quella di partenza)
soltanto se i membri della disequazione sono positivi.
Ora, riguardo all'espressione $1-\varepsilon$, essa è positiva (≥ 0) soltanto quando $\varepsilon\le 1$.
Allora, che fare? Sarà forse necessaria una laboriosa distinzione di casi?
NO! Perché il bello è che se noi ci limitiamo a prendere in considerazione soltanto gli ε tali che $\varepsilon\le 1$,
il nostro procedimento dimostrativo avrà poi un valore **del tutto generale!!!**
Cerchiamo di spiegare in dettaglio il motivo di questo fatto.

Supponiamo di aver dimostrato che l'intorno cercato esiste per tutti gli $\boldsymbol{\varepsilon\le 1}$.
Il nostro obiettivo finale è di far vedere che, *COMUNQUE* si fissi un $\varepsilon>0$, esiste un δ tale che … ecc. ecc.
Quindi, il discorso, ormai portato a termine per gli $\varepsilon\le 1$,
rimarrebbe apparentemente ancora aperto per gli $\varepsilon>1$…
… ma …
… **se noi prendiamo un $\boldsymbol{\varepsilon>1}$,**
possiamo passare a considerare un qualunque numero ausiliario $\boldsymbol{\overline{\varepsilon}}$, con $\boldsymbol{\overline{\varepsilon}\le 1}$.
Per questo $\overline{\varepsilon}$ abbiamo già dimostrato che esiste un $\overline{\delta}$ tale che, se $3-\overline{\delta}<x<3+\overline{\delta}$, si ha $1-\overline{\varepsilon}<\sqrt{x-2}<1+\overline{\varepsilon}$.
Ma allora per tutti gli x tali che

$$3-\overline{\delta}<x<3+\overline{\delta}$$

risulterà a maggior ragione

$$1-\varepsilon<\sqrt{x-2}<1+\varepsilon \quad \text{(infatti, essendo } \varepsilon>\overline{\varepsilon}\text{, sarà } 1-\varepsilon<1-\overline{\varepsilon}<\sqrt{x-2}<1+\overline{\varepsilon}<1+\varepsilon\text{)}$$

Pertanto, in corrispondenza dell' ε da noi scelto,
SIAMO RIUSCITI A DETERMINARE un δ (il $\overline{\delta}$) tale che ecc. ecc.

Tutto questo discorso mostra che, in definitiva, nell'affrontare la disequazione

$$1-\varepsilon<\sqrt{x-2}<1+\varepsilon$$

noi possiamo pensare $\boldsymbol{\varepsilon}$ piccolo a piacere,
talmente piccolo da consentirci di effettuare il passaggio di elevamento al quadrato
che ci consentirà di isolare x (quindi: $\varepsilon\le 1$, per le nostre esigenze):

$$(1-\varepsilon)^2<\left(\sqrt{x-2}\right)^2<(1+\varepsilon)^2;\quad 1-2\varepsilon+\varepsilon^2<x-2<1+2\varepsilon+\varepsilon^2;\quad 3-\varepsilon(2-\varepsilon)<x<3+2\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Vediamo ora che i due numeri

$$3-\varepsilon(2-\varepsilon) \quad \text{e} \quad 3+2\varepsilon+\varepsilon^2$$

sono, rispettivamente, il primo minore e il secondo maggiore di 3.
Pertanto la disequazione posta è effettivamente verificata in tutto un intorno dell'ascissa 3, C.V.D.

OSSERVAZIONE
Se desideriamo un intorno CIRCOLARE, ci basterà prendere il raggio δ di questo intorno uguale (o minore) della più piccola fra le distanze dell'ascissa 3 dai due estremi $3-\varepsilon(2-\varepsilon)$ e $3+2\varepsilon+\varepsilon^2$ dell'intorno trovato:

$$\delta\le\min\left(\varepsilon(2-\varepsilon),\ 2\varepsilon+\varepsilon^2\right).$$

SE ESISTE UN INTORNO NON CIRCOLARE DI UN PUNTO,
NEL QUALE SIA VERIFICATA UNA CERTA CONDIZIONE,
ALLORA ESISTERÀ SEMPRE ANCHE UN'INTORNO CIRCOLARE DI QUEL PUNTO
(ANZI, INFINITI INTORNI CIRCOLARI),
NEL QUALE LA STESSA CONDIZIONE RISULTA VERIFICATA.
Certo, perché ogni intorno I di un punto (= intervallo aperto contenente quel punto)
contiene infiniti intorni circolari del punto stesso
(tutti quelli il cui raggio è $\le$ della più piccola fra le distanze del punto considerato, dalle estremità di I)

6) ANALOGAMENTE: POSSIBILITÀ DI CONSIDERARE SOLTANTO VALORI DI x "VICINI A x_0"

Analogamente, non è difficile convincersi che, nel corso di una verifica della correttezza di un limite per $x \to x_0$ attraverso la definizione, è possibile, volendo, considerare soltanto "valori di x vicini a x_0"

7) DAL "PICCOLO A PIACERE" AL "GRANDE A PIACERE"

E ancora: quando abbiamo enunciato le definizioni di limite infinito, ad esempio la:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall M>0\ \exists\delta>0\ /\ |x-x_0|<\delta \wedge x\neq x_0 \Rightarrow f(x)>M$$

nel riferirci al numero $M>0$, abbiamo detto che andava pensato
"grande a piacere", "arbitrariamente grande";
ma avremmo potuto benissimo fare a meno di locuzioni di questo tipo!
In effetti la definizione, espressa in simboli, si limita a presentare un quantificatore universale $\forall$, che significa semplicemente "per ogni, per qualsiasi, qualunque sia, comunque si prenda" e quindi è *indifferente* rispetto al "grande" o al "piccolo".
Tuttavia, parlare di un $M>0$ "grande a piacere" o simili, si rivela utile sia da un punto di vista psicologico, sia per ricordare che:

se, in un caso specifico, devo dimostrare che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

posso supporre, se lo ritengo comodo o utile, M grande a mio piacere.
Infatti, se io riesco a dimostrare che, ad esempio,
PER TUTTI GLI M MAGGIORI DI 1.000.000 è possibile trovare un δ "che vada bene",
allora, evidentemente, resterà pure dimostrato che PER QUALUNQUE M esiste un δ che va bene
(preso un M minore o uguale di 1.000.000,
lo rimpiazzo provvisoriamente con un altro numero M' maggiore di 1.000.000,
e il δ che va bene per questo M' andrà bene a maggior ragione anche per l' M fissato inizialmente)

8) CONSIDERAZIONI ANALOGHE A QUELLE ESPOSTE AI PUNTI 5), 6), 7) SI POSSONO RIFERIRE, EVIDENTEMENTE, A TUTTE LE DEFINIZIONI DI LIMITE NEI VARI CASI.

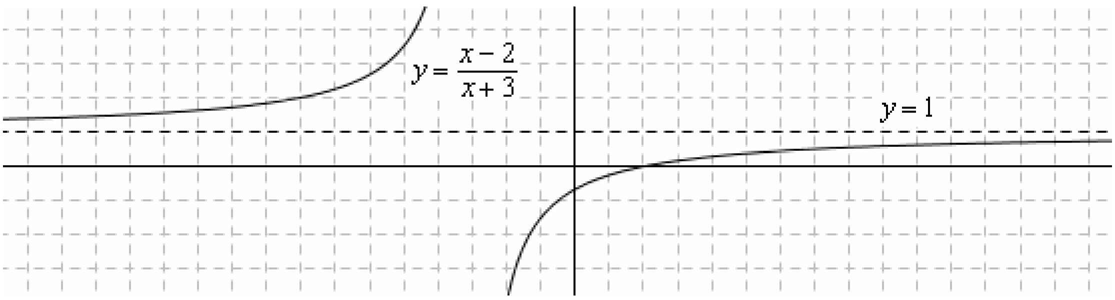
9) TENDERE ALL'ORDINATA ℓ "DAL BASSO" O "DALL'ALTO".

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x)=\ell^- \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists \mathrm{I}_c\ /\ \left(x\in \mathrm{I}_c-\{c\} \Rightarrow \ell-\varepsilon<f(x)\le\ell\right)}$$

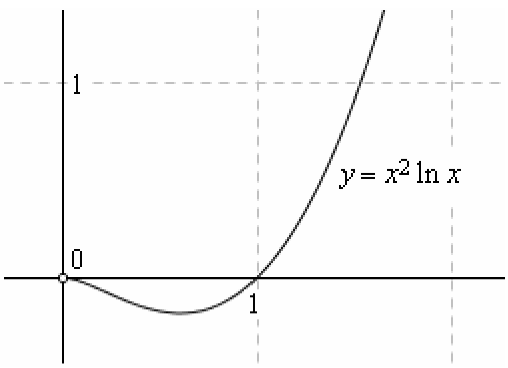
Qui è la y che tende a ℓ^-: la y tende a ℓ DAL BASSO $\uparrow y$

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x)=\ell^+ \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists \mathrm{I}_c\ /\ \left(x\in \mathrm{I}_c-\{c\} \Rightarrow \ell\le f(x)<\ell+\varepsilon\right)}$$

Qui è la y che tende a ℓ^+: la y tende a ℓ DALL'ALTO $\downarrow y$



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+3}=1^-$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x+3}=1^+$$



$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x=0^-$$
$$\lim_{x\to 1^-} x^2\ln x=0^-$$
$$\lim_{x\to 1^+} x^2\ln x=0^+$$