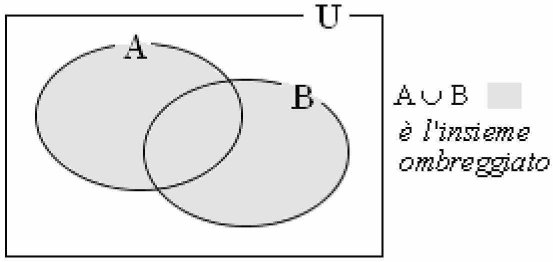
7 - UNIONE, INTERSEZIONE, COMPLEMENTAZIONE

A questo punto siamo in grado di dimostrare, senza grandi difficoltà, alcuni teoremi basilari sul CdP.

E' importante tenere presente fin d'ora che per la risoluzione di alcuni problemi di CdP, l'applicazione dei teoremi che stiamo per stabilire risulta realmente utile; in altri casi, invece, tale applicazione è possibile ma del tutto superflua perché è più semplice valutare la probabilità dell'evento "per via diretta", contando cioè i casi possibili e i casi favorevoli (naturalmente, sempre con la massima attenzione nel controllare se i casi cui ci stiamo riferendo sono realmente tutti "equipossibili").

7.1 - Teorema sulla probabilità dell'evento unione (detto "teorema delle probabilità totali")

Sia U l'insieme universo dei casi equipossibili, e siano
$A \subseteq U, \quad B \subseteq U$.



Semplici considerazioni sul numero degli elementi dei vari insiemi che compaiono nella figura, nella quale l'insieme $A \cup B$ è quello ombreggiato, consentono di scrivere:

$$\boxed{p(A \cup B) =} \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)+n(B)-n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \boxed{p(A)+p(B)-p(A \cap B)}$$

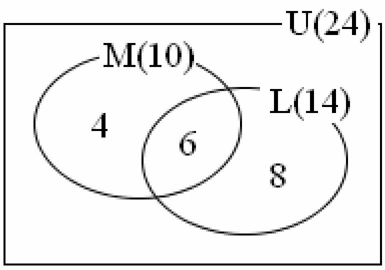
Dunque avremo:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ (TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI)

Se A, B sono "**incompatibili**" (cioè, se l'intersezione fra A e B è vuota) la formula diventa semplicemente:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (TEOR. DELLE PROBABILITA' TOTALI PER EVENTI INCOMPATIBILI)

- **Esempio**
  In una classe di 24 alunni, 10 sono insufficienti in Matematica, 14 in Latino, 6 sia in Matematica che in Latino (che strage!). Preso un alunno a caso, che probabilità c'è che sia insufficiente in almeno una delle due materie Matematica e Latino?



Primo modo di risolvere
(col teorema delle probabilità totali):

$$p(M \cup L) = p(M) + p(L) - p(M \cap L) = 10/24 + 14/24 - 6/24 = 18/24$$

Secondo modo di risolvere
(**senza applicare alcun teorema**, molto spontaneamente e semplicemente):

$$p(M \cup L) = n(M \cup L)/n(U) = (4+6+8)/24 = 18/24$$

Ammetto tranquillamente che l'esempio fornito è molto banale, nel senso che in questo caso applicare il teorema è, sì, possibile, ma si rivela completamente superfluo, perché risulta molto più semplice contare direttamente il numero dei casi favorevoli e dei casi possibili. Per incontrare esempi in cui si veda un'effettiva utilità del teorema sopra stabilito, occorre far riferimento a situazioni più complicate, che incontreremo presto proseguendo nella trattazione del CdP.

L'estensione del Teorema delle Probabilità Totali al caso di tre eventi A, B, C è la seguente:

$$\boldsymbol{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)}$$

che diventa semplicemente

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$ se A, B, C sono **a due a due incompatibili**