9. TEOREMI SUI LIMITI

In questa rassegna di teoremi,
la lettera $\boxed{c}$ starà ad indicare uno qualsiasi dei simboli: $\boxed{x_0, -\infty, +\infty}$

OBIETTIVI; OSSERVAZIONI PRELIMINARI

La teoria dei limiti prevede una bella mole di teoremi; qui di seguito troverai i più rilevanti.

Di alcuni verrà data la dimostrazione, ma non di tutti.

Quanto faremo, d'altronde, sarà ampiamente sufficiente a permetterti di comprendere quali sono gli "stili" dimostrativi principali, e di acquisire metodi efficaci di esposizione del ragionamento.

In tal modo, potresti poi cercare tu stesso di formulare delle dimostrazioni (anche se, onestamente, questo obiettivo presenta in genere un grado di difficoltà medio-alto), e comunque sarai in grado di approfondire ciò che desideri, attraverso qualsiasi fonte (libro di testo o sito web).

Osserverai come la verità di pressoché tutti gli enunciati può essere colta con l'intuizione algebrica e/o geometrica, e scoprirai che è assai facile ricostruire il contenuto di questi teoremi integrando l'intuizione col ragionamento, senza che la memoria richieda di essere scomodata più di tanto.

Questo percorso servirà anche a fissare alcune proposizioni "cardine" che entreranno, in seguito, nella dimostrazione di altri teoremi più avanzati e molto importanti.

Ad esse verranno assegnati nomi particolari
(Teorema della Permanenza del Segno,
Teorema dei Due Carabinieri,
Teorema di Esistenza del Limite delle Funzioni Monotòne …)

1) Limite della funzione opposta

Se una funzione $f(x)$ ammette il limite finito ℓ, allora la funzione $-f(x)$ ammette il limite $-\ell$:

$$\boxed{\exists \lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x\to c}\left[-f(x)\right] = -\ell}$$

Dimostrazione
Supponiamo, per fissare le idee, c finito;
lasciamo al lettore le facili modifiche da apportare alla dimostrazione nel caso $c=+\infty$ oppure $c=-\infty$.
La nostra tesi è che $\exists \lim_{x\to c}\left[-f(x)\right]=-\ell$, sotto l'ipotesi che $\exists \lim_{x\to c} f(x)=\ell$.
Dobbiamo perciò far vedere che

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tale che } c-\delta<x<c+\delta \wedge x\neq c \Rightarrow -\ell-\varepsilon<-f(x)<-\ell+\varepsilon .$$

Fissiamo dunque ad arbitrio un $\varepsilon>0$.
In corrispondenza di questo ε esisterà, per ipotesi, un $\delta>0$ tale che,
se $c-\delta<x<c+\delta \wedge x\neq c$, risulti $\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$.
Ma da quest'ultima catena di disuguaglianze si trae, cambiando i segni e i versi,

$$-\ell+\varepsilon>-f(x)>-\ell-\varepsilon$$

ossia, leggendo da destra verso sinistra,

$$-\ell-\varepsilon<-f(x)<-\ell+\varepsilon$$

C.V.D.

2) $\boxed{\exists \lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \exists \lim_{x\to c}\left[-f(x)\right] = \mp\infty}$

3) Il limite di una costante (voglio dire: funzione costante) è la costante stessa: $\boxed{\lim_{x\to c} k = k}$

4) Se k è una costante reale, e si ha $\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}}$, allora risulta $\boxed{\lim_{x\to c}\left[f(x)+k\right] = \ell + k}$

5) "Il limite del valore assoluto è uguale al valore assoluto del limite "

a) $\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to c}\left|f(x)\right| = \left|\ell\right|}$

b) $\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to c}\left|f(x)\right| = +\infty}$

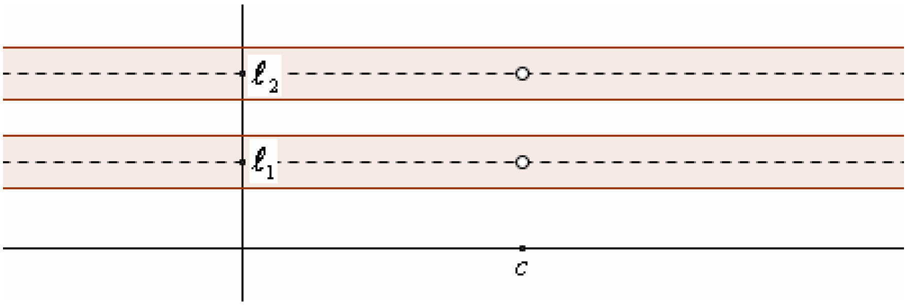
6) Unicità del limite

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE
Se, per $x \to c$, la funzione $f(x)$ ammette un limite, questo è unico.

Dimostrazione

Dimostreremo il teorema supponendo $c \in \mathbb{R}$;
analoga sarebbe la dimostrazione nel caso $c = +\infty$ o $c = -\infty$.

Per assurdo:
supponiamo che sia, contemporaneamente, $\lim_{x\to c} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to c} f(x) = \ell_2$, con $\ell_1 \neq \ell_2$



(supponiamo anche ℓ_1, ℓ_2 finiti;
il ragionamento per assurdo che stiamo effettuando
si potrebbe facilissimamente adattare alle altre possibili eventualità).

Fissiamo un $\bar{\varepsilon}$ sufficientemente piccolo affinché i due intorni

$$\left(\ell_1 - \bar{\varepsilon},\ \ell_1 + \bar{\varepsilon}\right) \text{ e } \left(\ell_2 - \bar{\varepsilon},\ \ell_2 + \bar{\varepsilon}\right)$$

siano disgiunti (= siano privi di intersezione, non abbiano punti comuni).

… Facile! Basterà che scegliamo

$$\bar{\varepsilon} < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$$

e avremo raggiunto lo scopo.

Ora, in corrispondenza di questo $\bar{\varepsilon}$,

- essendo $\lim_{x\to c} f(x) = \ell_1$ esisterà un $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{I}(c,\delta_1) - \{c\}$, si abbia
  $$\ell_1 - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell_1 + \bar{\varepsilon}$$
- ed essendo $\lim_{x\to c} f(x) = \ell_2$, esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, $\forall x \in \mathrm{I}(c,\delta_2) - \{c\}$, si abbia
  $$\ell_2 - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell_2 + \bar{\varepsilon}.$$

Adesso poniamo $\bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$ e consideriamo $\mathrm{I}(c,\bar{\delta})$, che poi può essere visto come

$$\mathrm{I}(c,\delta_1) \cap \mathrm{I}(c,\delta_2).$$

Per ogni x di questo $\mathrm{I}(c,\bar{\delta})$, fatta eccezione al più per $x = c$, si avrà contemporaneamente

$$\ell_1 - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell_1 + \bar{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \ell_2 - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell_2 + \bar{\varepsilon};$$

ma ciò è palesemente assurdo,
perché le due condizioni sono incompatibili in quanto i due intervalli

$$\left(\ell_1 - \bar{\varepsilon},\ \ell_1 + \bar{\varepsilon}\right) \text{ e } \left(\ell_2 - \bar{\varepsilon},\ \ell_2 + \bar{\varepsilon}\right)$$

avrebbero in tal modo dei punti comuni, mentre li abbiamo supposti disgiunti.

7) Permanenza del segno

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se, per $x \to c$, la funzione $f(x)$ ammette un limite ℓ diverso da zero
($\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, oppure $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$),
allora esiste un intorno di c per tutti gli x del quale, escluso tutt'al più c nel caso c sia finito,
$f(x)$ mantiene lo stesso segno del limite.

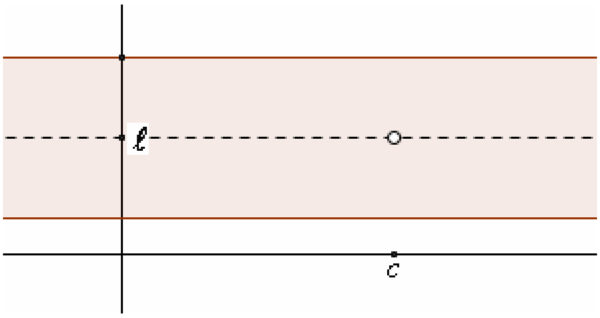


Figura A

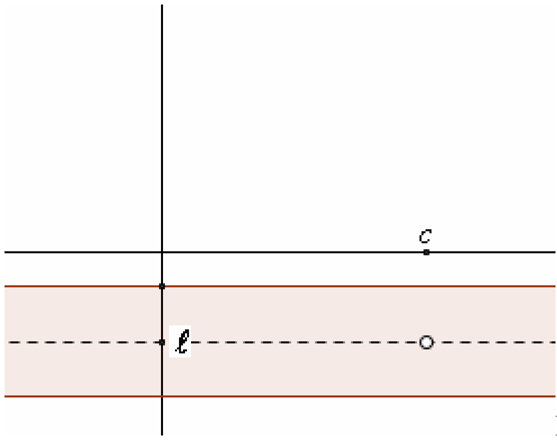


Figura B

Dimostrazione

La nostra ipotesi è che esista il $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell \neq 0$.

Il simbolo c può indicare un'ascissa finita, oppure $+\infty$ o ancora $-\infty$;
anche il limite ℓ potrà essere finito o infinito.
Consideriamo solo il caso in cui ℓ sia finito;
le modifiche da apportare alla dimostrazione nel caso $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$ sono piuttosto ovvie.

Dico ora che è sempre possibile scegliere un intorno $(\ell - \varepsilon,\ \ell + \varepsilon)$ del limite ℓ,
costituito da ordinate aventi tutte lo stesso segno del limite.

E' ben facile rendersene conto:
- ✓ nel sottocaso $\ell > 0$, basterà a tale scopo prendere $\varepsilon < \ell$ (figura A);
- ✓ se fosse poi $\ell < 0$, basterebbe a tale scopo prendere $\varepsilon < |\ell|$ (figura B).

Ma essendo per ipotesi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$, in corrispondenza dell'ε fissato esisterà sempre un intorno I_c
per ogni x del quale (fatta eccezione al più per $x = c$, nel caso c sia finito),
$f(x)$ cada all'interno della fascia di ordinate $(\ell - \varepsilon,\ \ell + \varepsilon)$,
costituita, ribadiamolo, esclusivamente da ordinate che hanno lo stesso segno del limite ℓ.
Il teorema è così dimostrato.

8) Se esiste un intorno di c per ogni x del quale, escluso tutt'al più $x = c$, si ha $f(x) \geq 0$
e $f(x)$ ammette un limite ℓ per $x \to c$, allora è $\ell \geq 0$, oppure $\ell = +\infty$

La dimostrazione è facile: si effettua ragionando per assurdo e utilizzando il teorema precedente.

9) Se esiste un intorno di c per ogni x del quale, escluso tutt'al più $x = c$, si ha $f(x) > 0$
e $f(x)$ ammette un limite ℓ per $x \to c$, allora è $\ell \geq 0$, oppure $\ell = +\infty$.

Osserverai che questo teorema ha un'ipotesi *rafforzata* rispetto a quella del precedente teorema 8,
e tuttavia la tesi non è $\ell > 0$, bensì, esattamente come per il n. 8, $\ell \geq 0$.
Considera, a proposito, la funzione $f(x) = x^2$ con $x \to 0$.
Il limite è nullo, NON positivo, pur essendo $x^2 > 0$ quando $x \neq 0$.

10) Evidentemente, teoremi analoghi ai teoremi 8), 9) valgono anche se si suppone, questa volta,
$f(x) \leq 0$ (risp. $f(x) < 0$) in tutto un intorno di c, escluso tutt'al più c.

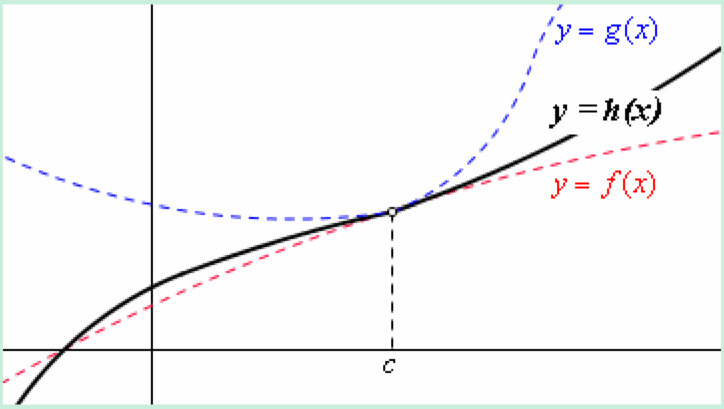
11) I “due carabinieri” (= primo teorema del confronto)

PRIMO TEOREMA DEL CONFRONTO (detto anche: **“TEOREMA DEI DUE CARABINIERI”**)

SE, in tutto un intorno di c, escluso tutt'al più c, si ha $f(x) \le h(x) \le g(x)$

e inoltre è $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$,

ALLORA sarà pure $\lim\limits_{x \to c} h(x) = \ell$



L’ipotesi richiede
che la condizione
$f(x) \le h(x) \le g(x)$
sia verificata
in tutto un intorno di c,
escluso tutt'al più c,
non necessariamente
su tutta l’intersezione
dei tre domini
delle funzioni in gioco

Dimostrazione
(Supponiamo che c sia un’ascissa finita; lasciamo al lettore il compito, piuttosto banale, di apportare alla dimostrazione le modifiche necessarie, nel caso in cui c sia infinito).

Dunque, l’ipotesi è che

a) esista un intorno I^*_c tale che per ogni x di I^*_c, escluso tutt’al più $x = c$, si abbia
$$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

b) e inoltre risulti $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

La tesi è che $\exists \lim\limits_{x \to c} h(x) = \ell$.

Ora,

- la condizione a) ci porta a figurarci le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ come due “carabinieri” che ”stringono in mezzo” un “ladro”, ossia la funzione $h(x)$ …
- … e la condizione b) ci dice che i due “carabinieri” sono diretti entrambi in “caserma” (il limite ℓ).

E’ perciò evidente che pure il “ladro” $h(x)$,
essendo stretto in mezzo fra i due carabinieri,
dovrà necessariamente confluire in caserma (= tendere al limite ℓ).

La dimostrazione consisterà nel tradurre in opportune relazioni matematiche questa buffa idea.

Fissiamo pertanto ad arbitrio un $\bar{\varepsilon} > 0$.

Per l’ipotesi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$, esisterà un $\delta_1 > 0$ tale che, $\forall x \in \mathrm{I}(c, \delta_1) - \{c\}$, si abbia $\ell - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell + \bar{\varepsilon}$;

e per l’ipotesi $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \ell$, esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, $\forall x \in \mathrm{I}(c, \delta_2) - \{c\}$, si abbia $\ell - \bar{\varepsilon} < g(x) < \ell + \bar{\varepsilon}$.

Se ora poniamo $\bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$ e consideriamo l’intorno di centro c e raggio $\bar{\delta}$,
su tutto $\mathrm{I}(c, \bar{\delta}) - \{c\}$ saranno verificate *entrambe* le disuguaglianze
$$\ell - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell + \bar{\varepsilon}; \quad \ell - \bar{\varepsilon} < g(x) < \ell + \bar{\varepsilon}$$
e quindi su tutto $\left[\mathrm{I}(c, \bar{\delta}) \cap \mathrm{I}^*_c\right] - \{c\}$ si avrà
$$\ell - \bar{\varepsilon} < f(x) \le h(x) \le g(x) < \ell + \bar{\varepsilon},$$
da cui, in particolare,
$$\ell - \bar{\varepsilon} < h(x) < \ell + \bar{\varepsilon}, \quad \text{C.V.D.}$$

12) Il secondo teorema del confronto

SECONDO TEOREMA DEL CONFRONTO
SE, in tutto un intorno di c, escluso tutt'al più c, si ha $|f(x)| \le g(x)$ e inoltre è $\lim_{x \to c} g(x) = 0$,
ALLORA sarà pure $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

13) Il terzo teorema del confronto

TERZO TEOREMA DEL CONFRONTO
SE, in tutto un intorno di c, escluso tutt'al più c, si ha
$f(x) \ge g(x)$ (rispettivamente: $f(x) \le g(x)$)
e inoltre è $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$ (rispettivamente: $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty$)
ALLORA si avrà pure $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ (rispettivamente: $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$)

14) Il limite di una somma (nel senso di "somma algebrica")

IL LIMITE DELLA SOMMA DI DUE FUNZIONI È UGUALE ALLA SOMMA DEI LIMITI (SUPPOSTO CHE ENTRAMBI ESISTANO E SIANO FINITI):

$$\boxed{\lim_{x \to c} f_1(x) = \ell_1 \wedge \lim_{x \to c} f_2(x) = \ell_2 \Rightarrow \lim_{x \to c}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \ell_1 + \ell_2 \ \left(\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}\right)}$$

Dimostrazione
Supponiamo c finito, lasciando al lettore le modifiche da apportare alla dimostrazione nel caso c sia infinito.

Dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \left(c - \delta < x < c + \delta \wedge x \ne c \Rightarrow (\ell_1 + \ell_2) - \varepsilon < f_1(x) + f_2(x) < (\ell_1 + \ell_2) + \varepsilon\right).$$

Fissiamo dunque arbitrariamente un $\overline{\varepsilon} > 0$ e passiamo a considerare il numero $\frac{\overline{\varepsilon}}{2}$.

In corrispondenza di $\frac{\overline{\varepsilon}}{2}$ (che farà da "nuovo $\overline{\varepsilon}$"),

- per l'ipotesi $\lim_{x \to c} f_1(x) = \ell_1$ esisterà un $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{I}(c, \delta_1) - \{c\}$, si abbia
  $\ell_1 - \frac{\overline{\varepsilon}}{2} < f_1(x) < \ell_1 + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}$;
- e per l'ipotesi $\lim_{x \to c} f_2(x) = \ell_2$, esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, $\forall x \in \mathrm{I}(c, \delta_2) - \{c\}$, si abbia
  $\ell_2 - \frac{\overline{\varepsilon}}{2} < f_2(x) < \ell_2 + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}$.

Detto dunque $\overline{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$, su tutto $\mathrm{I}(c, \overline{\delta}) - \{c\}$ risulteranno verificate contemporaneamente entrambe le condizioni

$$\ell_1 - \frac{\overline{\varepsilon}}{2} < f_1(x) < \ell_1 + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}$$
$$\ell_2 - \frac{\overline{\varepsilon}}{2} < f_2(x) < \ell_2 + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}$$

e pertanto in tale insieme $\mathrm{I}(c, \overline{\delta}) - \{c\}$
sarà verificata anche la condizione che si ottiene sommandole membro a membro:

$$\ell_1 - \frac{\overline{\varepsilon}}{2} + \ell_2 - \frac{\overline{\varepsilon}}{2} < f_1(x) + f_2(x) < \ell_1 + \frac{\overline{\varepsilon}}{2} + \ell_2 + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}$$

ossia

$$\left(\ell_1 + \ell_2\right) - \overline{\varepsilon} < f_1(x) + f_2(x) < \left(\ell_1 + \ell_2\right) + \overline{\varepsilon} \ ,$$

C.V.D.

Ti invito ad esaminare con attenzione la seguente

DIMOSTRAZIONE CON UNO "STILE" ALTERNATIVO

Fissiamo un $\varepsilon > 0$.

- Per l'ipotesi $\lim_{x\to c} f_1(x) = \ell_1$ esisterà un $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{I}(c, \delta_1) - \{c\}$, si abbia

  $$\ell_1 - \varepsilon < f_1(x) < \ell_1 + \varepsilon$$

- e per l'ipotesi $\lim_{x\to c} f_2(x) = \ell_2$ esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, $\forall x \in \mathrm{I}(c, \delta_2) - \{c\}$, si abbia

  $$\ell_2 - \varepsilon < f_2(x) < \ell_2 + \varepsilon .$$

In $\mathrm{I}(c, \delta_1) \cap \mathrm{I}(c, \delta_2) - \{c\}$ si avrà allora

$$\ell_1 - \varepsilon < f_1(x) < \ell_1 + \varepsilon$$
$$\ell_2 - \varepsilon < f_2(x) < \ell_2 + \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\ell_1 + \ell_2 - 2\varepsilon < f_1(x) + f_2(x) < \ell_1 + \ell_2 + 2\varepsilon$$

SE ORA SI TIENE CONTO DELL'ARBITRARIETA' DI ε,
LA DIMOSTRAZIONE E' TERMINATA. Bello!

OSSERVAZIONE

Non sempre, se esiste il limite della somma di due funzioni,
ciascuna delle due funzioni prese separatamente tende a limite.

Infatti, ad esempio, $\lim_{x\to+\infty} (sen^2x + cos^2x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

ma i due limiti $\lim_{x\to+\infty} sen^2x$, $\lim_{x\to+\infty} cos^2x$ non esistono.

15) Il limite della differenza di due funzioni è uguale alla differenza dei limiti
(supposto che entrambi esistano e siano finiti).
Dimostrazione
Conseguenza di

1) $\exists \lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x\to c} [-f(x)] = -\ell$

14) Il limite della somma di due funzioni … ecc.

16) Il limite della somma di PIÙ funzioni è uguale alla somma dei limiti
(supposto che tutti questi limiti esistano e siano finiti).
Dimostrazione: basta applicare più volte il teorema 14)

17) Il limite del prodotto di una costante per una funzione
è uguale al prodotto della costante per il limite della funzione (supposto che questo esista e sia finito):

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to c} kf(x) = k\ell \quad (k, \ell \in \mathbb{R})}$$

18) Il limite del prodotto di due funzioni
è uguale al prodotto dei limiti delle due funzioni (supposto che entrambi esistano e siano finiti):

$$\boxed{\lim_{x\to c} f_1(x) = \ell_1 \wedge \lim_{x\to c} f_2(x) = \ell_2 \Rightarrow \lim_{x\to c} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2 \quad (\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R})}$$

OSSERVAZIONE

Non sempre, se esiste il limite del prodotto di due funzioni,
ciascuna delle due funzioni prese separatamente tende a limite.

Infatti, ad es., $\lim_{x\to 0} x \cdot sen\frac{1}{x} = 0$

(come si dimostra utilizzando il primo oppure il secondo dei teoremi del confronto);

ma $\lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x}$ non esiste.

Dimostrazione del teorema

INNANZITUTTO, DIMOSTRIAMO IL TEOREMA NEL CASO PARTICOLARE $\ell_1 = \ell_2 = 0$.

Sia dunque $\lim_{x\to c} f_1(x) = \lim_{x\to c} f_2(x) = 0$; vogliamo provare che sarà pure $\lim_{x\to c}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right] = 0$.

Sia dato un qualsivoglia $\varepsilon > 0$.

Nel caso ε fosse >1, consideriamo un qualsiasi $\overline{\varepsilon}$ tale che $0 < \overline{\varepsilon} < 1 < \varepsilon$, altrimenti poniamo $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$ (**abbiamo bisogno, in sostanza, di partire da un $\overline{\varepsilon} \le 1$, perché in questo modo sarà poi $\overline{\varepsilon}^2 \le \overline{\varepsilon}$).**

Ora, l'ipotesi

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = 0$$

ci assicura che, in corrispondenza di questo $\overline{\varepsilon}$, esiste un intorno $\overline{I}_1$ di c
tale che, per ogni x di questo intorno eccettuato tutt'al più c nel caso c sia finito, risulti $|f_1(x)| < \overline{\varepsilon}$.

E per l'ipotesi

$$\lim_{x\to c} f_2(x) = 0$$

esisterà, in corrispondenza di $\overline{\varepsilon}$, un altro intorno $\overline{I}_2$ di c tale che,
per ogni x di questo intorno eccettuato tutt'al più c nel caso c sia finito, risulti $|f_2(x)| < \overline{\varepsilon}$.

Su tutto $\overline{I}_1 \cap \overline{I}_2 - \{c\}$ si avrà allora $|f_1(x)\cdot f_2(x)| = |f_1(x)|\cdot|f_2(x)| < \overline{\varepsilon}\cdot\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}^2 \le \overline{\varepsilon} \le \varepsilon$
Dunque esiste un intorno di c nel quale, con l'esclusione tutt'al più di c, si ha $|f_1(x)\cdot f_2(x)| < \varepsilon$
e con ciò la nostra tesi, relativa al caso particolare, è dimostrata.

VENIAMO ORA AL CASO GENERALE.

Essendo $\lim_{x\to c} f_1(x) = \ell_1$, la funzione $y = f_1(x)$ si può riscrivere come $f_1(x) = \ell_1 + \left[f_1(x) - \ell_1\right] = \ell_1 + \alpha(x)$

dove, poiché $f_1(x)$ tende a ℓ_1 quando x tende a c,
la differenza $\alpha(x) = f_1(x) - \ell$ tenderà a 0 per x che tende a c (conseguenza del teorema 4).

Osserviamo che di una funzione che tende a 0 quando x tende a c
si può affermare che è un "**infinitesimo**" per $x \to c$.

Allo stesso modo, essendo $\lim_{x\to c} f_2(x) = \ell_2$, si ha $f_2(x) = \ell_2 + \beta(x)$,

con $\beta(x)$ infinitesimo (funzione tendente a 0) per x che tende a c.

Avremo in definitiva $f_1(x)\cdot f_2(x) = \left[\ell_1 + \alpha(x)\right]\cdot\left[\ell_2 + \beta(x)\right] = \ell_1\ell_2 + \ell_1\beta(x) + \ell_2\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$
ed essendo, per ragioni note,

$$\lim_{x\to c} \ell_1\ell_2 = \ell_1\ell_2;$$

$$\lim_{x\to c} \ell_1\beta(x) = \ell_1\cdot\lim_{x\to c}\beta(x) = \ell_1\cdot 0 = 0; \quad \lim_{x\to c} \ell_2\alpha(x) = \ell_2\cdot\lim_{x\to c}\alpha(x) = \ell_2\cdot 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to c} \alpha(x)\beta(x) = 0$$

si avrà (teorema 14)

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim_{x\to c}\left(\ell_1\ell_2 + \ell_1\beta(x) + \ell_2\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)\right) = \ell_1\ell_2 + 0 + 0 + 0 = \ell_1\ell_2$$

C.V.D.

19) Il limite del reciproco di una funzione
è uguale al reciproco del limite (supposto che questo sia finito e $\neq 0$):

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}}$$

20) Il limite del quoziente di due funzioni
è uguale al quoziente dei limiti (supposto che entrambi i limiti esistano e siano finiti
e inoltre che il limite della funzione a denominatore sia diverso da zero):

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \ \wedge\ \lim_{x\to c} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \ \Rightarrow\ \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}}$$

TEOREMI SINTETIZZATI DA “PSEUDO-UGUAGLIANZE”; FORME DI INDECISIONE

La tabella seguente elenca una rassegna di teoremi enunciandoli, per brevità ed efficacia espositiva, in forma sintetica, attraverso una “pseudo-uguaglianza”;
e riporta anche le “forme di indecisione” che si riferiscono alla somma algebrica, al prodotto, al quoziente di funzioni.

♪ **Ad esempio, quando scriviamo** $+\infty+\ell=+\infty$**, vogliamo in tal modo riassumere l’enunciato**:
$\lim_{x\to c} f(x)=+\infty \wedge \lim_{x\to c} g(x)=\ell\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$

♫ **Ancora: scrivendo che** $+\infty+(-\infty)$ **è una “FORMA DI INDECISIONE”,**
intendiamo affermare che, qualora si abbia $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to c} g(x)=-\infty$,
NULLA SI PUO’ DIRE A PRIORI riguardo al $\lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]$
(tale limite potrà esistere finito o infinito, o anche non esistere, a seconda delle *specifiche* funzioni *f* e *g*)

Basteranno, a titolo di esempi,
le dimostrazioni di un paio soltanto degli enunciati in esame
(le trovi alle pagine successive).

21) $+\infty+\ell=+\infty \quad (\ell\in\mathbb{R})$ **22)** $-\infty+\ell=-\infty \quad (\ell\in\mathbb{R})$ **23)** $+\infty+(+\infty)=+\infty$ **24)** $-\infty+(-\infty)=-\infty$

25) $[+\infty+(-\infty)]$ FORMA DI INDECISIONE

26) $\ell\cdot\infty=\infty \quad \left(\ell\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}\right)$
con l’ordinaria “regola dei segni”

27) $\infty\cdot\infty=\infty$
con l’ordinaria “regola dei segni”

28) $[0\cdot\infty]$ FORMA DI INDECISIONE

29) $\frac{1}{0}=\infty$ **30)** $\frac{\ell}{0}=\infty \ (\ell\in\mathbb{R}^*)$ **31)** $\frac{1}{\infty}=0$ **32)** $\frac{\ell}{\infty}=0 \ (\ell\in\mathbb{R}^*)$ **33)** $\frac{\infty}{\ell}=\infty \ (\ell\in\mathbb{R}^*)$ **34)** $\frac{\infty}{0}=\infty$ **35)** $\frac{0}{\infty}=0$

36) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ FORMA DI INDECISIONE

37) $\left[\frac{0}{0}\right]$ **FORMA DI INDECISIONE**

38) $\lim_{x\to c} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n=\ell^n,\ n\in\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, ...\}$

39) *Con* $n\in\mathbb{N}^*$ *PARI*, $\lim_{x\to c} f(x)=\ell\in[0,+\infty) \Rightarrow \lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$

40) *Con* $n\in\mathbb{N}^*$ *DISPARI*, $\lim_{x\to c} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$

- ***Dimostrazione** del teorema sintetizzato nella pseudo-uguaglianza* $\ell \cdot \infty = \infty \quad \left(\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}\right)$

Per semplicità supponiamo $\ell > 0$ e supponiamo inoltre che l' " ∞ " in questione sia, più precisamente, $+\infty$. (ovvie sono le modifiche che occorrerebbe apportare alla dimostrazione per adattarla agli altri casi).

Dunque: la nostra ipotesi è che $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell > 0$ e che $\lim\limits_{x \to c} g(x) = +\infty$

e la nostra tesi è che $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = +\infty$.

Sia $M > 0$.
Vogliamo far vedere che in corrispondenza di questo M , fissato arbitrariamente,
esiste sempre un intorno di c per ogni x del quale (eccettuato al più $x = c$, se c è finito),
valga la disuguaglianza $f(x) \cdot g(x) > M$.

A tale scopo, ci serve considerare:

a) in relazione all'ipotesi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell > 0$, il numero $\dfrac{\ell}{2}$.

In corrispondenza di tale numero positivo $\dfrac{\ell}{2}$

esisterà un intorno di c nell'ambito del quale (tolto, al più, c)

$$\ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2} \quad \text{(ma ci interessa in particolare } f(x) > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}\text{)}$$

b) in relazione all'ipotesi $\lim\limits_{x \to c} g(x) = +\infty$, il numero $M' = \dfrac{2M}{\ell}$.

In corrispondenza di tale M' esisterà un intorno di c nell'ambito del quale (tolto, al più, c) sarà
$g(x) > M'$

Da tutto ciò si trae che nell'intorno di c che rappresenta l'intersezione dei due intorni precedentemente considerati (fatta eccezione, al più, per il punto $x = c$), si avrà

$$f(x) > \frac{\ell}{2} \ \wedge \ g(x) > \frac{2M}{\ell}$$

da cui, moltiplicando membro a membro:

$$f(x) \cdot g(x) > \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2M}{\ell} = M$$

Così, dopo aver fissato ad arbitrio quell' M iniziale,
siamo riusciti a determinare un intorno di c tale che ... ecc. ecc.

La tesi è dimostrata.

- ***Dimostrazione** del teorema sintetizzato nella pseudo-uguaglianza* $\dfrac{1}{0} = \infty$

La situazione rappresentata nel teorema è quella di un rapporto di due funzioni $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

quando si abbia $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$

Si vuole dimostrare che, sotto tale ipotesi, è $\lim\limits_{x \to c} h(x) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Prima parte)

Dimostriamo dapprima la tesi in un CASO PARTICOLARE,
ossia qualora la funzione $f(x)$ a numeratore sia addirittura la COSTANTE $y = 1$.
Ricapitolando, avremo

Ipotesi: $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$

Tesi: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{g(x)} = \infty$

(in pratica, dimostreremo così che "se una funzione tende a 0, il suo reciproco tende a infinito")

Dobbiamo dunque far vedere che

$$\forall M>0\ \exists \mathrm{I}_c\ /\ x\in \mathrm{I}_c-\{c\}\Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)}\right|>M$$

(dove la specificazione $-\{c\}$ è da omettersi nel caso c sia infinito) .

Fissiamo perciò un $M>0$ e passiamo a considerare il numero $\frac{1}{M}$.

In corrispondenza di questo numero positivo, per l'ipotesi $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$,

esisterà un intorno I_c per ogni x del quale (escluso tutt'al più $x=c$, nel caso c sia finito) si abbia

$$-\frac{1}{M}<g(x)<\frac{1}{M}$$

ovvero

$$|g(x)|<\frac{1}{M}.$$

Ma da questa relazione si trae, passando ai reciproci (NOTA)

$$\frac{1}{|g(x)|}>M\ .$$

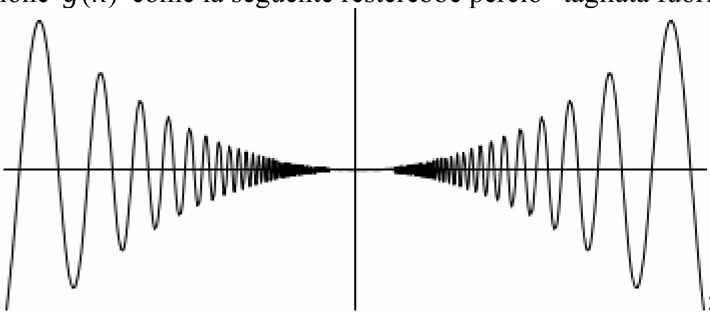
Ricapitolando, abbiamo provato che, comunque si fissi $M>0$,
esiste un intorno di c per ogni x del quale, escluso tutt'al più il punto c se c è un'ascissa finita,
vale la disuguaglianza

$$\frac{1}{|g(x)|}=\left|\frac{1}{g(x)}\right|>M\ .$$

Ma ciò dimostra, appunto, la tesi.

NOTA

Per poter effettuare questo passaggio ai reciproci,
sembra di dover supporre verificata un'ipotesi supplementare, ossia che esista tutto un intorno di c
nel quale (fatta eccezione al più per il punto c, se c è un'ascissa finita) la $g(x)$ non si annulli mai.
Una funzione $g(x)$ come la seguente resterebbe perciò "tagliata fuori".


:

D'altra parte, se in qualsivoglia intorno di c la $g(x)$ si annullasse almeno una volta fuori dal punto c ,
la funzione reciproca $1/g(x)$ avrebbe un dominio tutto "bucherellato"
e in questa situazione inconsueta parlare di "$x\to c$" non sarebbe più lecito,
a meno di introdurre nella definizione di limite un ritocco
che apporti una maggiore generalità alla definizione stessa.
Di tale "ritocco" non riteniamo che sia qui il caso di occuparci;
comunque, avvertiamo che il teorema in questione manterrebbe la sua validità
anche in quell'ambito più generale.

Seconda parte)

Abbiamo fin qui fatto vedere che il teorema sintetizzato dalla pseudo-uguaglianza $\frac{1}{0}=\infty$

vale nel caso particolare che la funzione a numeratore sia la costante 1.

E' ora facile estendere la dimostrazione anche al caso più generale,

se si tiene conto dell'identità $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$

e del teorema, già acquisito precedentemente, sintetizzato dalla pseudo-uguaglianza $\ell\cdot\infty=\infty$

41) Il Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotòne

TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE DELLE FUNZIONI MONOTÒNE:

Sia f una funzione monotòna crescente, in senso stretto o in senso lato, su tutto un intervallo (a, b).

Allora esistono certamente i

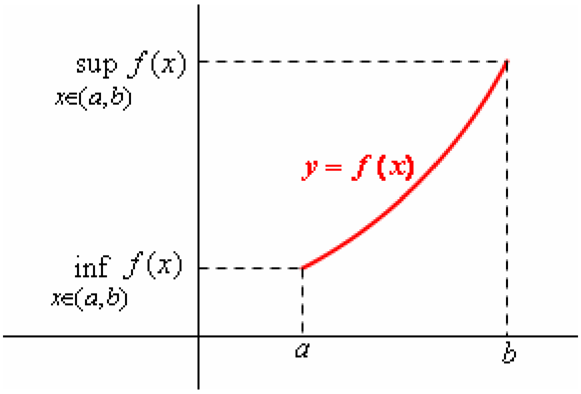
$$\lim_{x\to a^+} f(x); \ \lim_{x\to b^-} f(x)$$

e tali limiti sono uguali rispettivamente all'estremo inferiore (finito o infinito che sia) e all'estremo superiore (finito o infinito che sia) dell'insieme dei valori assunti dalla $f(x)$ nell'intervallo (a, b).

Brevemente:

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$



(**Proposizione gemella**):

Sia f una funzione monotòna decrescente, in senso stretto o in senso lato, su tutto un intervallo (a, b).

Allora esistono certamente i

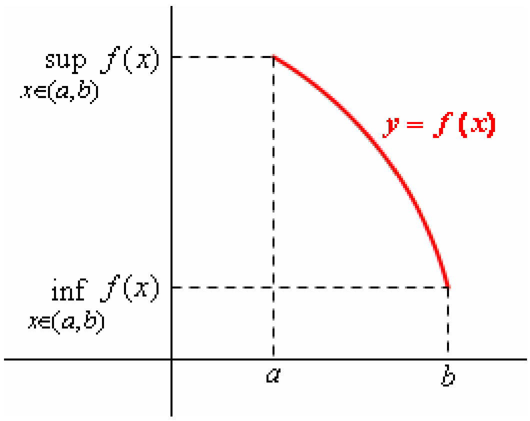
$$\lim_{x\to a^+} f(x); \ \lim_{x\to b^-} f(x)$$

e tali limiti sono uguali rispettivamente all'estremo superiore (finito o infinito che sia) e all'estremo inferiore (finito o infinito che sia) dell'insieme dei valori assunti dalla $f(x)$ nell'intervallo (a, b).

Brevemente:

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$$



OSSERVAZIONI

- Si può dimostrare che il teorema vale anche per intervalli illimitati verso sinistra o/e verso destra.
- Vale anche un enunciato analogo per le successioni
  ("Teorema di esistenza del limite delle successioni monotòne")

Sull'aggettivo "monotòna" riferito a una funziona l'accento è sulla penultima sillaba.

Si può anche scrivere "monotona" senza esplicitare l'accento, che comunque, quando si legge, va sempre messo al posto giusto.

Non esistono funzioni "monòtone", anche se qualcuno potrebbe sostenere l'esatto contrario!

❑ ***Dimostrazione*** *del Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotone*

Limitiamoci a dimostrare che se f è monotona crescente su (a, b), allora

$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

(le altre proposizioni avranno dimostrazioni perfettamente analoghe)

Interpretiamo "crescente" come "crescente in senso lato";
in questo modo, data la maggiore generalità della condizione,
la validità della dimostrazione si estenderà automaticamente anche alle funzioni strettamente crescenti.

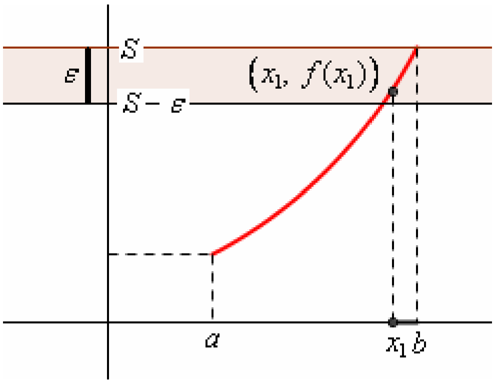
Supponiamo inoltre che $\sup_{x \in (a,b)} f(x)$ sia finito (ne indicheremo il valore con S);
nel caso fosse infinito, la dimostrazione subirebbe qualche modifica del tutto prevedibile,
che lasciamo al lettore.

Dunque:

- la nostra ipotesi è: f monotona crescente su (a, b)
- la nostra tesi è: $\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = S$, *con* $S = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$
- supponiamo inoltre che S sia finito.

Dobbiamo quindi dimostrare che, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$,
esiste un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $b - \delta < x < b$, allora $S - \varepsilon < f(x) \le S$.

Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$.
Poiché S è l'estremo superiore dell'insieme $H = f((a,b))$ dei valori che la $f(x)$ assume su (a, b),
nell'intervallo $(S - \varepsilon, S]$ esisterà certamente un elemento di H, ossia:
esisterà certamente su (a, b) un x_1 tale che $S - \varepsilon < f(x_1) \le S$



La chiave della dimostrazione
sta nel fatto che
deve necessariamente esistere un x_1
per cui $S - \varepsilon < f(x_1) \le S$,
dopodiché
tutti gli x *compresi*
fra x_1 *e* b
per forza
saranno anch'essi tali che
$S - \varepsilon < f(x) \le S$

Ora, essendo la funzione f crescente su tutto (a, b),
ed essendo S l'estremo superiore dei valori assunti dalla f su (a, b),
se prendiamo un qualunque x tale che

$$x_1 < x < b,$$

per quell' x si avrà

$$S - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le S.$$

Dunque la disuguaglianza

$$S - \varepsilon < f(x) \le S$$

è verificata per tutti gli x dell'intervallo $(b - \delta, b)$, essendo $\delta = b - x_1$

C.V.D.