

10. FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO

$$f \text{ continua in } x_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

oppure:

$$f \text{ continua in } x_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Il concetto è veramente fondamentale e quindi andiamo ad analizzarlo nei dettagli.

Dunque una funzione è continua in un punto x_0 se e solo se, per definizione:

- è definita in x_0
- tende a limite, per x che tende a x_0 ;
- tale limite coincide col valore che la funzione assume con $x = x_0$

Possiamo anche dire che

$$f \text{ continua in } x_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \text{esistono sia } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ che } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ e sono entrambi uguali a } f(x_0)$$

Diciamo che per le funzioni che si utilizzano più frequentemente (ottenute operando in svariati modi su funzioni algebriche, goniometriche, logaritmiche, esponenziali ...) la continuità è "la norma", mentre la discontinuità è "l'eccezione".

Per questo motivo, il concetto di continuità si comprende meglio attraverso i CONTROesempi, cioè gli esempi di DIScontinuità.

I TRE TIPI DI DISCONTINUITÀ

Si ha una **discontinuità di 1^a specie o di tipo "salto"**

quando esistono, al tendere di x a x_0 , sia il limite sinistro che il limite destro, e sono entrambi finiti, ma sono diversi fra loro, cosicché nell'attraversamento dell'ascissa x_0 si ha, appunto, un "salto", uguale alla differenza fra il limite destro e quello sinistro.

Esempi:

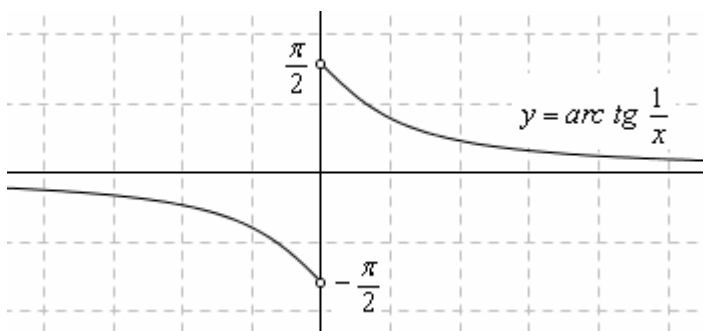
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}.$$

Questa funzione $f(x)$

ha una discontinuità di 1^a specie, o di tipo "salto", in $x_0 = 0$, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Il salto vale dunque } \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



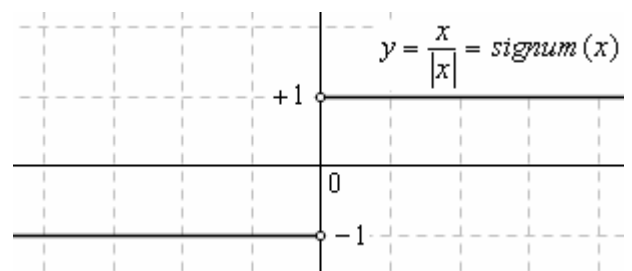
$$g(x) = \frac{x}{|x|} = \operatorname{signum}(x)$$

Questa funzione $g(x)$

ha una discontinuità di 1^a specie, o di tipo "salto", in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +1$$

Il salto della $g(x)$ nell'origine vale 2



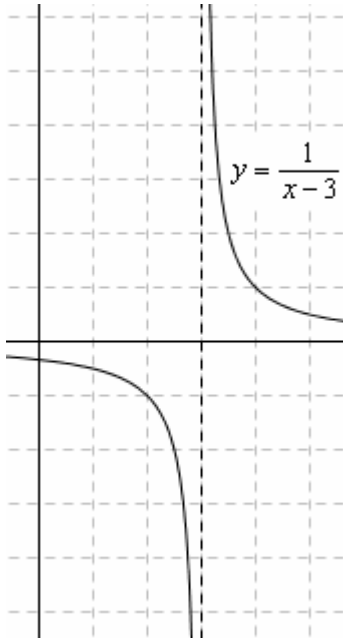
Si ha una **discontinuità di 2^a specie**

quando, al tendere di x a x_0 , almeno uno fra i due limiti sinistro e destro o non esiste, oppure esiste ma è infinito.

Esempi:

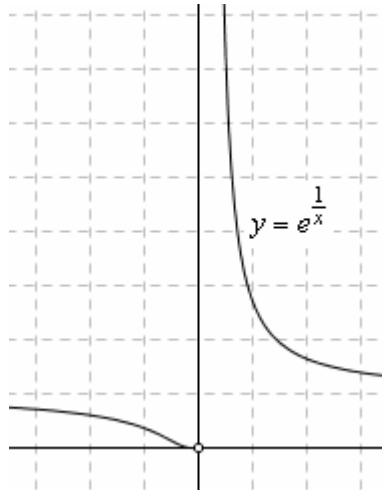
$$y = \frac{1}{x-3}$$

ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 3$
(limiti sinistro e destro infiniti)



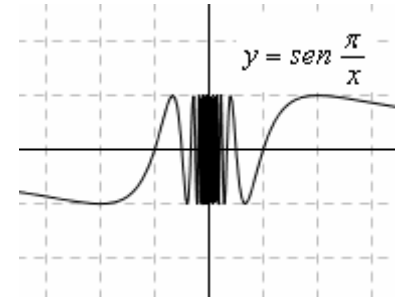
$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 0$
(il limite destro è infinito)



$$y = \text{sen} \frac{\pi}{x}$$

ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 0$
(il limite non esiste)



Si ha una **discontinuità di 3^a specie (discontinuità di tipo “buco”, discontinuità “eliminabile”)**

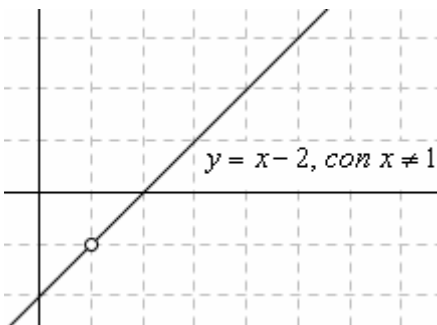
quando, al tendere di x a x_0 ,
la funzione tende ad un limite finito $\ell \in \mathbb{R}$,
che però non coincide con $f(x_0)$,

- o per il fatto che $f(x_0) \neq \ell$
- oppure per il fatto che $f(x_0)$ non esiste, cioè la funzione non è definita in x_0 .

Esempi:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2, \text{ ma con } x \neq 1$$

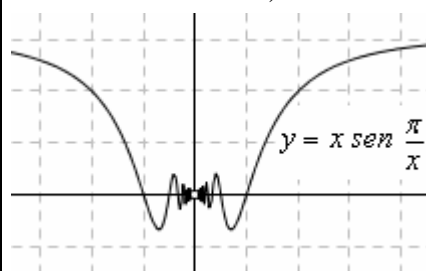
(“retta col buco”:
discontinuità di 3^a specie
in $x=1$)



$$h(x) = x \text{ sen} \frac{\pi}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0,$$

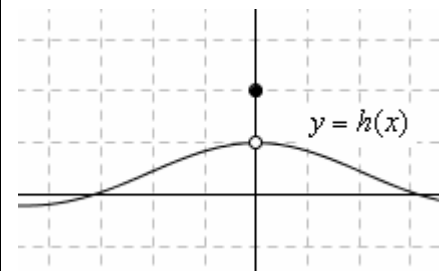
ma $h(0)$ non esiste
(discontinuità di 3^a specie
in $x=0$)



$$s(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{con } x \neq 0 \\ 2 & \text{con } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 1,$$

$$\text{ma } s(0) = 2$$



DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE IN UN INSIEME

Una funzione $y = f(x)$ si dice continua in un insieme E (o “su di un insieme E ”),
se è continua in ogni punto di E .

CONTINUITÀ SUL LORO DOMINIO DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Sono continue su tutto il loro dominio (= in tutti i punti del loro dominio) le seguenti funzioni: (qualche dimostrazione è riportata più avanti, le altre dimostrazioni sono omesse)	
funzione	dominio
$f(x) = k$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ con $P_i(x)$ polinomi	$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } P_2(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D = \begin{cases} [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
$f(x) = \sin x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$D = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$D = \mathbb{R} - \{k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \operatorname{arc} \sin x$	$D = [-1, 1]$; valori in $[-\pi/2, \pi/2]$
$f(x) = \operatorname{arc} \cos x$	$D = [-1, 1]$; valori in $[0, \pi]$
$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$D = (-\infty, +\infty)$; valori in $(-\pi/2, \pi/2)$
$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$	$D = (-\infty, +\infty)$; valori in $(0, \pi)$
$f(x) = a^x$ con $a > 0$, in particolare $y = e^x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$ con $a > 0, a \neq 1$, in particolare $y = \ln x$	$D = (0, +\infty)$

DIMOSTRAZIONE DELLA CONTINUITÀ DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Osservazione preliminare: poiché f continua in $x_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

per dimostrare che una data funzione $f(x)$ è continua in x_0 si imposterà la disequazione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di x_0

(come abbiamo già più volte sottolineato, non è necessario che l'intorno trovato sia circolare, perché, comunque, qualsiasi intorno di un punto contiene sempre un intorno circolare di quel punto)

- **Dimostriamo che la funzione costante $f(x) = k$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$**

La tesi è: $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Osservazione: il contenuto del teorema è molto banale: ce ne scusiamo col lettore.

Dimostrazione

Consideriamo un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$. Impostiamo la disequazione: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per stabilire da quali valori di x è verificata. Essa diventa, nella fattispecie: $|k - k| < \varepsilon$ e ci rendiamo immediatamente conto che è verificata qualunque fosse l' x considerato in partenza, vale a dire su tutto \mathbb{R} ; quindi la disequazione posta è verificata su tutto un intorno di x_0 .

- **Dimostriamo che la funzione identica $f(x) = x$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$**

Tesi: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Osservazione: anche questo teorema invoca indulgenza per la banalità del suo contenuto.

Dimostrazione

Consideriamo un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$. Impostiamo la disequazione: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Essa diventa, nella fattispecie: $|x - x_0| < \varepsilon$ ed è verificata per $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, che è un intorno di x_0 . In pratica, il $\delta = \delta(\varepsilon)$ può essere preso uguale a ε (o, a maggior ragione, $< \varepsilon$).

- **Una funzione polinomiale** $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$,

cioè: $\lim_{x \rightarrow x_0} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n$

Dim. Conseguenza di teoremi precedenti:

- ✓ la funzione identica $f(x) = x$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k\ell$ ($\ell, k \in \mathbb{R}$)
- ✓ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \ell^n$ ($n \in \mathbb{N}^*, \ell \in \mathbb{R}$)
- ✓ il limite di una somma algebrica di più funzioni è uguale alla somma dei limiti, supposto che tutti questi limiti esistano e siano finiti
- ✓ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + k] = \ell + k, \ell, k \in \mathbb{R}$

- **Dimostriamo che una funzione algebrica razionale fratta** $f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ con $P_i(x)$ polinomi,

è continua su tutto il suo dominio (che è poi l'insieme degli x_0 che non annullano il denominatore $P_2(x)$)

Dim. Conseguenza di teoremi precedenti:

- ✓ una funzione polinomiale $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$
- ✓ il limite del quoziente di due funzioni è uguale al quoziente dei limiti (supposto che entrambi esistano e siano finiti, e che il limite della funzione a denom. sia $\neq 0$).

- **Dimostriamo che la funzione “seno”** $f(x) = \text{sen } x$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

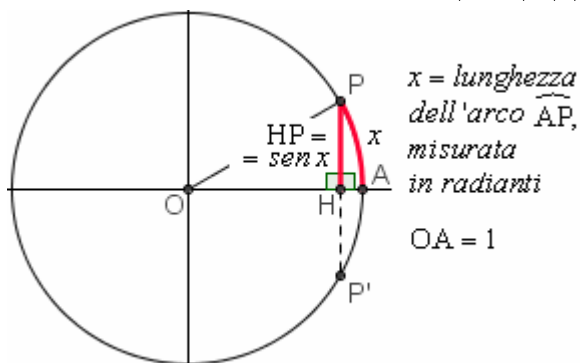
Per la dimostrazione, occorre preliminarmente provare che: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

a) Dimostriamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0$.

Vogliamo far vedere che la disequazione $|\text{sen } x - 0| < \varepsilon$ (ossia $|\text{sen } x| < \varepsilon$), con ε numero positivo arbitrariamente prefissato, è verificata in tutto un intorno dell'ascissa $x_0 = 0$. Ma osserviamo la figura qui sotto: essa ci mostra che risulta sempre $|\text{sen } x| < |x|$ quindi, qualora si abbia $|x| < \varepsilon$, cioè: qualora x appartenga all'intorno di centro $x_0 = 0$ e raggio $\delta = \varepsilon$, è certamente, a maggior ragione, $|\text{sen } x| < \varepsilon$.

La tesi è dimostrata: insomma, in corrispondenza di qualsivoglia $\varepsilon > 0$ prefissato, il $\delta = \delta(\varepsilon)$ che va bene esiste: basta prendere $\delta = \varepsilon$ (o $\delta < \varepsilon$).

NOTA: a partire dalla disuguaglianza $|\text{sen } x| < |x|$, avremmo potuto anche utilizzare il “2° teorema del confronto”



x è la lunghezza dell'arco \widehat{AP} , misurato in radianti;
 $\text{sen } x$ è la misura del segmento HP .
 Il segmento PP' è più corto dell'arco che va da P a P' (questa disuguaglianza, ovvia all'intuizione, può essere comunque dedotta dalla def. di lunghezza di una curva, la quale porta con sé come conseguenza il fatto che “fra tutti i cammini che congiungono due punti, quello rettilineo è il più breve”).

Quindi $2 \text{sen } x < 2x$ da cui $\text{sen } x < x$.

Abbiamo supposto, per semplicità, $x > 0$; se il segno di x è arbitrario, vale invece la relazione $|\text{sen } x| < |x|$

b) In quanto al limite $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, esso si può dedurre da $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0$

tenendo conto delle formule goniometriche e di teoremi sui limiti, già acquisiti.

BENE! Siamo a questo punto finalmente pronti per la dimostrazione del nostro asserto:

“la funzione “seno” $f(x) = \text{sen } x$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ ”.

Poniamo la tesi sotto la forma $\lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(x_0 + h) = \text{sen } x_0$. Provare questa relazione è ora semplicissimo ...

... basterà infatti combinare la formula di addizione $\text{sen}(x_0 + h) = \text{sen } x_0 \cos h + \cos x_0 \text{sen } h$ coi risultati precedenti $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, applicati con h al posto di x .

OPERAZIONI CON FUNZIONI CONTINUE

Dai teoremi sui limiti e dalla definizione di continuità segue che:

La somma, la differenza, il prodotto di due funzioni continue in uno stesso punto x_0 sono pure funzioni continue in x_0

$$f, g \text{ continue in } x_0 \Rightarrow f + g, f - g, f \cdot g \text{ continue in } x_0$$

La potenza con esponente intero positivo di una funzione continua in x_0 è pure una funzione continua in x_0

$$f \text{ continua in } x_0 \Rightarrow [f(x)]^n \text{ continua in } x_0 \quad (n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\})$$

Il quoziente di due funzioni continue in x_0 è pure una funzione continua in x_0 , purché la funzione a divisore non si annulli in x_0

$$f, g \text{ continue in } x_0 \text{ e } g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ continua in } x_0$$

Il valore assoluto di una funzione continua in x_0 è pure una funzione continua in x_0

$$f \text{ continua in } x_0 \Rightarrow |f(x)| \text{ continua in } x_0$$

L'INVERSA DI UNA FUNZIONE CONTINUA

Si può inoltre dimostrare (noi ci limitiamo ad enunciarlo) il seguente

Teorema sulla continuità della funzione inversa di una funzione continua:

**SE una funzione $f(x)$ è continua su di un insieme E , ed è invertibile su E ,
ALLORA la sua funzione inversa f^{-1} è continua sull'insieme $f(E)$**

(col simbolo $f(E)$ si indica l'insieme delle immagini dei punti di E , attraverso la f).

La **continuità, su tutto il loro dominio, delle inverse delle funzioni circolari**

(si dice anche: “**funzioni goniometriche inverse**”):

$\text{arc sen } x$, $\text{arc cos } x$, $\text{arc tg } x$, $\text{arc cotg } x$,

può essere considerata come conseguenza del precedente Teorema sulla continuità della funzione inversa, essendo stata preliminarmente provata la continuità delle rispettive funzioni dirette $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, $\text{tg } x$, $\text{cotg } x$.

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI, E IN PARTICOLARE DI FUNZIONI CONTINUE

Resta da considerare la cosiddetta **COMPOSIZIONE DI FUNZIONI**.

Ce ne siamo occupati in un paragrafo apposito del capitolo “Verso l'analisi”;

ricapitoliamo qui il succo del discorso.

Esempi di funzioni composte sono:

$$y = \cos 3x, \quad y = e^{\text{sen } x}, \quad y = \ln^2 x = (\ln x)^2, \quad y = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|, \quad y = \sqrt{x^2 - x - 6}$$

Prendendo, ad esempio $y = \cos 3x$, si vede che in essa ci sono due “componenti”:

la funzione “triplo”, che da x fa passare a $3x$; e la funzione “coseno”, che da questo $3x$ ci porta a $\cos 3x$.

$$x \xrightarrow{3(*)} 3x \xrightarrow{\text{cos}(*)} \cos 3x$$

Il generale, applicando a x prima una funzione g e poi al risultato così ottenuto una seconda funzione f , si ha:

$$x \xrightarrow{g(*)} g(x) \xrightarrow{f(*)} f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

IMPORTANTE: LA FUNZIONE CHE È STATA APPLICATA PER ULTIMA VIENE SCRITTA PER PRIMA!

Chiamando z il numero intermedio si avrà:

$$x \xrightarrow{g(*)} z = g(x) \xrightarrow{f(*)} y = f(z) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Se le due funzioni componenti $z = g(x)$, $y = f(z)$ sono tali che:

g è continua in un dato punto x , e f è a sua volta continua in quel punto z , tale che $z = g(x)$,

cosicché in qualche modo le due continuità si “saldino”, ci possiamo domandare:

sarà certamente continua (nel punto x) anche la funzione composta $y = f(z) = f(g(x))$?

La risposta (affermativa), è discussa nelle impegnative pagine seguenti,

le quali giustificano anche i procedimenti di “sostituzione” (“implicita” od “esplicita”)

ai quali spesso occorre fare ricorso nel calcolo di un limite.

SOSTITUZIONE DI VARIABILE NELL'AMBITO DEL CALCOLO DI UN LIMITE

Obiettivo di questo paragrafo è di dimostrare che, eseguendo esercizi sui limiti, è corretto effettuare “sostituzioni di variabile”, esplicite o implicite, come negli esempi seguenti:

Sostituzione implicita: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\text{sen } 5x}^{0}}{\underbrace{5x}_{\rightarrow 0}} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{\overbrace{x}^{0+}}{x^2 + 1} = -\infty$

Sostituzione esplicita: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen } z}{z} = 1 \quad (5x = z; \text{ quando } x \rightarrow 0 \text{ anche } z \rightarrow 0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \ln z = -\infty \quad \left(\frac{x}{x^2 + 1} = z; \text{ quando } x \rightarrow +\infty, z \rightarrow 0^+ \right) \end{array} \right.$

Ciò si riassume dicendo che:

“se la funzione f di cui vogliamo calcolare il limite dipende, a sua volta, da una funzione $g(x)$ che, quando x tende a c , tende ad un limite ℓ (finito o infinito), possiamo comportarci come se avessimo, al posto di $g(x)$, una variabile indipendente z tendente a ℓ ”

Vale infatti il seguente rilevante Teorema:

TEOREMA SUL LIMITE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA, O “TEOREMA DI SOSTITUZIONE”
(i simboli c, ℓ, L potranno indicare un numero finito, oppure $+\infty, 0, -\infty, \infty$)

Supponiamo di voler calcolare il $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x))$.

Supponiamo inoltre che siano verificate le seguenti due ipotesi: I. $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$ II. $\lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = L$

Allora avremo (TESI): $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = \lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = L$

Dimostrazione

La tesi è che $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = L$, cioè che $\forall \bar{I}_L \exists \bar{I}_c$ tale che $x \in \bar{I}_c - \{c\} \rightarrow f(g(x)) \in \bar{I}_L$.

Fissiamo dunque, ad arbitrio, un \bar{I}_L . Per l'ipotesi II), in corrispondenza di questo \bar{I}_L esisterà un \bar{I}_ℓ tale che

$$(*) \quad z \in \bar{I}_\ell - \{\ell\} \rightarrow f(z) \in \bar{I}_L$$

Per l'ipotesi I), in corrispondenza di questo \bar{I}_ℓ esisterà poi un \bar{I}_c tale che

$$(**) \quad x \in \bar{I}_c - \{c\} \rightarrow g(x) \in \bar{I}_\ell$$

Ci rendiamo ora conto di una difficoltà.

(**) ci dice che la funzione g (quella che viene applicata per prima), quando opera sugli x di $\bar{I}_c - \{c\}$, genera valori che stanno in \bar{I}_ℓ ;

(*) afferma che quando la funzione f opera su valori che stanno in \bar{I}_ℓ , genera valori che stanno in \bar{I}_L

CON UNA POSSIBILE ECCEZIONE:

quando $z = \ell$, il valore $f(z)$ potrebbe anche
a) non esistere oppure b) stare FUORI da \bar{I}_L .

Se non intervenisse questa possibile eccezione, la tesi sarebbe dimostrata, e \bar{I}_c sarebbe l'intorno di c di cui si voleva provare l'esistenza.

abbiamo scoperto che, per assicurare la validità della tesi, OCCORRE UN'IPOTESI SUPPLEMENTARE, ossia che

III. esista un intorno J_c di c , per ogni x del quale (escluso, tutt'al più, c), sia certamente $g(x) \neq \ell$

Se, dunque, vale l'ipotesi supplementare III, avremo che

per ogni x di $\bar{I}_c \cap J_c - \{c\}$ risulterà contemporaneamente $g(x) \in \bar{I}_\ell$ e $x \in J_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \neq \ell$, ossia

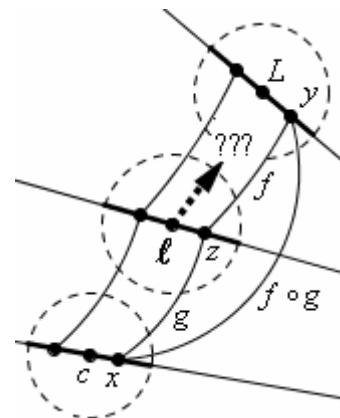
$$(***) \quad x \in \bar{I}_c \cap J_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \in \bar{I}_\ell - \{\ell\}$$

Quindi avremo, combinando (***) con (*),

$$x \in \bar{I}_c \cap J_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \in \bar{I}_\ell - \{\ell\} \Rightarrow f(g(x)) \in \bar{I}_L$$

In corrispondenza dell' \bar{I}_L arbitrariamente fissato, si è quindi provato che esiste un intorno di c (si tratta di $\bar{I}_c \cap J_c$) per ogni x del quale, eccettuato al più $x = c$ se c è finito, risulta $f(g(x)) \in \bar{I}_L$.

La tesi è dimostrata. Ma C'È STATO BISOGNO DELL'IPOTESI SUPPLEMENTARE III.



OSSERVAZIONE 1: la scarsa incidenza dell'ipotesi supplementare

E' pur vero che questa ipotesi supplementare è quasi sempre verificata, a meno di andare a scomodare situazioni particolarissime.

Consideriamo ad esempio la funzione

$$g(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} + 4.$$

Essa è tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4 = \ell.$$

Osserviamo che $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ assume, in qualsiasi intorno dell'ascissa $c = 0$, infinite volte il valore 0 e quindi $g(x)$ assume, in qualsiasi intorno dell'ascissa $c = 0$, infinite volte il valore 4.

Consideriamo poi la funzione

$$f(z) = \begin{cases} 50 & \text{con } z \neq 4 \\ 100 & \text{con } z = 4 \end{cases}$$

Avremo

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(z) = 50 = L$$

ma

$$f(4) = 100.$$

Se ora noi costruiamo la funzione composta $f(g(x))$, vediamo che essa assume, in ogni intorno di $c = 0$, infinite volte il valore 50 e infinite volte il valore 100, quindi non tenderà a nessun limite se facciamo tendere x a 0.

NON è quindi verificata la tesi del Teorema, ossia

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = L,$$

per il fatto che il teorema stesso non è applicabile, non valendo l'ipotesi supplementare III.

Ma che funzione strana abbiamo dovuto chiamare in causa per poter costruire questo controesempio!

Osserviamo ancora che, nel caso ℓ sia infinito,
il problema dell'ipotesi supplementare semplicemente non si pone.

OSSERVAZIONE 2: l'ipotesi supplementare è superflua se f è continua in ℓ .

Possiamo fare anche un'altra osservazione.

Abbiamo avuto bisogno dell'ipotesi supplementare III quando ci siamo accorti che mancavano del tutto, nell'ipotesi originaria del teorema, condizioni sul comportamento della funzione $f(z)$ IN $z = \ell$; il valore $f(\ell)$ poteva anche

- a) non esistere
- b) esistere ma non coincidere con L .

Queste due circostanze avrebbero portato il valore $f(g(x))$, nel caso fosse $g(x) = \ell$, rispettivamente

- a) a non esistere
- b) a collocarsi, purché \bar{I}_L venisse preso sufficientemente piccolo, FUORI dall'intorno \bar{I}_L , anche qualora il punto x tale che $g(x) = \ell$ appartenesse a $\bar{I}_c - \{c\}$.

Se però $\ell \in \mathbb{R}$ e $f(z)$ è CONTINUA in $z = \ell$, allora si ha

$$L = \lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = f(\ell)$$

e il valore $f(\ell)$ esiste ed è automaticamente contenuto in qualsiasi intorno di L , quindi non "rischia" più di non esistere, né di stare al di fuori dell'intorno \bar{I}_L .

In definitiva:

l'ipotesi supplementare III è del tutto superflua nel caso ℓ sia un valore finito e la funzione f sia continua in ℓ .

COROLLARIO 1

**SE la funzione $g(x)$ è continua in x_0 e la funzione $f(z)$ è continua in $g(x_0)$,
ALLORA la funzione composta $f(g(x))$ è continua in x_0 .**

Dimostrazione

Infatti, sotto le predette ipotesi di continuità, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \wedge \lim_{z \rightarrow g(x_0)} f(z) = f(g(x_0))$$

e ciò implica, per il Teorema sul Limite di una Funzione Composta appena dimostrato (la cui applicazione, data la continuità di f , non richiede l'ipotesi supplementare III),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

ossia la continuità in x_0 della funzione composta $f(g(x))$.

Potremmo ricordare più facilmente questo importante Corollario enunciandolo nel modo seguente, piuttosto vago ma utile, appunto, per tenere a mente il concetto:

la funzione ottenuta componendo due funzioni continue è ancora una funzione continua.

OSSERVAZIONE 3 (uno "slogan" importante!)

Se $\ell \in \mathbb{R}$ e una funzione f è CONTINUA in ℓ , cioè $\lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = f(\ell)$,

allora, presa una qualsivoglia funzione $g(x)$ tale che $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$, il Teorema di Sostituzione (senza bisogno dell' "ipotesi supplementare", data la continuità della f in ℓ) ci assicura che

$$\lim_{x \rightarrow c} f \left(\underbrace{g(x)}_{\ell} \right) = f(\ell) = f \left(\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right) \quad \text{e, compattando la scrittura,} \quad (*) \quad \lim_{x \rightarrow c} f \left(\underbrace{g(x)}_{\ell} \right) = f \left(\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right)$$

il che autorizza a formulare il seguente "slogan" (vago, ma efficace):

le funzioni continue sono tutte e sole quelle funzioni per le quali il simbolo di limite si può portare da "fuori" a "dentro" il simbolo di funzione, e viceversa.

La frasetta dev'essere utilizzata come un rimando all'uguaglianza (*): insomma,

lo "slogan" condensa l'affermazione che

"una funzione f è continua in un punto $\ell \in \mathbb{R}$ se e solo se per la f vale l'uguaglianza (1), comunque si prenda una funzione g che tende a ℓ " (NOTA).

La proposizione si ricorda bene se si pensa che generalizza l'ovvia biimplicazione seguente:

$$f \text{ continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)$$

NOTA: abbiamo appena fatto vedere che, se f è continua in ℓ ,

allora, qualunque sia la funzione $g(x)$ tendente a ℓ , vale la (1);

se, viceversa, per una data funzione f vale la (1) qualunque sia la funzione $g(x)$ tendente a ℓ ,

allora, preso il caso particolare $g(x) = x$, e facendo tendere x a $c = \ell$ (da cui $g(x) = x \rightarrow \ell$), avremo

$$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f \left(\lim_{x \rightarrow \ell} x \right) = f(\ell)$$

quindi la f sarà continua in ℓ .

COROLLARIO 2

Una funzione della forma $F(x) = [f(x)]^{g(x)}$,

se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue ciascuna sul proprio dominio, è continua sul suo dominio; in particolare, una potenza ad esponente irrazionale x^r ($r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) è una funzione continua su tutto il suo dominio.

Dimostrazione

Immediatamente deducibile dal Teorema sul Limite della Funzione Composta utilizzando l'identità

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

e tenendo presenti teoremi già acquisiti, in particolare la continuità della funzione logaritmica.