11. LIMITI DI FUNZIONI ALGEBRICHE (=POLINOMI, RAPPORTI DI POLINOMI, RADICALI)

La **definizione generale di "funzione algebrica"** non è semplicissima, e non vogliamo occuparcene qui.

Comunque, **sono "algebriche", fra l'altro, tutte le funzioni nella cui espressione compaiono esclusivamente operazioni "algebriche"** ossia **addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, potenze, radici**, mentre **sono dette "trascendenti" le funzioni costruite attraverso logaritmi, esponenziali, funzioni goniometriche**.

Fra le **funzioni algebriche di utilizzo più comune** ci sono
- **i polinomi** (= funzioni algebriche razionali "intere")
- **i rapporti di polinomi** (= funzioni algebriche razionali "fratte", ossia "con la x a denominatore")
- **le funzioni algebriche irrazionali**, ossia quelle nelle quali x compare almeno una volta sotto radice.

POLINOMI E RAPPORTI DI POLINOMI

Regola per il calcolo del limite di un polinomio, quando $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$

Al tendere di x a $+\infty$ o $-\infty$, un polinomio $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ tende sempre all'INFINITO.
E per stabilire il *segno* di questo infinito, si può procedere in due modi:

- raccogliere x elevato all'esponente più alto
- considerare esclusivamente il comportamento del termine di grado massimo a_0x^n (occorrerà tenere conto del segno del coeff. e, qualora x tenda a $-\infty$, della parità o disparità dell'esponente)

Infatti $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^n}}}\overbrace{\left(a_0+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{a_1}{x}}}}+\ldots+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}}}}+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{a_n}{x^n}}}}\right)}^{\substack{a_0\\ \uparrow}}$

- Il contenuto della parentesi tende dunque ad a_0;
- il fattore esterno x^n tende a ∞, precisamente: $\begin{cases}+\infty & se\ x\to+\infty\ \ oppure\ anche\ \ x\to-\infty\ ma\ n\ è\ pari;\\ -\infty & se\ x\to-\infty\ \ e\ n\ è\ dispari\end{cases}$

Il valore del limite
a) sarà perciò infinito
b) avrà un segno determinato da considerazioni molto elementari, illustrate dagli esempi che seguono
c) coinciderà sempre con il valore di $\lim\limits_{x\to\pm\infty}a_0x^n$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^3+5x^2-7\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^3}}}\overbrace{\left(4+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{5}{x}}}}-\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{7}{x^3}}}}\right)}^{\substack{4\\ \uparrow}}=+\infty$ *...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende il termine di grado più elevato* $\overbrace{4\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^3}}}}^{\substack{+\infty\\ \uparrow}}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+5x^3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^4}}}\overbrace{\left(2+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{5}{x}}}}\right)}^{\substack{2\\ \uparrow}}=+\infty$ *...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende il termine di grado più elevato* $\overbrace{2\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^4}}}}^{\substack{+\infty\\ \uparrow}}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+5x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^3}}}\overbrace{\left(2+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{5}{x}}}}\right)}^{\substack{2\\ \uparrow}}=-\infty$ *...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende il termine di grado più elevato* $\overbrace{2\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^3}}}}^{\substack{-\infty\\ \uparrow}}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-7x^3+12x^2+9x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^3}}}\overbrace{\left(-7+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{12}{x}}}}+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{9}{x^2}}}}+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{1}{x^3}}}}\right)}^{\substack{-7\\ \uparrow}}=+\infty$ *...Anche semplicemente considerando il termine di grado più elevato* $\overbrace{-7\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^3}}}}^{\substack{+\infty\\ \uparrow}}$

Regola per il calcolo del limite di un rapporto di polinomi, quando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

Il valore del $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$ può essere:

a) **se prevale il grado del numeratore: ∞, con un segno determinato dalla "regola dei segni" applicata considerando soltanto i termini di grado massimo a numeratore e denominatore**
(occorrerà tenere conto dei segni dei coefficienti
e, qualora x tenda a $-\infty$, della parità o disparità della differenza fra gli esponenti)

b) **se prevale il grado del denominatore: 0**

c) **se num. e denom. hanno ugual grado: $\boldsymbol{\dfrac{a_0}{b_0}}$ (= rapporto tra i coeff. dei due termini di grado massimo)**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\dfrac{b_1}{x}+\ldots+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}\right)}\overset{\text{NOTA}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=$$

$$=\frac{a_0}{b_0}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}x^{n-m}=\begin{cases}\infty & se\ n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & se\ n=m\\ 0 & se\ n<m\end{cases}$$

NOTA: entro ciascuna parentesi, tutti i termini, tranne il primo, sono "evanescenti" (= tendenti a 0)

Più ancora della catena sopra riportata, ti saranno da guida i seguenti esempi.

5) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-x^2+x}{4x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\overbrace{\cancel{x^5}^{\,2}}^{+\infty}\overbrace{\left(3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)}^{3}}^{+\infty}}{\cancel{x^3}\underbrace{\left(4-\dfrac{1}{x^3}\right)}_{4}}=+\infty$$

6) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+3}{2x^3-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\overbrace{\left(5+\dfrac{3}{x}\right)}^{5}}{\underbrace{\underbrace{\cancel{x^3}^{\,2}}_{+\infty}\underbrace{\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)}_{2}}_{+\infty}}=0^+$$

7) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\underbrace{\underbrace{x\cancel{^2}}_{-\infty}\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}_{1}}_{-\infty}}=0^-$$

8) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+4x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\overbrace{\left(3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}^{3}}{\cancel{x^2}\underbrace{\left(2+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}_{2}}=\frac{3}{2}$$

9) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2}{12-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}\overbrace{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}^{2}}{\cancel{x^3}\underbrace{\left(\dfrac{12}{x^3}-1\right)}_{-1}}=-2$$

10) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^2-6}{x^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\overbrace{\left(7-\dfrac{6}{x^2}\right)}^{7}}{\underbrace{\cancel{x^5}^{\,3}}_{-\infty}}=0^-$$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4+5x}{6x^4-x^2+10}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{2}$
Immediatamente, con la regola!

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-8}{x^2-x+2}=0^+$
Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2}{x^2+x}=-\infty$
Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x+2}=0^-$
Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3+x^2+x+1}=+\infty$
Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

16) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-x^2}{5+x^2}=-1$
Immediatamente, con la regola!

Regola per il calcolo del limite di un rapporto di polinomi, quando $x \to x_0$

In questo caso, **il calcolo del limite**
è immediato ogniqualvolta, sostituendo x_0 al posto di x, il denominatore sia diverso da 0.

Se poi con $x = x_0$ si annulla soltanto il denominatore, il limite è infinito
e per stabilire il segno di questo infinito si dovrà generalmente distinguere fra limite sinistro e destro;
a tale scopo, sarà di norma conveniente scomporre in fattori il denominatore, se è di grado sup. al 1°.

Ma può, eccezionalmente, presentarsi una Forma di Indecisione:
ciò avviene nel caso in cui, con $x = x_0$, si annullino contemporaneamente sia il num. che il denom.:

$A(x_0) = B(x_0) = 0$.

Quando accade ciò, compare una **F.I. [0/0]**, che si scioglie sempre per **scomposizione e semplificazione**. Infatti:

- essendo $A(x_0) = 0$, per il Teorema del Resto il polinomio $A(x)$ è divisibile per il binomio $(x - x_0)$ e quindi è scomponibile in un prodotto della forma $(x - x_0)A_1(x)$
- ed essendo $B(x_0) = 0$, per il Teorema del Resto il polinomio $B(x)$ è divisibile per il binomio $(x - x_0)$ e quindi è scomponibile in un prodotto della forma $(x - x_0)B_1(x)$

… cosicché si avrà $\dfrac{A(x)}{B(x)} = \dfrac{(x - x_0)A_1(x)}{(x - x_0)B_1(x)}$ con la possibilità di semplificare per $(x - x_0)$.

Qualche esempio dei vari tipi:

17) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+4}{x-1} = \dfrac{9+4}{3-1} = \dfrac{13}{2}$

18) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\overbrace{x^2+4}^{\overset{5}{\uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty$

19) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\overbrace{x^2+4}^{\overset{5}{\uparrow}}}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\underset{0}{\downarrow}}} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to 1^+}\dfrac{\overbrace{x^2+4}^{\overset{5}{\uparrow}}}{\underbrace{\underbrace{(x-3)}_{\underset{-2}{\downarrow}}\underbrace{(x-1)}_{\underset{0^+}{\downarrow}}}_{\underset{0^-}{\downarrow}}} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^-}\dfrac{\overbrace{x^2+4}^{\overset{5}{\uparrow}}}{\underbrace{\underbrace{(x-3)}_{\underset{-2}{\downarrow}}\underbrace{(x-1)}_{\underset{0^-}{\downarrow}}}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty \end{cases}$

20) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\overbrace{x^2-4}^{\overset{0}{\uparrow}}}{\underbrace{x^2+4x-12}_{\underset{0}{\downarrow}}} = \lim_{x\to 2}\dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+6)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

21) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\overbrace{x^2-5x+6}^{\overset{0}{\uparrow}}}{\underbrace{x^3-2x^2-x-6}_{\underset{0}{\downarrow}}} = \lim_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\underbrace{\cancel{(x-3)}(x^2+x+2)}_{RUFFINI}} = \dfrac{1}{14}$

22) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\overbrace{x^2-6x+5}^{\overset{0}{\uparrow}}}{\underbrace{x^3-3x^2+3x+1}_{\underset{0}{\downarrow}}} = \lim_{x\to 1}\dfrac{\overbrace{(x-5)}^{\overset{-4}{\uparrow}}\cancel{(x-1)}}{\underbrace{(x-1)^{\cancel{3}\,2}}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = -\infty$

23) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{\overbrace{x^2+2}^{\overset{4}{\uparrow}}}{\underbrace{x^2-2}_{\underset{0}{\downarrow}}} = \infty \begin{cases} +\infty \ \textit{con } x \to \sqrt{2}^{\,+} \\ -\infty \ \textit{con } x \to \sqrt{2}^{\,-} \end{cases}$

24) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{\overbrace{x^2-2}^{\overset{0}{\uparrow}}}{\underbrace{x^2+2}_{\underset{4}{\downarrow}}} = 0$

25) $\lim_{x\to -5}\dfrac{\overbrace{x^2-25}^{\overset{0}{\uparrow}}}{\underbrace{x^2+10x+25}_{\underset{0}{\downarrow}}} = \lim_{x\to -5}\dfrac{\cancel{(x+5)}\overbrace{(x-5)}^{\overset{-10}{\uparrow}}}{\underbrace{(x+5)^{\cancel{2}}}_{\underset{0}{\downarrow}}} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to -5^-}\dfrac{\overbrace{x-5}^{\overset{-10}{\uparrow}}}{\underbrace{x+5}_{\underset{0^-}{\downarrow}}} = +\infty \\ \lim_{x\to -5^+}\dfrac{\overbrace{x-5}^{\overset{-10}{\uparrow}}}{\underbrace{x+5}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = -\infty \end{cases}$

INDICAZIONE GENERALE SULLE FORME DI INDECISIONE FIN QUI VISTE

Diciamo che, in linea di principio,

le forme di indecisione $[\infty-\infty]$ e $[\infty/\infty]$ si affrontano
"raccogliendo il termine di esponente maggiore
o, comunque, quello che tende a infinito più rapidamente",
mentre per le forme di indecisione $[0/0]$
"si va a cercare una semplificazione", attraverso fattorizzazioni, o razionalizzazioni,
o previa moltiplicazione di numeratore e denominatore per una stessa espressione.

Naturalmente, nella pratica si terrà sempre conto di **limiti noti già studiati in passato**.

ESERCIZI **(… quasi tutti, anche se non tutti, portano Forme di Indecisione …)**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-25x}{4x^2+x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{x^3-x^2-x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2+1}{7x^3+6x^2+5x+4}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-6x^3}{3x^3-4x}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-5x-3}{-11x^3+13x}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+14}{x^3}$ 7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+9x+18}{x^2-x-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x^2-2}{x^5}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^4}{3+5x}$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^4+x^2+1}$ 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-3}$ 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x^2}{x^2+3x}$ 13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+5}-\dfrac{x^2}{x+2}\right)$ 14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^4}{x-2}}{x^2+7}$

15) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{3x-15}$ 16) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+x-12}$ 17) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$ 18) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x}{x^2-16}$ 19) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{6x^2-x-1}$

20) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x-6}{x^2-2x}$ 21) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{2+6x}{9x^3-x}$ 22) $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{x^2-21}{4x+12}-\dfrac{x}{x+3}\right)$ 23) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{x^2}{x-11}$

24) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$ 25) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+3}{x^2-2x}$ 26) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3}{25-x^2}$ 27) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x}$ 28) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$

29) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ 30) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+3x}{(x+3)^5}$ 31) $\lim\limits_{x\to1/4}\dfrac{16x^2-8x+1}{32x^2-2}$ 32) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2-9x+5}{x^3-3x+2}$

33) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^3+9x^2+27x+27}$ 34) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^4-x^2-2}$ 35) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{x^2+7x+1}{x^2+7x}$ 36) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{10x+15}{4x^3-9x}$

37) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x}{(x-8)^3}$ 38) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\pi-x}$ 39) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x}}{\frac{2x+3}{x^2}}$ 40) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(10x-19)^6}{x^6-x^3+21}$ 41) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+b}{cx^3+d}$

RISPOSTE

1) $\frac{3}{4}$ 2) 0^+ 3) $+\infty$ 4) -2 5) $+\infty$ 6) 0^- 7) 1 8) 0^+ 9) $-\infty$ 10) 0^- 11) $0\begin{pmatrix}0^+\ con\ x\to+\infty\\0^-\ con\ x\to-\infty\end{pmatrix}$

12) -1 13) -3 14) $-\infty$ 15) $\frac{10}{3}$ 16) $-\frac{2}{7}$ 17) -1 18) $\infty\begin{pmatrix}+\infty\ con\ x\to-4^+\\-\infty\ con\ x\to-4^-\end{pmatrix}$ *non era una F.I.!* 19) $\frac{4}{5}$ 20) $\frac{11}{2}$

21) 3 22) $-\frac{5}{2}$ 23) -100 *non era una F.I.!* 24) $\infty\begin{pmatrix}+\infty\ con\ x\to1^+\\-\infty\ con\ x\to1^-\end{pmatrix}$ *non era una F.I.!* 25) $\infty\begin{pmatrix}-\infty\ con\ x\to0^+\\+\infty\ con\ x\to0^-\end{pmatrix}$ *non era una F.I.!*

26) $\infty\begin{pmatrix}-\infty\ con\ x\to5^+\\+\infty\ con\ x\to5^-\end{pmatrix}$ 27) 0 28) $\frac{1}{2}$ 29) $\infty\begin{pmatrix}+\infty\ con\ x\to1^+\\-\infty\ con\ x\to1^-\end{pmatrix}$ 30) $-\infty$

31) 0 32) 2 33) $\infty\begin{pmatrix}-\infty\ con\ x\to-3^+\\+\infty\ con\ x\to-3^-\end{pmatrix}$ 34) $\frac{1}{3}$ 35) $\infty\begin{pmatrix}-\infty\ con\ x\to-7^+\\+\infty\ con\ x\to-7^-\end{pmatrix}$

36) $\frac{5}{9}$ 37) $\infty\begin{pmatrix}+\infty\ con\ x\to8^+\\-\infty\ con\ x\to8^-\end{pmatrix}$ 38) $\infty\begin{pmatrix}+\infty\ con\ x\to\pi^+\\-\infty\ con\ x\to\pi^-\end{pmatrix}$ 39) $\frac{5}{3}$ 40) $1.000.000$ 41) $\frac{a}{c}$

FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $[\infty-\infty]$

26) $\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}-\underbrace{\sqrt[4]{x}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\right)$

Abbiamo qui una F. I. $[(+\infty)-(+\infty)]$;

tuttavia, abbiamo fiducia che nel "conflitto" prevalga $\sqrt[3]{x}$ rispetto a $\sqrt[4]{x}$, perché la radice cubica, al tendere all'infinito del radicando, tende all'infinito più rapidamente rispetto alla radice quarta. Ci aspettiamo dunque che il limite valga $+\infty$.

Comunque, per maggiore sicurezza, possiamo procedere come abbiamo fatto nel caso dei polinomi, quando abbiamo raccolto *x* elevata all'esponente massimo:

essendo $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ e $\sqrt[4]{x}=x^{1/4}$, l'esponente massimo è 1/3 e raccoglieremo quindi $\sqrt[3]{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}-\underbrace{\sqrt[4]{x}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^4}}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\left(1-\sqrt[12]{\frac{x^3}{x^4}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\underbrace{\left(1-\underbrace{\sqrt[12]{\frac{1}{x}}}_{\substack{\downarrow\\0}}\right)}_{\substack{\downarrow\\1}}=+\infty$$

27) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{5\sqrt[7]{x^2}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}-\underbrace{2\sqrt[3]{x}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(5x^{\frac{2}{7}}-2x^{\frac{1}{3}}\right)\overset{\text{NOTA1}}{=}\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left(5\frac{x^{\frac{2}{7}}}{x^{\frac{1}{3}}}-2\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left(5x^{\frac{2}{7}-\frac{1}{3}}-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^{\frac{1}{3}}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\underbrace{\left(\underbrace{5x^{-\frac{1}{21}}}_{\substack{\downarrow\\0}}-2\right)}_{\substack{\downarrow\\-2}}=-\infty$$

NOTA 1
Qui siamo di fronte a un "polinomio con esponenti frazionari" e, siccome $2/7<1/3$, abbiamo fiducia che prevalga il termine $-2x^{1/3}$, trascinando il limite a $-\infty$. Comunque, per maggior sicurezza, procediamo raccogliendo *x* elevata all'esponente più alto.

28) $\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2-3x+2}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\underbrace{-4x}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\right)=+\infty$ Immediato: non si trattava di una Forma di Indecisione

29) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2-3x+2}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}-\underbrace{4x}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\right)\overset{\text{NOTA 2}}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-4x\right)\overset{\text{NOTA 3}}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-4x\right)\overset{\text{NOTA 4}}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-4x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\overbrace{x}^{\substack{+\infty\\\uparrow}}\overbrace{\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-4\right)}^{\substack{-3\\\uparrow}}=-\infty$$

NOTA 2: F.I. $[+\infty-(+\infty)]$

NOTA 3: Importantissimo ricordare che $\boxed{\sqrt{x^2y}=|x|\sqrt{y}}$.

L'uguaglianza senza il valore assoluto, ossia la $\sqrt{x^2y}=x\sqrt{y}$, sussiste soltanto quando si sa che è $x\ge0$ (o quando si vogliono considerare solo valori di *x* che siano ≥0);

invece l'uguaglianza $\sqrt{x^2y}=|x|\sqrt{y}$ è valida senza condizioni.

Noi, a dire il vero, nel passaggio successivo **scioglieremo** il valore assoluto, proprio per il fatto che, essendo $x\to+\infty$, nel nostro contesto è lecito supporre *x* positiva; tuttavia abbiamo preferito non saltare il passaggio col valore assoluto, che sarà fondamentale negli esercizi in cui $x\to-\infty$.

NOTA 4: Si può scrivere *x* al posto di $|x|$ perché, essendo $x\to+\infty$, possiamo supporre *x* positivo (= possiamo limitarci a considerare solamente i valori positivi di *x*).

$$30)\ \lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{\sqrt{x^2-3x+2}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}-\underbrace{x}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\Big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-x\right)\overset{\text{NOTA 4}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\overbrace{x}^{\substack{+\infty\\\uparrow}}\left(\overbrace{\underbrace{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}_{\substack{\downarrow\\1}}-1}^{\substack{0\\\uparrow}}\right)=[\infty\cdot 0]\quad \textit{Forma di Indecisione}!!!!$$

NOTA 4
Come già per il limite precedente, è $x\to+\infty$
quindi si può scrivere x
al posto di $|x|$

Contrariamente all'esercizio precedente, **la F.I. non si è sciolta**, ma si è invece trasformata in **un'altra F.I.**
Siamo costretti a **riprendere il limite daccapo, risolvendolo con una strategia diversa**.

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{\sqrt{x^2-3x+2}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}-\underbrace{x}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\Big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-3x+2}+x}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2-x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left.-3+\frac{2}{x}\right\}\to-3}{\left.\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right\}\to 2}=-\frac{3}{2}$$

Nell'esercizio seguente, *a*, *b* sono due costanti reali:

$$31)\ \lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx}}_{\substack{\downarrow\\-\infty}}\underbrace{-x}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\Big)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx}-x\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^3+ax^2+bx\right)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx}+x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+ax^2+bx\right)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+ax^2+bx-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3+ax^2+bx\right)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx}{\sqrt[3]{\left(x^3+ax^2+bx\right)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx}{\sqrt[3]{\left[x^3\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)\right]^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx}{\sqrt[3]{x^6\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx}{x^2\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)^2}+x^2\cdot\sqrt[3]{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left.\cancel{x^2}\left(a+\frac{b}{x}\right)\right\}\to a}{\left.\cancel{x^2}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+1\right]\right\}\to 3}=\frac{a}{3}$$

INDICAZIONE GENERALE SULLE FORME DI INDECISIONE FIN QUI VISTE

Lo ribadiamo, perché è davvero importante tenerlo sempre presente: in linea di principio,
le forme di indecisione $[\infty-\infty]$ e $[\infty/\infty]$
si affrontano "raccogliendo il termine di esponente maggiore
o, comunque, quello che tende a infinito più rapidamente",
mentre per le forme di indecisione $[0/0]$
"si va a cercare una semplificazione", attraverso fattorizzazioni, o razionalizzazioni,
o previa moltiplicazione di numeratore e denominatore per una stessa espressione.

Naturalmente, nella pratica si terrà sempre conto di **limiti noti già studiati in passato**.

Gli esempi successivi, oltre a quelli già visti, illustrano e confermano quanto detto.

FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

32) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}^{\uparrow\,+\infty}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}+1}_{\downarrow\,+\infty}}$ E' una F. I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Il numeratore può essere scritto come $x^{1/2}+x^{1/4}$ e quindi pensato come un "polinomio" di "grado" 1/2 (abbiamo usato le virgolette perché, dati gli esponenti frazionari, si dovrebbe piuttosto parlare di *pseudo*-polinomio, e *pseudo*-grado).
Il denominatore può essere scritto come $x^{2/3}+1$ e il suo "grado" è quindi 2/3.
Prevale il "grado" del denominatore e la frazione *DOVREBBE* perciò tendere a 0.
Per confermare questa nostra congettura, operiamo come con un rapporto di polinomi "classici", raccogliendo sia a numeratore che a denominatore x elevato all'esponente massimo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}^{\uparrow\,+\infty}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}+1}_{\downarrow\,+\infty}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \frac{1+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{x^3}{x^4}} \frac{1+\sqrt[4]{\frac{x}{x^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt[6]{\frac{1}{x}}}_{\downarrow\,0} \frac{\overbrace{1+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}^{\uparrow\,1}}{\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}_{\downarrow\,1}} = 0$$

33) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x-2}+8x}$

Possiamo fare un "pronostico" sul valore di questo limite ragionando come segue:
poiché $x\to+\infty$, nel radicale $\sqrt{9x^2+1}$ il termine +1 si fa irrilevante e si avrà $\sqrt{9x^2+1}\approx\sqrt{9x^2}=3x$
e così pure nel radicale $\sqrt{x^2+x}$ il contributo di x appare trascurabile rispetto al termine "caratterizzante" x^2, per cui sarà $\sqrt{x^2+x}\approx\sqrt{x^2}=x$. E allo stesso modo, a denominatore, $\sqrt{x^2-x-2}\approx\sqrt{x^2}=x$.

Pertanto IPOTIZZIAMO che risulti $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9x^2+1}}^{\approx 3x}+\overbrace{\sqrt{x^2+x}}^{\approx x}}{\underbrace{\sqrt{x^2-x-2}}_{\approx x}+8x} = \frac{4}{9}$

D'altra parte, un tal ragionamento non può pretendere di essere rigoroso: **necessita di una conferma formale**.
ATTENZIONE, INFATTI:
se ci fossimo fidati di congetture di questo tipo, di fronte al precedente esercizio $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$
avremmo potuto ritenere erroneamente che il limite fosse uguale a 0, mentre si è poi trovato che vale $-3/2$.
Procediamo pertanto per raccoglimenti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x^2+x}}^{\uparrow\,+\infty}}{\underbrace{\sqrt{x^2-x-2}+8x}_{\downarrow\,+\infty}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+8x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+8x} \overset{\text{NOTA 1}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+8x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+8\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}^{\uparrow\,\sqrt{9}=3}+\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}^{\uparrow\,1}}{\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}_{\downarrow\,1}+8} = \frac{4}{9}$$

NOTA 1 : $x\to+\infty$ per cui $|x|=x$

Vediamo ora come cambiano le cose se si prende la stessa frazione di prima
ma si fa tendere x a $-\infty$ anziché a $+\infty$:

$$34)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x-2}+8x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+8x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+8x}\overset{\text{NOTA 2}}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+8x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+8\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}^{-\sqrt{9}=-3}\overbrace{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}^{-1}}{\underbrace{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}_{-1}+8}=-\frac{4}{7}$$

NOTA 2: $x\to-\infty$ per cui $|x|=-x$

$$35)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{4x^2+5x}}^{+\infty}}{\underbrace{3x+2}_{+\infty}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{\cancel{x}\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{4+\frac{5}{x}}}^{\sqrt{4}=2}}{\underbrace{3+\frac{2}{x}}_{3}}=\frac{2}{3}$$

Il precedente esercizio avrebbe potuto anche essere svolto coi passaggi che seguono:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{\sqrt{(3x+2)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2+5x}{(3x+2)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2+5x}{9x^2+12x+4}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

$$36)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{3x+2}\overset{\text{NOTA 3}}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{-\sqrt{4+\frac{5}{x}}}^{-\sqrt{4}=-2}}{\underbrace{3+\frac{2}{x}}_{3}}=-\frac{2}{3}$$

NOTA 3:
Qui $x\to-\infty$,
perciò $x<0$
e $|x|=-x$

L'ultimo esercizio avrebbe potuto anche essere svolto coi passaggi seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2}\overset{\text{NOTA 4}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-|3x+2|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-\sqrt{|3x+2|^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-\sqrt{(3x+2)^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{4x^2+5x}{(3x+2)^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{4x^2+5x}{9x^2+12x+4}}=-\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{2}{3}$$

NOTA 4:

Poiché $x\to-\infty$, è $3x+2<0$; sarebbe dunque sbagliato, in questo contesto, scrivere $3x+2=\sqrt{(3x+2)^2}$!
Infatti tale uguaglianza avrebbe il primo membro negativo
e il secondo membro positivo in quanto risultato di un'estrazione di radice quadrata.
In pratica, solamente un'espressione positiva si può trasformare nella radice del suo quadrato:
per questo motivo, volendo portare l'espressione negativa $3x+2$ sotto radice,

scriveremo $3x+2=-|3x+2|=-\sqrt{|3x+2|^2}=-\sqrt{(3x+2)^2}$.

FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$

37) $$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x\sqrt{x}-1}^{\overset{0}{\uparrow}}}{\underbrace{x^2-1}_{\underset{0}{\downarrow}}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}\cdot\frac{x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x^2-1)(x\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\overbrace{(x^2+x+1)}^{\overset{3}{\uparrow}}}{\underbrace{(x+1)}_{\underset{2}{\downarrow}}\cancel{(x-1)}\underbrace{(x\sqrt{x}+1)}_{\underset{2}{\downarrow}}}=\frac{3}{4}$$

38) $$\lim_{x\to -1}\frac{\overbrace{\sqrt[3]{x}+1}^{\overset{0}{\uparrow}}}{\underbrace{x+1}_{\underset{0}{\downarrow}}}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{\underset{+1}{\downarrow}}\underbrace{-\sqrt[3]{x}}_{\underset{+1}{\downarrow}}+1}=\frac{1}{3}$$

ESERCIZI **(… non tutti portano a Forme di Indecisione …)**

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[5]{x}-\sqrt[4]{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[5]{3x}-\sqrt[4]{x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^3}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-3x\right)$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-3x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2\sqrt{x^2+x}-x\right)$

11) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+2x\right)$

12) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}+x\sqrt{7}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-\sqrt{3x^2+x}\right)$

16) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2-8x-7}-3x-2\right)$

17) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2-8x-7}-3x-2\right)$

18) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x+5}-2x\right)$

19) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-x\right)$

20) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-x\right)$

21) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)$

22) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)$

23) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5\sqrt[3]{x^3-x}-4x\right)$

24) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x+1\right)$

25) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-\frac{1}{10}x^2\right)$

26) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x-7}-\sqrt{4x+5}\right)$

27) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-9}\right)$

28) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)$

29) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}\right)$ $\begin{matrix}a>0\\c>0\end{matrix}$

30) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x-4}-\sqrt[3]{x+7}\right)$

31) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3}-x\right)$

32) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+5}$

33) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{5-4\sqrt[3]{x}}$

34) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x}+3}$

35) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

36) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

37) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-2\sqrt[5]{x}}$

38) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sqrt[4]{x+1}}{4\sqrt[4]{x}+5}$

39) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x+5}}{x+\sqrt[3]{3x-1}}$

40) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x+1}+\sqrt{4x-1}}{\sqrt{x}+2\sqrt{x-3}}$

41) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+5}}{\sqrt{4x^2-3x}}$

42) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x^2-3x}}$

43) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+3x}{\sqrt{16x^2-25}+\sqrt{9x^2+16}}$

44) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}+x}$

45) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}+x}$

46) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

47) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+7}{\sqrt{x^2+x+9}}$

48) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x-1}+3x}{\sqrt{x^2+x-2}-2x}$

49) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x}-x}{\sqrt{9x^2+1}}$

50) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}$

51) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2+x+4}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}$

52) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}}$

53) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}+x}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$

54) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

55) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

56) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$

57) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

58) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

59) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

60) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

61) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{x}$

62) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{x}$

RISPOSTE

1) $-\infty$ 2) $-\infty$ 3) $-\infty$ 4) $-\infty$ 5) $-\infty$ 6) $+\infty$ 7) $-\infty$ 8) $+\infty$

9) $\dfrac{1}{2}$ 10) $+\infty$ 11) $-\dfrac{5}{4}$ 12) $-\infty$ 13) 0 14) $-\dfrac{1}{2}$ 15) $+\infty$ 16) $-\dfrac{10}{3}$

17) $+\infty$ 18) $-\infty$ 19) 0 20) 0 21) $-\dfrac{1}{3}$ 22) $-\dfrac{1}{3}$ 23) $+\infty$ 24) $\dfrac{5}{3}$ 25) $-\infty$

26) $-\infty$ 27) 0 28) 0 29) $+\infty$ *se* $a>c$, $-\infty$ *se* $a<c$, 0 *se* $a=c$

30) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-4}-\sqrt[3]{x+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-4}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt{x-4}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-4}\cdot\left(1-\underbrace{\sqrt[6]{\frac{(x+7)^2}{(x-4)^3}}}_{\downarrow\atop 0}\right)=+\infty$$

31) $\dfrac{1}{4}$ 32) $\dfrac{3}{2}$ 33) $-\dfrac{1}{4}$ 34) 2 35) 1 36) 0 37) $+\infty$ 38) $\dfrac{3}{4}$ 39) 0 40) $\dfrac{5}{3}$

41) $\dfrac{3}{2}$ 42) $\dfrac{1}{2}$ 43) $-\dfrac{2}{7}$ 44) $\dfrac{1}{2}$ 45) $-\infty$ 46) 1 47) -1 48) -5 49) 0 50) 1 51) 0

52) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-3}}+\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x-3)^2}}}_{\downarrow\atop +\infty}+\underbrace{\sqrt[12]{\frac{(x-1)^3}{(x-3)^4}}}_{\downarrow\atop 0}\right)=+\infty$$

53) 0 54) $\dfrac{1}{2}$ 55) $\dfrac{1}{3}$ 56) $\dfrac{1}{4}$ 57) $+\infty$ 58) 0 59) $\sqrt{2}-1$ 60) 0 61) $-\infty$ 62) 1