

14 - LE SUCCESSIONI

I. COS'E' UNA "SUCCESSIONE"

La sequenza

$$a_0 = -1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad a_4 = \frac{3}{5} \quad \dots \quad a_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \dots$$

costituisce un esempio di SUCCESSIONE.

Ecco un altro esempio di successione:

$$a_1 = 3 \quad a_2 = \sqrt{3} \quad a_3 = \sqrt[3]{3} \quad a_4 = \sqrt[4]{3} \quad \dots \quad a_n = \sqrt[n]{3} \quad \dots$$

Una successione è dunque una sequenza infinita di numeri reali

(ma potrebbe trattarsi anche di oggetti di altra natura: vettori, funzioni, numeri complessi, figure geometriche...), ciascuno indicabile per mezzo di una lettera (noi nei nostri due esempi abbiamo scelto la lettera a)

munita di un indice, il quale indice potrà assumere i suoi valori

in \mathbb{N} (insieme dei numeri naturali), oppure in un sottoinsieme infinito di \mathbb{N} .

Nel seguente terzo esempio di successione, i termini sono numeri complessi:

$$z_1 = 1+i \quad z_2 = 1+2i \quad z_3 = 1+3i \quad \dots \quad z_n = 1+ni \quad \dots$$

E infine un quarto esempio. Questa volta ciascun termine della successione è una funzione:

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^3 \quad \dots \quad f_n(x) = x^n \quad \dots$$

Nel seguito ci occuperemo esclusivamente di successioni i cui termini siano numeri

(si parla di "successioni numeriche");

anzi, supporremo sempre che si tratti di numeri reali (come nei primi due esempi).

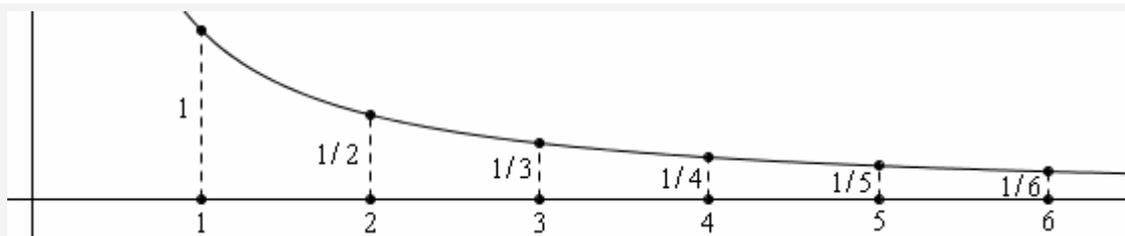
Inoltre, per semplicità, considereremo esclusivamente successioni definite su \mathbb{N} , oppure su \mathbb{N}^* (\mathbb{N} senza lo 0).

**Una successione può essere dunque interpretata come
UNA FUNZIONE AVENTE COME DOMINIO L'INSIEME \mathbb{N} DEI NUMERI NATURALI,
O UN SUO SOTTOINSIEME INFINITO D:
ad ogni numero naturale n del dominio corrisponde
uno ed un solo ben determinato "termine" (o "elemento") della successione,
per indicare il quale si può usare una lettera fissata dell'alfabeto, munita dell'indice n (es. a_n)**

Per visualizzare graficamente una successione, abbiamo sostanzialmente a disposizione due metodi.

Ognuno presenta vantaggi e svantaggi.

Li illustriamo nel seguente esempio, con riferimento alla successione di termine generale $a_n = \frac{1}{n}$:



Questo tipo di visualizzazione mette bene in evidenza il fatto che una successione è una funzione: a ogni numero naturale (in questo caso, non nullo) n , corrisponde uno e un solo ben determinato valore $a_n = 1/n$.

Il dominio della funzione è \mathbb{N}^* .

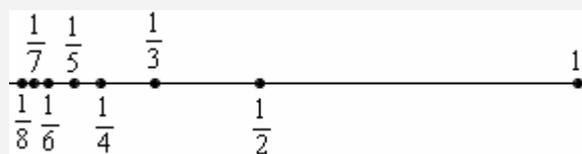
La differenza rispetto alle "normali" funzioni è che

in una successione non abbiamo una variabile **CONTINUA** x , ma una variabile **DISCRETA** n .

Emerge anche con efficacia che, al tendere di n all'infinito, il corrispondente termine a_n tende a 0.

Quest'altra visualizzazione mette bene in evidenza il fatto che i termini della successione costituiscono un insieme numerico:

$$\text{l'insieme } \left\{ a_n = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$



La figura mostra anche molto chiaramente che l'insieme $\{a_n\}$ ammette il punto 0 come punto di accumulazione non appartenente all'insieme).

II. PARTICOLARI, SEMPLICI SUCCESSIONI: LE PROGRESSIONI

A) PROGRESSIONI ARITMETICHE

Si dice “**progressione aritmetica**” una successione di numeri tali che la differenza fra ciascuno di essi e il precedente sia costante (quindi ciascun termine è ottenibile dal precedente addizionandogli una costante).

La **differenza costante** tra ogni termine di una progressione aritmetica e il precedente si dice “**ragione**” della progressione (indicheremo la ragione col simbolo d , dall’iniziale di “differenza”).

ESEMPI

La successione 2, 7, 12, 17, 22, 27, ... è una progressione aritmetica di ragione $d = 5$.

La successione $1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \dots$ è una progressione aritmetica di ragione $d = -\frac{1}{2}$.

Data una progressione aritmetica $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ di ragione d , è facilissimo verificare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{array}{l} a_k - a_{k-1} = d \text{ (per definizione)} \\ a_k = a_{k-1} + d \\ a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_r = a_s + (r-s)d \end{array}$$

Se di una progressione aritmetica consideriamo soltanto un numero finito di termini consecutivi (ad esempio, soltanto i primi n termini), parleremo di **progressione aritmetica finita**.

Sussiste il seguente

TEOREMA

La somma dei termini di una progressione aritmetica finita è uguale alla semisomma dei termini estremi moltiplicata per il numero dei termini:

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \\ a_k + a_{k+1} + \dots + a_n = \frac{a_k + a_n}{2} \cdot (n - k + 1) \end{array}$$

Dimostrazione

La tecnica dimostrativa è perfettamente analoga a quella seguita per ricavare

la “Formula di Gauss” per la somma degli interi da 1 a n : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dunque:

$$\begin{array}{r} S = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ S = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 \\ \hline 2S = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) \end{array}$$

dove risulta $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ per il fatto che $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$ e così per tutte le altre coppie di termini in colonna: $a_k + a_{n-k} = \dots = a_1 + a_n$

Se ora consideriamo che $2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ addendi}} = n(a_1 + a_n)$

avremo $\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$ C.V.D.

ESERCIZI di applicazione del teorema

Verificare che

- 1) la somma dei primi n numeri dispari: $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$ è uguale a n^2
- 2) la somma dei primi n numeri pari: $2, 4, 6, 8, \dots, 2n$ è uguale a $n(n+1)$

B) PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Si dice “**progressione geometrica**” una successione di numeri tali che il rapporto fra ciascuno di essi e il precedente sia costante (quindi ciascun termine è ottenibile dal precedente moltiplicandolo per una costante).

Il rapporto costante tra ogni termine (escludendo, ovviamente, il primo) e il precedente si dice “**ragione**” della progressione: lo indicheremo col simbolo q .

ESEMPI

La successione 2, 10, 50, 250, 1250, 6250, ... è una progressione geometrica di ragione $q = 5$.

La successione $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$ è una progressione geometrica di ragione $q = -\frac{1}{2}$.

Se la ragione q vale 1 i termini sono tutti uguali; escluderemo perciò questo caso, privo di interesse. Se la ragione è positiva tutti i termini sono dello stesso segno; se è negativa, i termini hanno segno alterno. Noi supporremo sempre, per semplicità, che la ragione q sia positiva e che tutti i termini siano positivi; ciò che diremo potrà essere in qualche modo poi “adattato” al caso in cui i termini abbiano segno alterno, ma adattamenti di questo genere saranno lasciati al lettore.

Data una progressione geometrica $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ di ragione q , è facilissimo verificare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \text{ (per definizione)} \rightarrow a_k = a_{k-1} \cdot q$$

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

e, più in generale, $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

Se di una progressione geometrica consideriamo soltanto un numero finito di termini consecutivi (ad esempio, soltanto i primi n termini), parleremo di **progressione geometrica finita**.

- **Determiniamo ora il valore della somma dei termini di una progressione geometrica finita.**

Cominciamo con l'osservare che

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

quindi il problema si riconduce a quello del calcolo della somma $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

Come si può facilmente verificare, vale la formula di scomposizione

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

e tale formula è vera per tutti gli $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ (NOTA)

NOTA:

Avevamo scritto che, con n pari, quando il nostro obiettivo è di scomporre “ad oltranza” il binomio $a^n - b^n$, l'applicazione della formula è poco conveniente,

ed è consigliabile piuttosto iniziare con una “scomposizione come differenza di quadrati”.

Ma non è una scomposizione “ad oltranza” che ci interessa in questo momento.

Ora, applicando la formula con $a = 1$ e $b = q$, avremo:

$$1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

da cui

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

In definitiva, la somma dei termini di una progressione geometrica finita di ragione q (oppure: **la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q**) è

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ESERCIZIO

Verifica che il prodotto P dei termini di una progressione geometrica finita $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

vale $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

III. SUCCESIONI MONOTONE (CRESCENTI O DECRESCENTI); LIMITE DI UNA SUCCESIONE

• SUCCESIONI CRESCENTI E DECRESCENTI

Una successione $\{a_n\}$ si dice crescente (risp.: decrescente) se, per ogni $k \in \mathbb{N}$ (o, eventualmente, \mathbb{N}^*) è
 $a_k < a_{k+1}$ (risp.: $a_k > a_{k+1}$).

Se al posto di $<$, $>$ scriviamo \leq , \geq otteniamo le def. di successione crescente (decrescente) “in senso lato”.

Ad esempio, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente (in senso stretto).

• Successioni limitate e illimitate; estremo superiore e inferiore di una successione; eventuale massimo e minimo di una successione

Tutti questi termini vanno riferiti all'insieme numerico costituito dai termini della successione considerata.

Ad esempio, la successione $\left\{a_n = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ è limitata sia inferiormente

(il suo estremo inferiore è 0) che superiormente (il suo estremo superiore, che ne è anche il massimo, è 1).

Invece la successione $\left\{a_n = n^2, \text{ con } n \in \mathbb{N}\right\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$ è limitata inferiormente,

con estremo inferiore 0 che ne è anche il minimo, ma è illimitata superiormente (l'estremo superiore è $+\infty$).

• LIMITE DI UNA SUCCESIONE

Una successione, come abbiamo visto, può essere pensata come una particolare funzione:

una funzione il cui dominio sia \mathbb{N} o un suo sottoinsieme infinito

(noi prenderemo sempre come dominio \mathbb{N} oppure \mathbb{N}^*).

Spesso interessa chiedersi a quale valore tende a_n quando n diventa “molto grande”, “tende all'infinito”.

Ad esempio, è del tutto spontaneo affermare che

la successione $\left\{a_n = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ tende a 0 al tendere di n a $+\infty$

mentre la successione $\left\{a_n = \frac{n+1}{n+2}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right\}$ tende a 1 quando $n \rightarrow +\infty$.

Prima di tutto, osserviamo che il tendere a $+\infty$ di n (variabile “discreta”)

è, sotto un certo aspetto, diverso dal tendere a $+\infty$ di una variabile “continua” x ;

la variabile discreta assume solo CERTI valori, crescendo “a scatti”, “a salti”,

mentre una variabile continua cresce assumendo TUTTI i valori intermedi.

Per il resto, però, *nulla cambia nell'idea di base* che ci conduce alla nozione di limite:

abbiamo una variabile indipendente n (discreta anziché continua),

a cui facciamo assumere valori arbitrariamente alti,

e ci chiediamo che valore tende ad assumere il corrispondente termine a_n della successione.

La definizione precisa di “limite di una successione a_n quando n tende a $+\infty$ ” dovrà essere,

quindi, *perfettamente analoga* a quella di “limite di una funzione $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ ”.

Occorrerà soltanto qualche piccolo adattamento.

Aggiungiamo una banalissima osservazione:

nel caso di una variabile discreta n , i cui valori possono essere soltanto numeri naturali,

sarebbe assurdo pensare di far tendere n a $-\infty$, oppure ad un valore finito: questo è ben ovvio!

Quindi, evidentemente, le uniche definizioni che ci interesseranno saranno quelle di

“limite (finito o infinito) di una successione, quando n tende a $+\infty$ ”.

E per brevità, non essendo possibili equivoci, al posto di $+\infty$ scriveremo semplicemente ∞ .

$$\begin{array}{ll} \text{DE} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon) \\ \text{FI} & \\ \text{NI} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M) \\ \text{ZIO} & \\ \text{NI} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n > \bar{n} \Rightarrow a_n < -M) \end{array}$$

Una successione si dice:

- **CONVERGENTE** se tende ad un limite finito,
- **DIVERGENTE** se tende a infinito,
- **INDETERMINATA** se non tende ad alcun limite.

Esempio: verificare, applicando la definizione, che la successione $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ tende a 1 per $n \rightarrow \infty$.

Impostiamo la disequazione $\left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon$

con l'obiettivo di mostrare che esiste un numero naturale \bar{n} tale che essa sia verificata per tutti gli $n > \bar{n}$.

$$\left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon; \quad \left| \frac{n+1-n-2}{n+2} \right| < \varepsilon; \quad \left| -\frac{1}{n+2} \right| < \varepsilon \quad \frac{1}{n+2} < \varepsilon; \quad n+2 > \frac{1}{\varepsilon}; \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

Pertanto la verifica richiesta è positivamente conclusa:

si può prendere come \bar{n} un qualsiasi intero fra quelli non inferiori al numero $\frac{1}{\varepsilon} - 2$.

TEOREMI SUI LIMITI DI SUCCESSIONI

Estendono la loro validità alle successioni, purché si apportino lievi ed ovvie modifiche agli enunciati, i teoremi validi per i limiti delle funzioni. Citiamo in particolare:

- **Teorema di unicità del limite:**

Se una successione, per $n \rightarrow \infty$, tende ad un limite (finito o infinito), questo limite è unico

- **Teorema della permanenza del segno:**

Se una successione a_n , per $n \rightarrow \infty$, tende ad un limite (finito o infinito) diverso da 0, allora esiste un indice \bar{n} tale che, $\forall n > \bar{n}$, il termine a_n mantiene lo stesso segno del limite

- **Teoremi del confronto**

Se esiste un indice \bar{n} tale che, $\forall n > \bar{n}$, si ha $a_n \leq c_n \leq b_n$, e inoltre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$,

allora è anche $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$

... ed enunciati analoghi agli altri due teoremi del confronto dimostrati per le funzioni

- **Teorema sull'esistenza del limite delle successioni monotone:**

Se una successione a_n è monotona (crescente o decrescente), in senso stretto o in senso lato, allora esiste certamente il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$,

e tale limite è uguale all'estremo superiore (se la succ. è crescente) o inferiore (se la succ. è decrescente) dell'insieme numerico $\{a_n\}$.

- **I teoremi sul limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente**

Per inciso, date due succ. a_n e b_n , per loro "somma" si intende la succ. di termine generale $c_n = a_n + b_n$. Analogamente per la differenza, il prodotto e il quoziente.

- **I teoremi sintetizzati da "pseudo-uguaglianze" (es. $1/\infty = 0 \dots$).**

- **Anche per le successioni valgono le stesse "forme di indecisione" già riscontrate per le funzioni.**

□ **E' ESTREMAMENTE UTILE il seguente TEOREMA, che permette di estendere, in un sol colpo, alle successioni, un mucchio di risultati già acquisiti per le funzioni:**

«Data una successione a_n , e presa una funzione $f(x)$

tale che i suoi valori quando x è intero positivo coincidano con quelli della successione,

ossia: tale che si abbia $f(n) = a_n$,

allora, se esiste il $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, sarà anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ »

OSSERVAZIONE

Il teorema vale anche se l'uguaglianza $f(n) = a_n$ vale soltanto "da un certo indice in poi"!

Esempio di applicazione - Determinare il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{n^3 + 1}$.

Si tratta di una F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, ma, considerata la funzione $y = \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 1}$ la quale,

per valori interi positivi di x , assume gli stessi valori della successione data,

poiché si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 1} = 0$, sarà pure $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{n^3 + 1} = 0$.