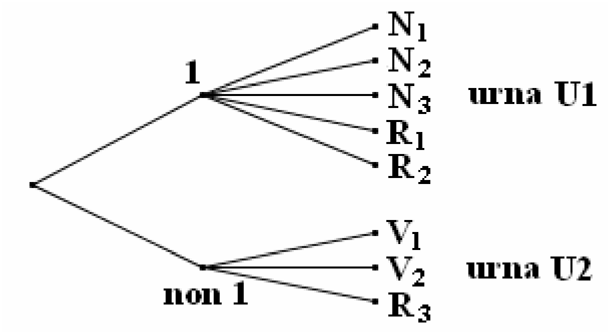
8 - EVENTI A DUE (O PIU') FASI

8.1 - Il Teorema relativo agli "eventi a due fasi"

- **Esempio**

  Lancio un dado.
  Se esce 1 pesco una pallina da un'urna U1 che contiene 3 palline Nere e 2 Rosse.
  Se esce un numero diverso da 1 pesco invece da un'urna U2 contenente 2 palline Verdi e 1 Rossa.
  Si chiede: con una "prova" di questo tipo, qual è la probabilità di estrarre una pallina

  a) Nera?
  b) Rossa?
  c) Verde?



La difficoltà di questo problema sta nel fatto che i casi

$$(1, N_1)\quad (1, N_2)\quad (1, N_3)\quad (1, R_1)\quad (1, R_2)\quad (\text{non}1, V_1)\quad (\text{non}1, V_2)\quad (\text{non}1, R_3)$$

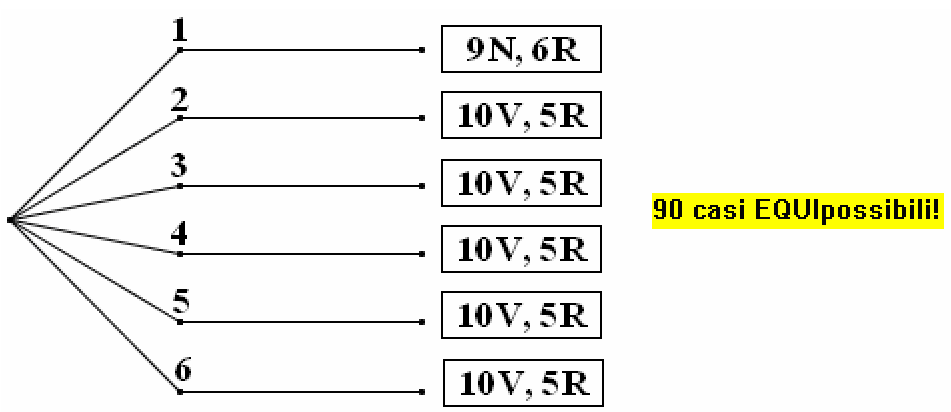
NON sono equipossibili !!!

Viene subito in mente di passare al nuovo insieme di casi

$$\begin{array}{lllll} (1, N_1) & (1, N_2) & (1, N_3) & (1, R_1) & (1, R_2) \\ (2, V_1) & (2, V_2) & (2, R_3) & & \\ (3, V_1) & (3, V_2) & (3, R_3) & & \\ (4, V_1) & (4, V_2) & (4, R_3) & & \\ (5, V_1) & (5, V_2) & (5, R_3) & & \\ (6, V_1) & (6, V_2) & (6, R_3) & & \end{array}$$

ma nemmeno questi sarebbero equipossibili !!!

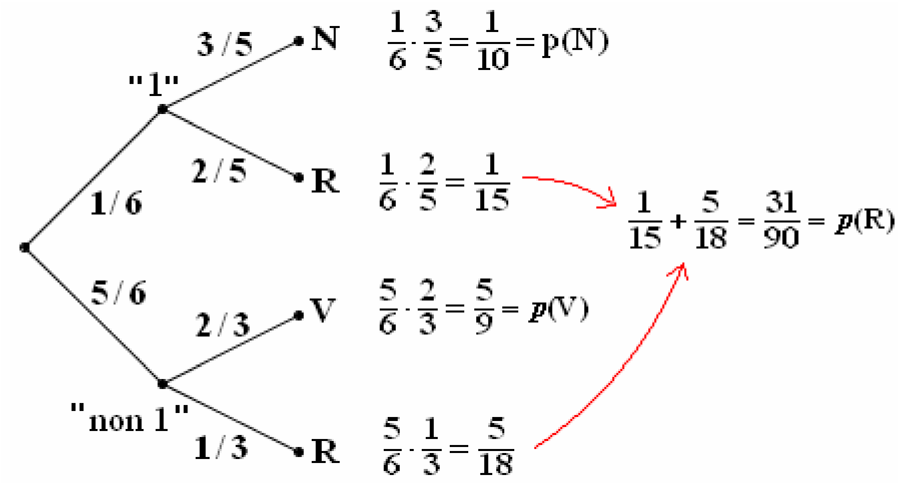
Riusciamo però a ottenere un "set" di casi equipossibili se applichiamo il seguente artificio:
supponiamo di avere, nell'urna **U1**, **15 palline anziché 5**: 9 Nere, 6 Rosse
e nell'urna **U2**, **15 palline anziché 3**: 10 Verdi, 5 Rosse.
La nuova prova sarà probabilisticamente equivalente alla precedente (giusto? ne sei convinto?)
ma questa volta i casi
(i $\mathbf{6 \cdot 15 = 90}$ **casi** !)
saranno tutti **equipossibili** !!!



Avremo dunque

p(N) = 9/90 = 1/10
p(R) = 31/90
p(V) = 50/90 = 5/9

cosicché, osservando il seguente diagramma, siamo condotti ad una scoperta assai interessante:



Insomma, per quanto riguarda la prova aleatoria a due fasi da noi considerata,
la probabilità di percorrere un “cammino”
(pensiamo ad esempio al cammino “1 dal dado E POI pallina Nera dall’urna”)
risulta calcolabile mediante un prodotto di due probabilità:
le probabilità dei singoli segmenti che costituiscono il cammino

Osserviamo che la seconda di queste due probabilità è una probabilità “condizionata”
(ad esempio, il fattore 2/5 che compare nel diagramma è la
“probabilità che esca Rossa dall’urna, SUPPOSTO CHE fosse uscito 1 dal lancio del dado).

In effetti è possibile dimostrare che questo fatto è di validità del tutto generale, ossia che sussiste il seguente

TEOREMA SULLA PROBABILITA' DI UN EVENTO,
COSTITUITO DALLA SUCCESSIONE O DALL'ABBINAMENTO DI DUE "EVENTI PARZIALI"
(IN BREVE: PROBABILITA' DI UN "EVENTO A DUE FASI")

Se una prova aleatoria si articola in due parti o fasi,
cosicché l'evento di cui vogliamo valutare la probabilità si possa pensare costituito
dalla successione, o comunque dall'abbinamento, di due "eventi parziali" A, B
(evento “A e poi B”),
allora:

$$\boxed{p(\text{A e poi B}) = p(\text{A})\cdot p(\text{B}/\text{A})}$$

cioè:
la probabilità di “A e poi B” è uguale al prodotto
della probabilità di A
per la probabilità di B, supposto che si sia verificato A.

La dimostrazione generale di questo enunciato, che è riportata più avanti, consiste nella generalizzazione di quanto fatto in relazione all’esempio introduttivo, che ha portato alla “scoperta” del Teorema.

Nel caso A, B siano stocasticamente indipendenti,
cioè tali che il verificarsi dell'uno non modifichi la probabilità del verificarsi dell'altro, allora

$$p(\text{A e poi B}) = p(\text{A})\cdot p(\text{B})$$

In un grafo ad albero, quanto detto si può tradurre nella seguente comodissima REGOLA:

♥ LA PROBABILITÀ DI UN CAMMINO È UGUALE AL PRODOTTO
DELLE PROBABILITÀ DEI SINGOLI TRATTI CHE COSTITUISCONO IL CAMMINO
(s'intende che se un segmento rappresenta un “ramo secondario”,
la probabilità di percorrerlo è da intendersi come probabilità condizionata, cioè come
probabilità di percorrere quel tratto, supponendo di essere già giunti all'inizio del segmento stesso).