4.4 - Esempi svolti (sulla definizione di Laplace)

C'è la risoluzione commentata di ciascun problema appena sotto il testo,
♪ *ma se tu la coprissi …*
♫ *… e ci provassi innanzitutto per conto tuo …*
… COME SAREBBE UTILE!!!

- **Esempio 1**
  Che probabilità c'è, estraendo una carta da un mazzo da scopa, che si tratti
  a) del "settebello" (= il 7 di quadri)?
  b) di un "7"?
  c) di una carta di "denari" (= di quadri)?
  d) di una figura rossa?
  e) di una carta dal "2" al "6"?

Risoluzione
Casi possibili = 40; sono evidentemente tutti "equipossibili".
a) 1 solo caso favorevole; $p = 1/40$ b) 4 casi favorevoli; $p = 4/40 = 1/10$ c) 10 casi fav.; $p = 10/40 = 1/4$
d) 6 casi favorevoli; $p = 6/40 = 0{,}15 = 15\%$ e) 20 casi favorevoli; $p = 20/40 = 1/2 = 0{,}5 = 50\%$

- **Esempio 2**
  Si sceglie a caso una pagina di un libro.
  Che probabilità c'è che la prima vocale che si incontra leggendo sia la "e"?

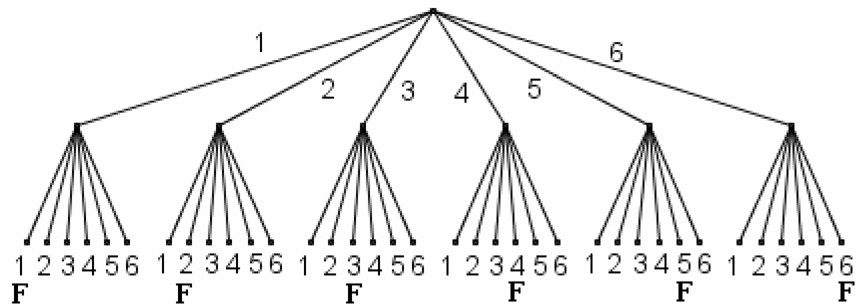
Risoluzione
Sarebbe ingenuo, ed errato, rispondere "1/5". I casi "a", "e", "i", "o", "u" NON sono infatti equipossibili, data la diversa frequenza con cui le varie vocali compaiono nel linguaggio.
La domanda resta senza risposta, a meno di effettuare una ricerca statistica che ci porterebbe sul terreno della "probabilità a posteriori".

- **Esempio 3**
  Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi?

Risoluzione
Posto $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
l'**insieme dei casi possibili** sarà il prodotto cartesiano $D \times D$
(= l'insieme delle coppie ordinate aventi come primo elemento un elemento preso da D e come secondo elemento ancora un elemento preso da D)
e avrà perciò 36 elementi;
i **casi favorevoli** sono 6 e cioè (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6).
Quindi: $p(\text{stesso numero sui due dadi}) = 6/36 = 1/6$.

	1	2	3	4	5	6
1	F	●	●	●	●	●
2	●	F	●	●	●	●
3	●	●	F	●	●	●
4	●	●	●	F	●	●
5	●	●	●	●	F	●
6	●	●	●	●	●	F

Osserviamo che l'insieme universo si può rappresentare molto bene, in questo problema, con una tabella a doppia entrata (qui a destra) oppure con un grafo (qui sotto):



- **Esempio 4**
  Che probabilità c'è, avendo a disposizione due mazzi da scopa,
  se si estrae una carta da ciascuno di essi, di pescare due figure?

Risoluzione
Casi possibili = $40 \cdot 40 = 1600$ (esempio: il K di Cuori dal 1° mazzo e il 5 di Fiori dal 2° …);
casi favorevoli $12 \cdot 12 = 144$. $p = 144/1600 = 9/100 = 0{,}09$.
Nozioni appena un po' più avanzate di CdP permetterebbero di procedere ancora più semplicemente.

- **Esempio 5**
  Prima di lanciare una coppia di dadi, dei bambini scommettono sulla somma dei punteggi che si otterranno. Fermo restando che i piccoli dovrebbero avere altri giochi, altrimenti si ritroveranno a vent'anni stanchi di vivere e pieni di debiti, qual è il risultato più probabile di una prova aleatoria come questa?

Risoluzione
La somma minima che si può ottenere è 2:
essa si ottiene in 1 solo caso, quando esce 1 sia sul dado "blu" che sul dado "rosso".
Invece, ad esempio, la somma 3 si può ottenere in 2 modi: (1, 2) e (2, 1).
L'uso delle parentesi tonde nel prospetto sottostante **indica che pensiamo la coppia come *ordinata***:
il primo numero esprime l'esito sul dado "blu", il secondo sul dado "rosso". Complessivamente:

2 (1,1) $p(2)=1/36$
3 (1,2) (2,1) $p(3)=2/36$
4 (1,3) (3,1) (2,2) $p(4)=3/36$
5 (1,4) (4,1) (2,3) (3,2) $p(5)=4/36$
6 (1,5) (5,1) (2,4) (4,2) (3,3) $p(6)=5/36$
7 (1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3) $\boldsymbol{p(7)=6/36}$
8 (2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4) $p(8)=5/36$
9 (3,6) (6,3) (4,5) (5,4) $p(9)=4/36$
10 (4,6) (6,4) (5,5) $p(10)=3/36$
11 (5,6) (6,5) $p(11)=2/36$
12 (6,6) $p(12)=1/36$

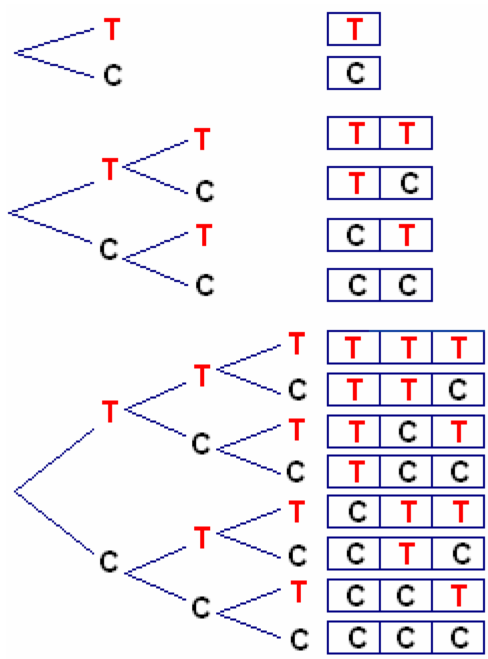
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La somma che si può ottenere in più modi è 7 (6 modi). La sua probabilità è $p(7)=6/36=1/6$

- **Esempio 6**
  Lanciando successivamente per 10 volte una moneta, stabilire che probabilità c'è di ottenere:
  a) tutte Teste   b) Testa le prime 4 volte, Croce le rimanenti

Risoluzione
Per entrambi i quesiti, i casi possibili sono tanti quante le sequenze di 10 simboli, ciascuno dei quali può valere T o C; ad esempio, un caso possibile è TTTCCTCTTC.
Perciò abbiamo $2^{10}=1024$ casi possibili.
Pensando ad un diagramma ad albero si capisce bene per qual motivo il numero di casi possibili è 1024.

Avendo a disposizione 10 caselle con la possibilità di riempire ciascuna casella o con "T" o con "C", quante sequenze fra loro distinte è possibile scrivere? Ecco qui davanti a me la sequenza delle 10 caselle da riempire:



Per la prima casella, ho evidentemente due possibilità: **T** o **C**.
Comunque io abbia scelto di riempire la 1ª casella, per la 2ª mi si apre un ventaglio di 2 possibilità: **T** o **C**.
Le possibilità, per quanto riguarda le **prime 2 caselle**, sono espresse dal diagramma ad albero qui a destra:
$4=2^2$ possibilità (TT, TC, CT, CC)
Comunque io abbia scelto il contenuto delle prime 2 caselle, per riempire la 3ª mi si apre ancora un ventaglio di 2 possibilità.
Le possibilità, per quanto riguarda le **prime 3 caselle**, sono espresse dal diagramma ad albero qui a destra:
$8=2^3$ possibilità
(TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC)

Ogni volta che penso a una casella in più, il numero di modi in cui è possibile riempire la sequenza di caselle considerate **raddoppia** per via del ventaglio di 2 possibilità che si apre !!!

A questo punto, è evidente che: **10 caselle $\rightarrow 2^{10}=1024$ possibilità**.

a) Il caso favorevole è 1 solo: TTTTTTTTTT. La probabilità richiesta è $p(\text{tutte T}) = 1/1024 = 0{,}0009765$
b) Il caso favorevole è 1 solo: TTTTCCCCCC. La probabilità richiesta è $p(\text{TTTTCCCCCC}) = 1/1024$.

- **Esempio 7**

Avevo in tasca 5 monete, 2 da 1 euro e 3 da 2 euro. Pesco dalla tasca, prendendo le prime 2 che mi capitano fra le dita. Calcola la probabilità che queste formino un totale di
a) 4 euro b) 2 euro c) 1 euro

Risoluzione

Possiamo schematizzare così: $\begin{array}{ccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 \\ 1\ \mathit{euro} & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}$

Per tutti e tre i quesiti l'insieme dei casi possibili è
(**notare l'uso delle parentesi graffe e non tonde intorno a ogni coppia, per indicare che la coppia viene qui pensata senza che abbia importanza l'ordine dei due elementi**):

$$\begin{array}{l} \{\ \{M_1, M_2\};\ \{M_1, M_3\};\ \{M_1, M_4\};\ \{M_1, M_5\}; \\ \quad \{M_2, M_3\};\ \{M_2, M_4\};\ \{M_2, M_5\}; \\ \quad \{M_3, M_4\};\ \{M_3, M_5\}; \\ \quad \{M_4, M_5\}\ \ \} \end{array}$$

Possiamo valutare tutti e 10 questi casi come *equi*possibili: non c'è ragione per l'ipotesi contraria.
Ora, considerando le somme dei valori delle coppie di monete, avremo

$$\begin{array}{ll} \{M_1, M_2\} & 2\ \mathit{euro} \\ \{M_1, M_3\} & 3\ \mathit{euro} \\ \{M_1, M_4\} & 3\ \mathit{euro} \\ \{M_1, M_5\} & 3\ \mathit{euro} \\ \{M_2, M_3\} & 3\ \mathit{euro} \\ \{M_2, M_4\} & 3\ \mathit{euro} \\ \{M_2, M_5\} & 3\ \mathit{euro} \\ \{M_3, M_4\} & 4\ \mathit{euro} \\ \{M_3, M_5\} & 4\ \mathit{euro} \\ \{M_4, M_5\} & 4\ \mathit{euro} \end{array}$$

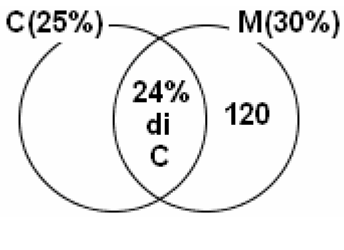
Avremo dunque: $a)\ \ p = \frac{3}{10} \qquad b)\ \ p = \frac{1}{10} \qquad c)\ \ p = 0\ \ (\mathit{evento\ impossibile})$

- **Esempio 8**

In una scuola, il 25% degli studenti segue un corso di Computer e il 30% un corso di Musica.
Il 24% dei partecipanti a Computer fa anche Musica; in 120 fanno Musica, ma non Computer.
a) Preso a caso uno studente, che probabilità c'è che faccia Computer ma non Musica?
b) Preso a caso uno studente che faccia Musica, che probabilità c'è che frequenti anche Computer?

Risoluzione

Converrà innanzitutto rappresentare la situazione con un diagramma di Venn:

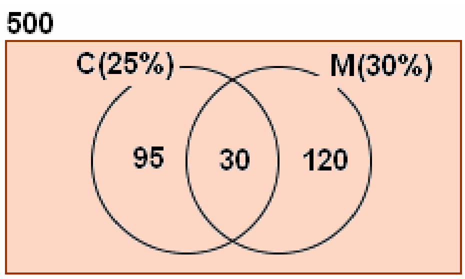


$$C \cap M:\ \ \frac{24}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{6}{100}$$

quindi coloro che fanno sia Computer che Musica sono il 6% del totale e dunque sono la 5^a parte di quelli che fanno Musica (30% del totale).
Perciò quei 120 in $M - C$ saranno i 4/5 degli elementi di M: da cui

$$\frac{4}{5} M = 120 \ \rightarrow\ M = 150$$

(osserviamo che, in modo disinvolto ma efficace dal punto di vista "pratico", stiamo usando una stessa lettera per indicare tanto un *insieme* quanto il *numero dei suoi elementi*)



Allora possiamo con semplici passaggi determinare il numero di studenti che stanno nei vari insiemi, compreso il numero totale di studenti della scuola, che risulta essere di 500.

Per dar risposta ai due quesiti basta osservare il diagramma:

a) $p = \frac{95}{500} = \frac{19}{100} = 19\%$ b) $p = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$