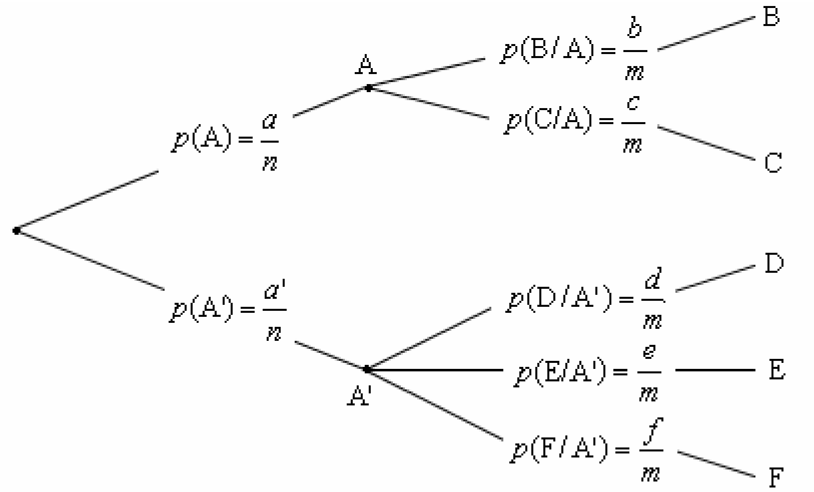
8.2 - Dimostrazione del Teorema sugli "eventi a due fasi"

Il procedimento dimostrativo consiste nella generalizzazione di quanto fatto nell'esempio introduttivo: passaggio ad una prova modificata, probabilisticamente equivalente a quella di partenza, con lo scopo di ricondursi ad un insieme di casi tutti equipossibili.

Il grafo sottostante mostra la struttura di una generica prova aleatoria a due fasi;
A, A', B, C, D, E, F rappresentano generici eventi.



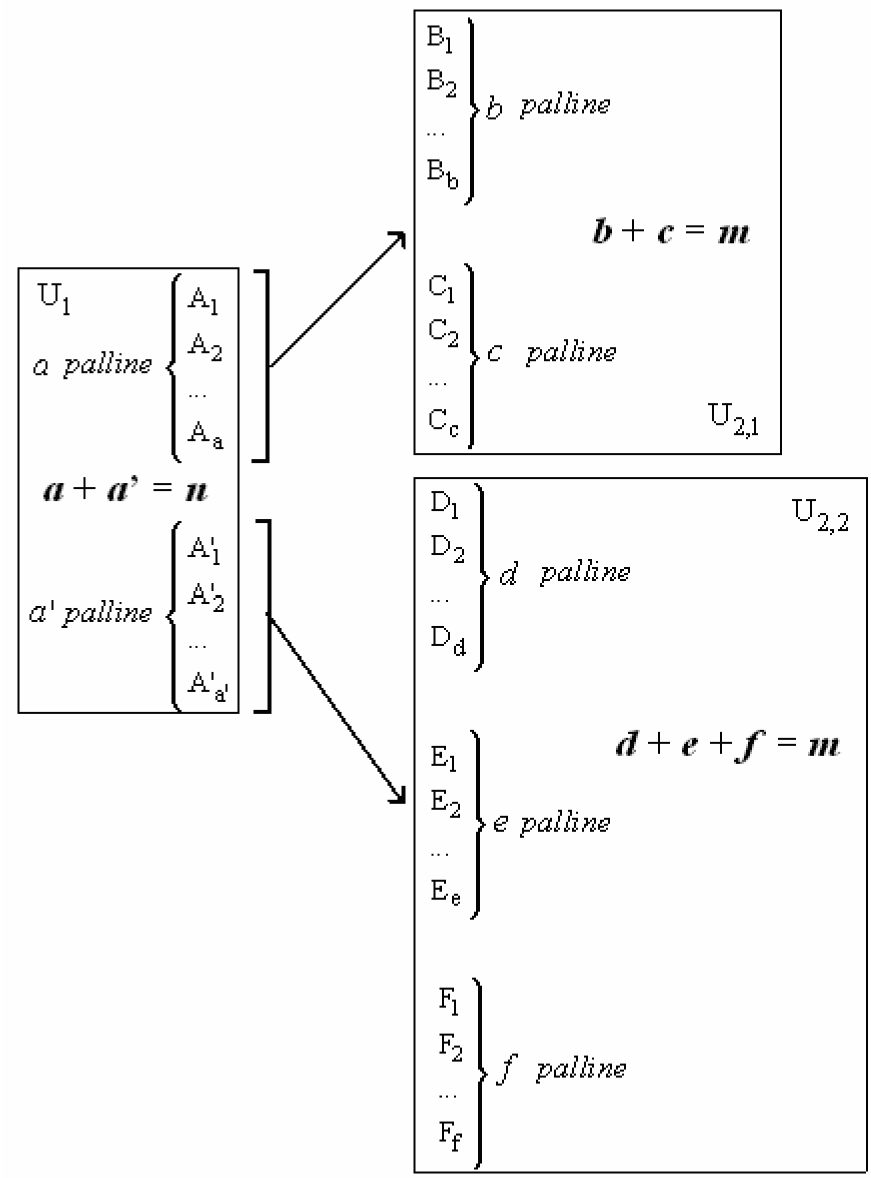
Di ciascun evento è specificata la probabilità (eventualmente, "probabilità condizionata").
Per semplicità, ho supposto che si abbiano 2 esiti possibili per la prima fase (o "prima prova parziale") e 2+3 esiti possibili per la seconda fase (= "seconda prova parziale").
E' chiaro però che la dimostrazione sarebbe facilmente generalizzabile a situazioni diverse, comunque complicate.
Il fatto che le probabilità $p(\mathrm{A})$ e $p(\mathrm{A'})$ siano espresse da due frazioni con lo stesso denominatore n non è restrittivo, voglio dire: non riflette un caso particolare, perché comunque, se i due denominatori di $p(\mathrm{A})$ e $p(\mathrm{A'})$ fossero diversi, io potrei sempre ridurre tali due frazioni al minimo comun denominatore.
Analogo discorso vale per le cinque probabilità $p(\mathrm{B/A}),\ p(\mathrm{C/A}),\ p(\mathrm{D/A'}),\ p(\mathrm{E/A'}),\ p(\mathrm{F/A'})$:
le suppongo espresse da cinque frazioni con lo stesso denominatore m
(se così non fosse, potrei sempre ricondurmi a questa situazione portando le cinque frazioni al m.c.d.).
Osserviamo che, per ovvi motivi, i numeri interi a, a', b, c, d, e, f sono tali da realizzare le uguaglianze $a+a'=n,\ \ b+c=m,\ \ d+e+f=m$.
Si tratta dunque di dimostrare (TESI) che $p(\mathrm{A}\ e\ poi\ \mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B/A})$,
tanto per prendere un'uguaglianza qualsiasi fra le 5 dello stesso tipo.

Poiché gli esiti possibili della prima fase sono:
A con probabilità a/n e A' con probabilità a'/n,
possiamo concepire la prima fase come estrazione di una pallina da un'urna contenente n palline, su a delle quali ci sia la scritta "A" e sulle rimanenti a' la scritta " A' ".

E analogamente per la seconda fase.

Quindi la nostra "prova a due fasi" potrà, in definitiva, essere considerata equivalente, dal punto di vista delle valutazioni di probabilità, alla prova descritta come segue:

- si estrae una pallina da un'urna contenente $n=a+a'$ palline,
  su a delle quali compare la scritta "A" mentre sulle rimanenti a' palline compare la scritta " A' "
- se l'esito di questa estrazione è "A", allora si pesca da un'urna con la seguente composizione:
  - m palline in totale;
  - b palline con la scritta "B",
  - c palline con la scritta "C"
- se invece l'esito della prima estrazione è " A' ", allora si va a pescare da un'urna diversa, contenente:
  - m palline in totale;
  - d palline con la scritta "D",
  - e palline con la scritta "E",
  - f palline con la scritta "F".



(Sei convinto del fatto che la prova originaria
e la "prova modificata", quella con le urne e le palline,
sono probabilisticamente equivalenti?
Solo se la tua risposta è affermativa puoi accettare il presente procedimento dimostrativo ...)

Dunque:

i casi possibili sono

$$a \cdot (b + c) + a' \cdot (d + e + f) = a \cdot m + a' \cdot m = (a + a') \cdot m = n \cdot m$$

Essi appaiono tutti equipossibili (ne sei convinto?)

I casi favorevoli al verificarsi dell'evento "A e poi B" sono $a \cdot b$.

La probabilità dell'evento "A e poi B" è data dal rapporto

$$\frac{n^\circ \; casi \;\; favorevoli}{n^\circ \; casi \;\; possibili}$$

quindi

$$p(\mathrm{A} \;\; e \;\; poi \;\; \mathrm{B}) = \frac{a \cdot b}{n \cdot m} = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B} / \mathrm{A})$$

come volevasi dimostrare.