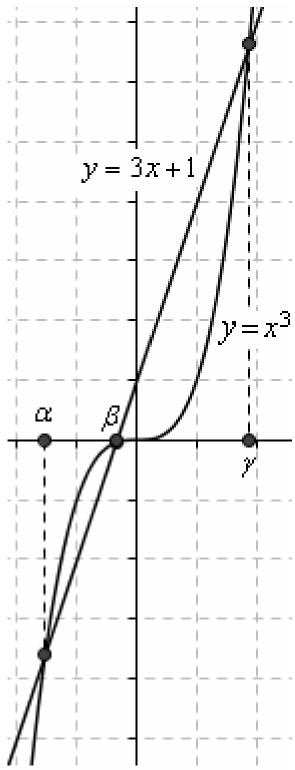
13 - APPROSSIMAZIONE DELLE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE COL METODO DI BISEZIONE

Per descrivere questo bellissimo metodo, partiamo da un esempio.
Sia data l'equazione

$$\underbrace{x^3-3x-1}_{f(x)}=0$$

Innanzitutto, localizziamo approssimativamente le radici (NOTA) col "metodo grafico".

*NOTA: quando si parla di un'equazione, la parola "**radici**" è sinonimo di "**soluzioni**"*



L'obiettivo è di "*separare*" le radici,
ossia di determinare, *per ciascuna* radice,
un *intervallo* che contenga *quella* radice e nessun'altra.
Per fare il grafico, sarà conveniente, nel nostro caso,
trasportare qualche termine a secondo membro,
in modo da aver a che fare con funzioni il più possibile facili da disegnare:

$$\underbrace{x^3}_{f_1(x)}=\underbrace{3x+1}_{f_2(x)}$$

Vediamo così (figura qui a fianco) che l'equazione assegnata ha 3 radici:

$$\boxed{-2<\alpha<-1},\quad \boxed{-1<\beta<0},\quad \boxed{1<\gamma<2}\,.$$

Consideriamo ora una radice, ad esempio γ, e l'intervallo in cui è stata "separata":

$$[a,\,b]=[1,\,2]\,.$$

Per la risoluzione grafica, abbiamo portato l'equazione sotto la forma

$$f_1(x)=f_2(x)$$

ma ora dobbiamo tornare a pensare alla forma iniziale

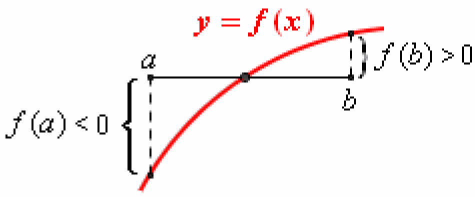
$$f(x)=0 \quad \text{ossia} \quad f_1(x)-f_2(x)=0$$

Della funzione $f(x)=x^3-3x-1$ noi *non* abbiamo tracciato il grafico;
tuttavia, il fatto che le due funzioni $f_1(x),\ f_2(x)$
si sono "scavalcate" nell'intervallo $[a,b]=[1,\,2]$
ci dice che la loro differenza $f_1(x)-f_2(x)=f(x)$
passa, al variare di x da $a=1$ fino a $b=2$,
dalla positività alla negatività o viceversa.

In effetti, se calcoliamo $f(a)$ e $f(b)$, troviamo valori discordi:

$$f(a)=f(1)=\left[x^3-3x-1\right]_{x=1}=1-3-1=-3<0$$

$$f(b)=f(2)=\left[x^3-3x-1\right]_{x=2}=8-6-1=1>0$$



La situazione è perciò quella della figura qui a fianco →

E risolvere l'equazione $f(x)=0$ equivale a chiedersi in quale ascissa avviene l'attraversamento dell'asse orizzontale, da parte del grafico della $f(x)$.

Cominciamo a chiederci se questo attraversamento dell'asse orizzontale avviene nella *metà sinistra* dell'intervallo, oppure nella *metà destra*.

A questo scopo, troviamo il punto di mezzo dell'intervallo:

$$m=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1.5$$

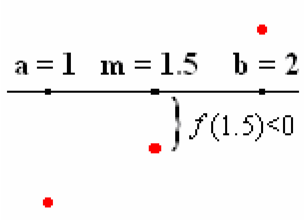
e calcoliamo $f(m)$ ossia $f(1.5)$.

Avremo $\quad f(m)=f(1.5)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\frac{3}{2}-1=\frac{27}{8}-\frac{9}{2}-1=\frac{27-36-8}{8}=-\frac{17}{8}$

Ora, essendo $-\frac{17}{8}<0$,

la situazione sarà quella illustrata dalla figura qui a destra:
poiché $f(m)$ è **concorde** con $f(a)$,
il grafico della $f(x)$ attraverserà l'asse orizzontale
NON nell'intervallo $[a, m]$ bensì nell'ALTRO intervallo $[m, b]$.
Insomma, semplicemente confrontando il segno di $f(m)$ con quello di $f(a)$,
abbiamo stabilito che la soluzione cercata deve trovarsi nell'intervallo

$$[m, b]=[1.5; 2].$$



Schematizzando: **dal "vecchio" intervallo $[a, b]$ si passa al NUOVO intervallo**

$$\begin{cases} [a, m] \text{ se } f(m) \text{ è DISCORDE con } f(a)\text{, cioè se } f(m)\cdot f(a)<0 \\ [m, b] \text{ se } f(m) \text{ è CONCORDE con } f(a)\text{, cioè se } f(m)\cdot f(a)>0 \end{cases}$$

Ora iteriamo (= ripetiamo) il procedimento su questo nuovo intervallo …
… il nuovo intervallo prende il posto del vecchio!

Otterremo così, per **dimezzamenti successivi** (= bisezioni) dell'intervallo iniziale,
nuovi intervalli sempre più piccoli i cui estremi forniranno un'approssimazione per difetto e una per eccesso, della soluzione cercata, via via sempre più precise.
Eccezionalmente (rarissimo), se dovesse capitare di trovare $f(m)=0$,
ci imbatteremmo proprio nella soluzione esatta.

Esercizio 41)
Scriviamo un programma Pascal per risolvere, col metodo di bisezione, l'equazione P(x)=0, essendo P(x) un polinomio di grado non superiore a 5:

$$\mathbf{P(x)=c_0x^5+c_1x^4+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5}.$$

Innanzitutto stabiliremo, col metodo grafico, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$c_0x^5+c_1x^4+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5=0$$

e le localizzeremo approssimativamente.

Dopodiché, individuato un intervallo [a, b] in cui siamo sicuri che cada una e una sola soluzione della nostra equazione, affideremo ad un programma Pascal il compito di approssimare tale soluzione con la precisione da noi desiderata (ad esempio, a meno di 0.0001), applicando, appunto, il metodo di bisezione (= dimezzamenti successivi dell'intervallo in cui è localizzata la soluzione).

Il programma dovrà:

I) LEGGERE in input
- i 6 coefficienti c0, c1, c2, c3, c4, c5 del polinomio $P(x)=c_0x^5+c_1x^4+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5$
- gli estremi a, b dell'intervallo in cui l'utente ha "separato" una e una sola radice (= soluzione) dell'equazione $c_0x^5+c_1x^4+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5=0$
- e la precisione p con la quale l'utente desidera sia approssimata la soluzione in questione

II) CALCOLARE m = (a+b)/2 e poi SOSTITUIRE l'intervallo [a, b]
- ♪ con l'intervallo [a, m] se P(m) è discorde rispetto a P(a): P(m)*P(a)<0
- ♫ con l'intervallo [m, b] in caso contrario;

III) ITERARE il procedimento (calcolo di m = (a+b)/2 e sostituzione di [a, b] con [a, m] oppure [m, b])
FINO A QUANDO
- ci si imbatta nella soluzione esatta (caso rarissimo)
- OPPURE l'intervallo sia diventato tale che la sua ampiezza sia minore o uguale a p.

IV) Nel primo (eccezionale) caso, l'output dovrà essere

LA SOLUZIONE CERCATA E' …

mentre nel secondo caso dovrà essere

LA SOLUZIONE CERCATA E' COMPRESA FRA …

Beh, ho detto "scriviamo" … ma il programmatore sei tu.
Buon lavoro!!!