11 - IL “PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE”

☼ **E’ richiesto di conoscere il CALCOLO COMBINATORIO!**

CC

a) Lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c’è che esca PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia “1”?

b) Generalizzazione: il “PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE”.

CONSIDERIAMO UN EVENTO ELEMENTARE
(nell’esempio: l’uscita della faccia “1” dal lancio di un dado)
CHE ABBIA UNA DATA PROBABILITÀ *p* DI VERIFICARSI IN UNA SINGOLA PROVA
(nel nostro caso, è $p = 1/6$).

Ci chiediamo:
SE SI EFFETTUANO *n* PROVE, CHE PROBABILITÀ C’È CHE QUELL’EVENTO SI VERIFICHI PER ESATTAMENTE *k* VOLTE
$(0 \le k \le n)$?

RISOLUZIONE di a)

L’evento

“lanciando 5 volte un dado, esce PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia 1”

può verificarsi in parecchie modalità diverse:

- ad esempio, si verifica qualora “1” esca ai primi 3 lanci, e poi non esca più ai successivi 2 lanci;
- oppure, si verifica qualora “1” esca esclusivamente agli ultimi 3 lanci (ma non esca ai primi 2);
- oppure ancora, si verifica qualora “1” esca al secondo, al terzo e al quinto lancio, ma non agli altri lanci;
- ecc. ecc.

Fissiamo la nostra attenzione su UNA di queste modalità.

Ad esempio, cominciamo col chiederci:

- *lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c’è che la faccia “1” esca ai primi 3 lanci, e poi non esca più?*

  Facile rispondere: pensando all’ “evento a più fasi” e tenendo conto del fatto che l’esito di un lancio non è condizionato in alcun modo dall’esito del lancio precedente, abbiamo:

$$p(1\ \ 1\ \ 1\ \ \overline{1}\ \ \overline{1}) =$$
$$= p(1\ al\ 1°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 2°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 3°\ lancio) \cdot p(NON\ 1\ al\ 4°\ lancio) \cdot p(NON\ 1\ al\ 5°\ lancio) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

Consideriamo ora UN’ALTRA fra le possibili modalità.
Ad esempio,

- *lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c’è che la faccia “1” esca esclusivamente agli ultimi 3 lanci (ma non esca ai primi 2)?*

  Avremo

$$p(\overline{1}\ \ \overline{1}\ \ 1\ \ 1\ \ 1) =$$
$$= p(NON\ 1\ al\ 1°\ lancio) \cdot p(NON\ 1\ al\ 2°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 3°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 4°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 5°\ lancio) =$$
$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

E pensiamo ancora ad UN’ALTRA modalità.

- *Lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c’è che “1” esca al secondo, al terzo e al quinto lancio, ma non agli altri lanci?*

$$p(\overline{1}\ \ 1\ \ 1\ \ \overline{1}\ \ 1) =$$
$$= p(NON\ 1\ al\ 1°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 2°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 3°\ lancio) \cdot p(NON\ 1\ al\ 4°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 5°\ lancio) =$$
$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

Abbiamo perfettamente capito, a questo punto, che CIASCUNA delle tante modalità con cui l'evento *"su 5 lanci, esce PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia 1"* si può verificare,
ha probabilità data dal prodotto

$$\boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

Ora, in virtù del teorema sulle probabilità totali per eventi incompatibili, abbiamo:

$$p(su\ 5\ lanci,\ esce\ PER\ ESATTAMENTE\ 3\ VOLTE\ la\ \ faccia\ 1) =$$
$$= p\big(("1"\ esce\ le\ \ prime\ 3\ volte) \vee ("1"\ esce\ le\ ultime\ 3\ volte) \vee ("1"\ esce\ la\ seconda,\ la\ terza\ e\ la\ quinta\ volta) \vee ...\big) =$$
$$= p("1"\ esce\ le\ \ prime\ 3\ volte) + p("1"\ esce\ le\ ultime\ 3\ volte) + p("1"\ esce\ la\ seconda,\ la\ terza\ e\ la\ quinta\ volta) + ... =$$
$$= \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2} + \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2} + \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2} + ...$$

Per calcolare la probabilità cercata, dobbiamo dunque sommare tanti addendi, ciascuno uguale a $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

La questione è: QUANTI SONO questi addendi?

Beh … sono TANTI QUANTE LE MODALITA' CON CUI L'EVENTO
"esce per esattamente 3 volte la faccia 1"
SI PUO' PRESENTARE.

E l'evento "esce per esattamente 3 volte la faccia 1" si può presentare in tante modalità,
quanti sono i modi in cui, sui 5 lanci, possiamo fissare quei 3 nei quali immaginiamo esca "1".

Ora, è ben noto che fra 5 oggetti (nel nostro caso: i 5 lanci) noi ne possiamo selezionare 3
(nel nostro caso: quei 3 lanci nei quali immaginiamo esca "1") in $\binom{5}{3}$ modi.

Ricordiamo infatti che il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$
è quel numero che risponde alla domanda: " dati n oggetti, in quanti modi se ne possono scegliere k? "

Dunque avremo:

$$\boxed{p(su\ 5\ lanci,\ esce\ PER\ ESATTAMENTE\ 3\ VOLTE\ la\ \ faccia\ 1) =}$$
$$= \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + ...}_{\binom{5}{3}\ addendi} \boxed{= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

GENERALIZZAZIONE

Generalizzando, possiamo enunciare e risolvere, in astratto, il

"PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE"

Consideriamo un evento elementare
(nell'esempio precedente: l'uscita della faccia "1" dal lancio di un dado)
che abbia una data probabilità *p* di verificarsi IN UNA SINGOLA PROVA
(nel nostro esempio del dado, sarebbe $p = 1/6$).
Ci chiediamo:

SE SI EFFETTUANO *n* PROVE, CHE PROBABILITÀ C'È
CHE QUELL'EVENTO SI VERIFICHI PER ESATTAMENTE *k* VOLTE ($0 \le k \le n$) ?

RISPOSTA:
la probabilità cercata è data da

$$\boxed{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

avendo posto, per comodità,

$$\boxed{q = 1 - p}.$$

Se andiamo adesso a rivisitare l'esercizio 14) di pagina 67,
scopriremo che può anche essere risolto, volendo, con l'appena stabilita "formula delle prove ripetute" …

In una famiglia con quattro figli, che probabilità sussiste che i maschi siano esattamente due?

In una singola "prova", abbiamo: $p(maschio)=\frac{1}{2}$

per cui, effettuando 4 "prove", sarà: $p(esattamente\ 2\ maschi)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4\cdot 3}{2!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

SCHEDA RIASSUNTIVA sul "PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE"

Supponiamo di effettuare *n* prove,
in ciascuna delle quali potrà presentarsi oppure non presentarsi un dato evento E.

Indichiamo con p la probabilità che E si presenti in una singola prova; porremo poi
$$q=1-p,$$
e di conseguenza q indicherà la probabilità dell'evento contrario $\overline{\text{E}}$ in una singola prova.

Bene! Dato ora un intero *k*, con $0\le k\le n$, vogliamo determinare la probabilità p_k che l'evento E si verifichi esattamente *k* volte nel corso nelle *n* prove.

Risoluzione

L'evento E si presenta esattamente *k* volte nel corso delle *n* prove
se e solo se, in quelle *n* prove, E si presenta *k* volte e il suo evento contrario $\overline{\text{E}}$ si presenta $n-k$ volte.

Il "presentarsi dell'evento E esattamente *k* volte nelle *n* prove" può avvenire secondo parecchie modalità.

Ad esempio, l'evento:
"lanciando 5 volte una moneta, esce Testa esattamente 3 volte"
si può presentare secondo le modalità:
TTTCC TTCCT TCCTT CCTTT CTCTT TCTCT TTCTC CTTCT TCTTC CTTTC.

Consideriamo ***una sola*** di queste modalità: per fissare le idee, potremmo pensare alla modalità
"E si presenta le prime k volte, $\overline{\text{E}}$ le ultime $n-k$ volte".
La probabilità di questa modalità fissata è evidentemente $p^k q^{n-k}$
(teorema delle probabilità composte per eventi indipendenti).

Ma noi non dobbiamo considerare una sola, bensì *tutte* le modalità con le quali E si può presentare per esattamente *k* volte sulle *n* prove; e tali modalità sono tante quante le possibilità di scegliere, dall'insieme delle *n* prove, quelle *k* nelle quali supponiamo che si verifichi E.

Tali modalità sono in numero di $\binom{n}{k}$ e di conseguenza avremo

$$\boxed{p_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}$$

❑ Es. 1: *lanciando un dado per 10 volte, che probabilità c'è che esca il "6" esattamente per 3 volte?*

Risposta: $p_3=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$

❑ Es. 2: *lanciando una moneta per 10 volte, che probabilità c'è che esca "Testa" esattamente per 5 volte?*

Risposta: $p_5=\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5$

ESERCIZI

1) C'è un'urna con 5 palline, 2 rosse e 3 nere. Si estrae una pallina, se ne guarda il colore, la si reimbussola. Si fa questo per 5 volte. Che probabilità c'è che, così facendo, si peschi 2 volte una rossa e 3 volte una nera?

2) Se si prende 1 persona a caso, la probabilità che sia nata il giorno di domenica è 1/7. Se invece si prendono 3 persone a caso, la probabilità che 1 e 1 sola di esse sia nata di domenica qual è?

3) Lanciando un dado per 6 volte, con che probabilità uscirà per esattamente 3 volte un multiplo di 3?

RISPOSTE

1) $\binom{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3=34{,}56\%$ 2) $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{7}\right)^1\left(\frac{6}{7}\right)^2=3\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{36}{49}=\frac{108}{343}\approx 31{,}5\%$ 3) $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\approx 22\%$