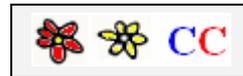


5 - PROBABILITA' E CALCOLO COMBINATORIO



5.1 - Applicazioni del Calcolo Combinatorio al Calcolo delle Probabilità

- **Esempio 9**
Lanciando per 10 volte di seguito una moneta, che probabilità c'è di ottenere esattamente 4 Teste?

Risoluzione

I casi possibili sono $2^{10} = 1024$ (è evidente che sono tutti equipossibili).

I casi favorevoli sono tanti quante le sequenze di 10 simboli, ciascuno dei quali possa essere T o C, contenenti esattamente 4 T. Per determinare il numero di tali sequenze, possiamo pensare al numero di modi in cui, in uno schema come il seguente, costituito da una successione di 10 caselle vuote:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

, noi possiamo scegliere quelle 4 nelle quali collocare T.

Tale scelta può essere effettuata in $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ modi possibili.

La probabilità richiesta è perciò p ("esattamente 4 T") = $\frac{\binom{10}{4}}{1024} = 0,205\dots$

ESERCIZI (con applicazione del Calcolo Combinatorio)

- 1) Da un mazzo da scopa (40 carte) se ne pescano 4.
Determina la probabilità che fra di esse ci sia il "settebello" (7 di denari, ossia di quadri).
- 2) In un cassetto ci sono 4 fazzoletti bianchi e 3 scozzesi.
Qual è la probabilità, pescandone 2 a caso, che siano dello stesso colore?
- 3) In un'urna ci sono 2 palline Bianche, 2 Rosse e 2 Nere.
Qual è la probabilità, estraendone 3, che siano tutte di colori diversi?
- 4) Sul bancone del bar sono rimaste 10 brioches esternamente identiche, ma una di esse ha il cioccolato dentro, l'unico ripieno che non mi piace.
Prese 3 brioches a caso, che probabilità c'è che fra di esse ci sia quella che non mi garba?
- 5) Avevo in tasca 20 monete, 10 da 2 euro e 10 da 1 euro. Se tirando fuori il fazzoletto me ne son cadute 5, calcola la probabilità che le monete per terra siano tutte dello stesso valore.
- 6) Calcola la probabilità che lanciando simultaneamente 10 monete escano:
 - a) tutte "Croci" b) almeno una "Testa" c) esattamente una "Testa" d) tante "teste" quante "croci"
- 7) I 10 articoli di una vetrina hanno tutti prezzi diversi.
Che probabilità ho, scegliendone 3 a caso, che siano i 3 più a buon mercato?
- 8) In un'aula per una classe di 20 studenti, 15 maschi e 5 femmine, c'è un banco triplo.
Se i posti vengono sorteggiati, che probabilità c'è che nel banco triplo vadano a finire tre femmine?
- 9) In una delle versioni più comuni del gioco della scopa, dopo aver mischiato il mazzo di 40 carte e servito 9 carte a ciascuno dei 4 giocatori, le ultime 4 carte vengono rovesciate sul tavolo. Calcolare la probabilità che
 - a) queste carte siano tutte figure b) nessuna di queste carte sia una figura
 - c) almeno una di queste carte sia una figura d) queste 4 carte siano tutte di "quadri"
 - e) fra queste 4 carte ci sia l' "Asso bello" (=asso di quadri)
 - f) fra queste 4 carte ci siano l' "Asso bello" (=asso di quadri) e il "Settebello" (7 di quadri)
 - g) fra queste 4 carte ci siano esattamente 2 assi (INDICAZIONE: immagina di scegliere 2 fra i 4 assi; in quanti modi puoi effettuare questa scelta? Poi ti si apre un ventaglio di possibilità per le 2 carte da scegliere, fra i 36 non-assi, per completare la quaterna ... quante possibilità hai? Quindi ...)
 - h) fra queste 4 carte ci siano esattamente 3 assi
 - i) queste 4 carte siano una di "Cuori", una di "Quadri", una di "Fiori" e una di "Picche"
 - j) queste 4 carte siano 2 assi e due Figure
 - k) queste 4 carte siano tutte di valore diverso
 - l) fra queste 4 carte ci siano almeno 2 assi
- 10) In una delle versioni più comuni del gioco della scopa, dopo aver mischiato si servono 9 carte a ciascuno dei giocatori. Calcolare la probabilità per un giocatore fissato, di avere fra le sue 9 carte
 - a) tutti gli Assi b) tutti gli Assi e il "Settebello" (=7 di quadri)
 - c) l' "Asso bello" (asso di quadri) d) l' "Asso bello" e il "Settebello"
 - e) 1 e 1 solo asso f) almeno 1 asso
 - g) esattamente 2 assi h) almeno 2 assi

RISPOSTE

- 1) Numero casi possibili = $\binom{40}{4}$. Numero casi favorevoli = $\binom{39}{3}$ (tanti quante sono le quaterne ottenibili prendendo il “settebello” e accostandogli 3 carte qualsiasi fra le 39 rimanenti). $p = 1/10$
- 2) N° casi poss. = $\binom{7}{2}$. N° casi fav. = $\binom{4}{2} + \binom{3}{2}$. $p = \frac{3}{7}$ 3) N° casi poss. = $\binom{6}{3}$. N° casi fav. = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. $p = \frac{2}{5}$
- 4) N° casi poss. = $\binom{10}{3}$. N° casi fav. = $\binom{9}{2}$. $p = \frac{3}{10}$ 5) N° c.p. = $\binom{20}{5}$. N° c. f. = $\binom{10}{5} + \binom{10}{5}$. $p = 0,0325\dots$
- 6a) Numero casi possibili = $2^{10} = 1024$. Numero casi favorevoli = 1. $p(\text{tutte C}) = \frac{1}{1024}$
- 6b) N° casi possibili = $2^{10} = 1024$. N° casi favorevoli = $1024 - \frac{1}{\text{tutte croci}} = 1023$. $p(\text{almeno una T}) = \frac{1023}{1024}$

OPPURE
COSÌ:

Come abbiamo anticipato,
la somma fra la probabilità di un evento e quella dell'**evento contrario** è sempre uguale a 1.
Allora $p(\text{almeno una T}) = 1 - p(\text{tutte C}) = 1 - 1/1024 = 1023/1024$

- 6c) Numero casi possibili = $2^{10} = 1024$. Numero casi favorevoli = 10. $p = 10/1024$
- 6d) Numero casi possibili = $2^{10} = 1024$. Numero casi favorevoli = $\binom{10}{5}$ (tanti quanti sono i modi in cui, fra i 10 lanci, è possibile scegliere quei 5 nei quali si suppone esca “Testa”). $p = 252/1024 = 0,246\dots$
- 7) N° casi poss. = $\binom{10}{3}$. N° casi fav. = 1. $p = 1/120$ 8) N° casi poss. = $\binom{20}{3}$. N° casi fav. = $\binom{5}{3}$. $p = 1/114$
- 9) a) $p = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{40}{4}} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{99}{18278} = 0,0054\dots$ b) $p = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{40}{4}} = 0,224\dots$
- c) $p = \frac{\binom{40}{4} - \binom{28}{4}}{\binom{40}{4}} \approx 0,776$ *oppure* $1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{40}{4}}$ d) $p = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}} \approx 0,0023$ e) $p = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{40}{4}} = \frac{1}{10}$ f) $p = \frac{\binom{38}{2}}{\binom{40}{4}} = \frac{1}{130}$
- g) $p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{36}{2}}{\binom{40}{4}}$ h) $p = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{36}{1}}{\binom{40}{4}} = 0,00157\dots$ i) $p = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{40}{4}}$ j) $p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{40}{4}} = 0,0043\dots$
- k) $p = \frac{\binom{10}{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\binom{40}{4}} = 0,588\dots$ *(fra i 10 valori, ne scelgo 4 e per ognuno 1 carta delle 4)* *opp. $p = \frac{40 \cdot 36 \cdot 32 \cdot 28}{4! \cdot \binom{40}{4}}$ una carta qualsiasi... poi una qualsiasi delle 36 che non hanno lo stesso valore ... ma devo dividere per 4! dato che in questo modo una stessa quaterna di carte verrebbe considerata più volte*
- l) $p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{36}{2} + \binom{4}{3} \cdot \binom{36}{1} + \binom{4}{4}}{\binom{40}{4}} = \frac{3925}{91390} = 0,0429\dots$ *opp. $p = \frac{\binom{40}{4} - \left[\binom{36}{4} + \binom{4}{1} \cdot \binom{36}{3} \right]}{\binom{40}{4}}$*
- 10a) $p = \frac{\binom{36}{5}}{\binom{40}{9}}$ 10b) $p = \frac{\binom{35}{4}}{\binom{40}{9}}$ 10c) $p = \frac{\binom{39}{8}}{\binom{40}{9}}$ 10d) $p = \frac{\binom{38}{7}}{\binom{40}{9}}$
- 10e) $p = \frac{4 \cdot \binom{36}{8}}{\binom{40}{9}}$ 10f) $p = \frac{\binom{40}{9} - \binom{36}{9}}{\binom{40}{9}}$ *opp. ...* 10g) $p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{36}{7}}{\binom{40}{9}}$ 10h) $p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{36}{7} + \binom{4}{3} \cdot \binom{36}{6} + \binom{4}{4} \cdot \binom{36}{5}}{\binom{40}{9}}$