13 - ESERCIZI VARI

☼ **Può essere utile, o necessario, il CALCOLO COMBINATORIO!**

1) Lanciando un dado e simultaneamente una moneta,
che probabilità c'è di ottenere 1 col dado e Testa con la moneta?

2) Se si lanciano 3 dadi, qual è la probabilità che non compaia mai la faccia "6"?

3) Se si lanciano *n* dadi, qual è la probabilità che compaia almeno una volta un multiplo di 3?

4) Si lanciano simultaneamente 2 monete e 2 dadi. Determinare la probabilità che gli esiti siano tutti differenti.

5) Se un medico specialista riceve dal Lunedì al Venerdì, su prenotazione, 8 pazienti al giorno,
prendendo nella lista dei 40 pazienti di questa settimana i primi 3 in ordine alfabetico,
che probabilità c'è che gli appuntamenti per queste persone siano tutti in giorni diversi?

6) Un insegnante anticonformista sistema la classe in circolo intorno alla cattedra,
sorteggiando i posti a sedere. Se il timido Alessandro spera nel suo intimo di avere in sorte
un posto a fianco di Martina, e la classe è di 20 alunni, che probabilità c'è che realizzi il suo sogno?

7) 5 compagni di scuola si divertono a ricostruire il giorno della settimana in cui sono nati.
   a) Che probabilità c'è che siano nati tutti nel fine settimana (ossia, di Sabato o di Domenica)?
   b) Che probabilità c'è che siano nati in 5 giorni della settimana tutti diversi fra loro?
   c) Che probabilità c'è che esattamente 2 di loro siano nati di Domenica?
   d) Che probabilità c'è che almeno 2 di loro siano nati di Domenica?
   e) Che probabilità c'è che almeno 2 di loro siano nati nello stesso giorno della settimana?
   f) Che probabilità c'è che 3 siano nati di Martedì e 2 di Venerdì?

8) Un banco di beneficenza ha ancora 10 biglietti invenduti, di cui 3 sono vincenti.
Determina la probabilità che, comprando 3 biglietti, almeno uno di questi sia vincente.

9) Da rilevazioni statistiche, si trae che in una determinata nazione la probabilità che una famiglia
possegga un computer "da tavolo" è del 50%, la probabilità che possegga un portatile è del 20%,
mentre è del 10% la probabilità che disponga di entrambi.
Determinare la probabilità, per una famiglia, in quella nazione, di
   a) possedere un computer di almeno un tipo
   b) non possedere alcun computer.

   c) I due eventi "possedere un computer fisso" e "possedere un portatile"
   sono stocasticamente indipendenti?

10) Una piccola lotteria di paese ha emesso 100 biglietti, di cui 5 vincenti.
Stabilisci che probabilità ha una persona di possedere almeno un biglietto vincente, se ne ha acquistati
a) 1 b) 2 c) 5 d) 10 e) 20 f) 95 g) 96

11) Calcolare la probabilità che, lanciando una coppia di dadi (per meglio fissare le idee,
potresti pensarli di colori diversi: ad esempio, uno rosso e uno blu), si ottenga:
   a) 3 su entrambi
   b) 3 sul dado blu e non su quello rosso
   c) 3 sul dado blu
   d) uno e un solo "3"
   e) nessun "3"
   f) almeno un "3"

12) In una partita di 50 ventilatori, 4 sono difettosi.
Se una persona ne acquista 2, determina la probabilità che siano entrambi ben funzionanti.

13) Se fra i 20 soldati della compagnia in cui militano Aldo e Bruno ne vengono estratti 5
per il turno di guardia, che probabilità c'è che
   a) Aldo e Bruno vengano estratti entrambi?
   b) non venga estratto né Aldo né Bruno?
   c) venga estratto uno e uno solo dei due?
   d) venga estratto almeno uno dei due?

14) Se per una verifica orale vengono estratti 4 nomi in una classe con 10 maschi e 10 femmine,
determina la probabilità che siano
a) tanti maschi quante femmine b) più maschi che femmine c) più femmine che maschi

15) Lanciando 2 dadi, a quanto ammonta la probabilità di ottenere due numeri uno divisibile per l'altro?

16) Un cretino ha iniettato del purgante in 2 fra le 7 confezioni di latte,
che il negoziante ha poi disposto sullo scaffale per la vendita.
Se una signora ne acquista 3 confezioni, determinare la probabilità di portar via
a) almeno una confezione alterata
b) entrambe le confezioni alterate

17) Un paese di pianura non ha, in novembre, un clima particolarmente fortunato.
Una statistica effettuata dagli abitanti mostra che ogni giorno
- piove, in ore serali, con probabilità del 50%
- e c'è nebbia al mattino con probabilità del 40%

Inoltre si è visto che mediamente, 3 giorni su 10 si ha tanto la nebbia mattutina quanto la pioggia serale.
a) Supposto che ci sia nebbia al mattino, che probabilità c'è che poi piova alla sera?
(*indicazione: applica la formula* $p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$ *per la quale ti invito a rileggere l'osservazione nel 1° riquadro a pag. 58*)
b) Se piove alla sera, che probabilità c'è che ci sia stata nebbia al mattino?
Qual è la probabilità che in un dato giorno almeno uno dei due fenomeni sia
c) presente? d) assente?
e) I due eventi "pioggia di sera", "nebbia al mattino" sono stocasticamente indipendenti?

18) Supponiamo di giocare al Totocalcio nella versione "classica" a 13 partite.
Supponiamo anche di decidere "a caso" che pronostico assegnare a ogni singola partita,
senza valutare quindi la "forza" delle squadre in campo.
Giocando una singola colonna, determina quale sarà la probabilità di realizzare
a) 13 b) 0 c) 12 d) 10
e) esattamente k punti su 13 $(0 \le k \le 13)$.

19) Supponiamo di aver giocato al Totocalcio (quello "classico", con 13 partite).
Se veniamo a sapere che la colonna vincente ha 4 "1", 4 "2" e 5 "X",
e ci ricordiamo di aver giocato una colonna compilata a caso,
ma nella quale avevamo messo proprio 4 "1", 4 "2" e 5 "X",
che probabilità abbiamo di aver fatto "13" con quella giocata?

20) Un'urna A contiene 6 palline Rosse e 3 palline Nere, un'altra urna B ne contiene 3 Rosse e 6 Nere.
Si estrae una pallina da A e la si mette in B; a questo punto si estrae una pallina anche da B.
Determinare la probabilità che le due palline siano:
a) entrambe Rosse
b) entrambe Nere
c) di colore diverso
d) almeno una Rossa

21) Un'urna A contiene 6 palline Rosse e 3 palline Nere, un'altra urna B ne contiene 3 Rosse e 6 Nere.
Si estrae una pallina da A e la si mette in B; a questo punto si estrae una pallina anche da B
e la si rimette in A. Infine, si estrae una pallina da A.
Determinare la probabilità che questa sia
a) Rossa b) Nera

22) Si può comunicare con un certo ente pubblico per mezzo di 3 linee telefoniche a scelta.
Tuttavia, le statistiche dicono che per il primo tentativo di telefonata
il 1° numero viene scelto dal 50% degli utenti, il secondo dal 30% e il terzo dal 20% soltanto.
Prese 3 persone a caso fra quelle che hanno tentato di mettersi in contatto questa mattina
con l'ente pubblico, che probabilità c'è che abbiano scelto, per il primo tentativo,
a) tutte lo stesso numero?
b) numeri tutti diversi?
c) numeri non tutti uguali?

23) Un tale gioca sempre lo stesso numero al lotto, per 10 estrazioni consecutive
(sappiamo che la probabilità di azzeccare il numero singolo in una estrazione fissata, è uguale a 1/18).
Che probabilità ha qual tale di
a) non vincere mai?
b) vincere almeno una volta?
c) vincere una e una sola volta?
d) vincere esattamente 2 volte?

RISPOSTE

Ovviamente, per molti quesiti c'è la possibilità di arrivare alla risposta in più modi diversi.
Ricorda sempre, fra l'altro, che in presenza della parola "*almeno*" è spesso conveniente utilizzare l'*evento contrario*

1) $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$; *anche, volendo*: $\frac{cf}{cp}=\frac{1\cdot 1}{6\cdot 2}$ 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^3\approx 58\%$; *anche, volendo*: $\frac{cf}{cp}=\frac{5^3}{6^3}$

3) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 4) $1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$ 5) $1\cdot\frac{32}{39}\cdot\frac{24}{38}\approx 52\%$

6) 2/19.
Dal punto di vista probabilistico, evidentemente nulla cambia se si suppone che Martina e Alessandro siano rispettivamente la prima e la seconda persona a cui viene assegnato, per estrazione, il posto. Ad ogni posto si abbina dunque un numero (da 1 a 20), e si preparano i bigliettini. Si estrae poi un numero, e al posto corrispondente va a sedersi Martina. Fra i 19 bigliettini rimanenti, se ne estrae uno e si manda a sedere Alessandro al posto corrispondente. Ora, l'evento felice per Alessandro ha come casi favorevoli i due bigliettini che indicano i 2 posti a sinistra o a destra di quello dove si è accomodata Martina.

7) a) $\left(\frac{2}{7}\right)^5\approx 0{,}0019$ b) $1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\approx 15\%$ c) $\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\approx 13\%$

d) $1-\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}+5\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\right)\approx 15\%$ e) $1-1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\approx 85\%$

f) $\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\approx 0{,}06\%$; infatti $\binom{5}{3}$ è il numero dei modi in cui, sulle 5 persone, si possono scegliere quelle 3 che si supporranno nate di Martedì

8) $1-\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$ *oppure*: $1-\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=1-\frac{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}}=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$

9) $p(\mathrm{T}\vee\mathrm{P})=p(\mathrm{T})+p(\mathrm{P})-p(\mathrm{T}\wedge\mathrm{P})=0{,}5+0{,}2-0{,}1=0{,}6=60\%$; $p(nessuno)=1-p(\mathrm{T}\vee\mathrm{P})=1-0{,}6=0{,}4=40\%$
(oppure, si poteva rispondere disegnando un diagramma di Venn).

$p(\mathrm{T})=0{,}5$; $\boxed{p(\mathrm{T/P})=}\frac{p(\mathrm{T}\wedge\mathrm{P})}{p(\mathrm{P})}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=\boxed{0{,}5=p(\mathrm{T})}$ *per cui i due eventi sono stocasticamente indipendenti*

10)
a) $\frac{5}{100}=0{,}05$ b) $1-\frac{\binom{95}{2}}{\binom{100}{2}}\approx 0{,}1$ *oppure (è lo stesso!)* $1-\frac{\binom{98}{5}}{\binom{100}{5}}\approx 0{,}1$

Nel **1° MODO**, si pensa ai casi possibili e favorevoli **dal punto di vista dei 2 biglietti comprati**; nel **2° MODO**, **dal punto di vista dei 5 biglietti estratti.**

c) $1-\frac{\binom{95}{5}}{\binom{100}{5}}\approx 0{,}23$ d) $1-\frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}}\approx 0{,}42$ *oppure (è lo stesso!)* $1-\frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}}\approx 0{,}42$.

e) $1-\frac{\binom{95}{20}}{\binom{100}{20}}\approx 0{,}68$ *oppure* $1-\frac{\binom{80}{5}}{\binom{100}{5}}$ f) $1-\frac{1}{\binom{100}{95}}\approx 0{,}999999987$ *oppure* $1-\frac{1}{\binom{100}{5}}$ g) 1

11) a) 1/36 b) 5/36 c) 1/6 d) 5/18 e) 25/36 f) 11/36 12) $\frac{46}{50}\cdot\frac{45}{49}\approx 84{,}5\%$, *oppure*: $\binom{46}{2}\Big/\binom{50}{2}$

13) a) $\frac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{5}}$ (le cinquine non ordinate contenenti sia Aldo che Bruno sono tante, quante sono le possibilità di completare la cinquina abbinando ad Aldo+Bruno 3 soldati scelti a piacere fra i 18 rimanenti) b) $\frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}}$ c) $\frac{\binom{18}{4}+\binom{18}{4}}{\binom{20}{5}}$ d) $1-\frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}}$

14) $p(tanti\ m.\ quante\ f.)=\frac{\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}}=\frac{\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}}{\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}\approx 0{,}418$; $p(m>f)=p(f>m)\approx\frac{1-0{,}418}{2}=0{,}291$

15) I casi favorevoli sono: $(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6);\ (2,1);\ (2,2);\ (2,4);\ (2,6);$
$(3,1);\ (3,3);\ (3,6);\ (4,1);\ (4,2);\ (4,4);\ (5,1);\ (5,5);\ (6,1);\ (6,2);\ (6,3);\ (6,6)$
e la probabilità richiesta è $22/36 = 11/18$

16) a) $1-\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = 1-\dfrac{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}} = \dfrac{5}{7}$ b) $\dfrac{\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{5}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}} = \dfrac{1}{7}$

Il numero di terne di confezioni, contenenti entrambe quelle alterate, è uguale a $\binom{5}{1} = 5$ perché coincide col numero di modi in cui è possibile completare la terna, abbinando alle 2 confezioni alterate una di quelle "sane"

17) $\mathrm{P} =$ "*in un dato giorno c'è pioggia alla sera*"; $\mathrm{N} =$ "*in un dato giorno c'è nebbia al mattino*"

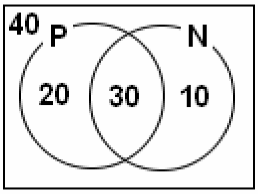
a) $p(\mathrm{P}/\mathrm{N}) = \dfrac{p(\mathrm{P}\wedge \mathrm{N})}{p(\mathrm{N})} = \dfrac{0,30}{0,40} = 0,75 = 75\%$ b) $p(\mathrm{N}/\mathrm{P}) = \dfrac{p(\mathrm{N}\wedge \mathrm{P})}{p(\mathrm{P})} = \dfrac{0,30}{0,50} = 0,60 = 60\%$

c) $p(\textit{almeno uno presente}) = p(\mathrm{P}\vee \mathrm{N}) = p(\mathrm{P}) + p(\mathrm{N}) - p(\mathrm{P}\wedge \mathrm{N}) = 0,50+0,40-0,30 = 0,60 = 60\%$

d) $p(\textit{almeno uno assente}) = 1 - p(\textit{entrambi presenti}) = 1-0,30 = 0,70 = 70\%$

e) $p(\mathrm{P}) = 50\%$ *mentre* $p(\mathrm{P}/\mathrm{N}) = 75\%$:
non essendo $p(\mathrm{P}) = p(\mathrm{P}/\mathrm{N})$, *i due eventi* P *ed* N *non sono stocasticamente indipendenti*

Un diagramma di Venn
può essere utile in questo contesto:



mediamente, su 100 giorni

18) a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{13}$ b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{13}$ c) *Il pronostico sbagliato, può essere uno qualsiasi dei* 13 ... $13\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{12}$ *Oppure* $\left(\dfrac{n°\ \textit{casi fav.}}{n°\ \textit{casi poss.}}\right)$: $\dfrac{13\cdot 2}{3^{13}}$

Volendo, si può pensare al "problema delle prove ripetute" ...

d) $\binom{13}{10}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}$ *opp.* $\dfrac{\binom{13}{10}\cdot 2^3}{3^{13}} = \dfrac{\binom{13}{3}\cdot 2^3}{3^{13}}$ e) $\binom{13}{k}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{13-k}$ *opp.* $\dfrac{\binom{13}{k}\cdot 2^{13-k}}{3^{13}} = \dfrac{\binom{13}{13-k}\cdot 2^{13-k}}{3^{13}}$

19) $n°\ \textit{casi poss.} = n°\ \textit{colonne con esattamente}\ 4\,\text{"1"}, 4\,\text{"2"}, 5\,\text{"X"} = \binom{13}{4}\cdot\binom{9}{4} = \dfrac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 90090$

$n°\ \textit{casi favorevoli} = 1$ *da cui* $p = \dfrac{1}{90090}$

20) $p(\mathrm{RR}) = p(\mathrm{R}\ \textit{da}\ \mathrm{A})\cdot p(\mathrm{R}\ \textit{da}\ \mathrm{B}/\mathrm{R}\ \textit{da}\ \mathrm{A}) = \dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{15}$; $p(\mathrm{NN}) = p(\mathrm{N}\ \textit{da}\ \mathrm{A})\cdot p(\mathrm{N}\ \textit{da}\ \mathrm{B}/\mathrm{N}\ \textit{da}\ \mathrm{A}) = \dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{7}{10} = \dfrac{7}{30}$

$p(\textit{colori diversi}) = 1-\left(\dfrac{4}{15}+\dfrac{7}{30}\right) = \dfrac{1}{2}$ *oppure* $\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{6}{10}+\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{2}$; $p(\textit{almeno una Rossa}) = 1-p(\mathrm{NN}) = 1-\dfrac{7}{30} = \dfrac{23}{30}$

21) $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{RRR}) + p(\mathrm{RNR}) + p(\mathrm{NRR}) + p(\mathrm{NNR}) = \dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{6}{9}+\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9}+\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9} = \ldots = \dfrac{19}{30}$

$p(\mathrm{N}) = 1-\dfrac{19}{30} = \dfrac{11}{30}$

22) a) $\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{50}{100}+\dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{30}{100}+\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{20}{100} = 16\%$

b) $p(\textit{tutti diversi}) = p(\mathrm{ABC}) + p(\mathrm{ACB}) + p(\mathrm{BAC}) + p(\mathrm{BCA}) + p(\mathrm{CAB}) + p(\mathrm{CBA}) =$
$= \dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{20}{100}+\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{30}{100}+\dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{20}{100}+\ldots = 6\cdot\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{20}{100} = 18\%$

c) $p(\textit{non tutti uguali}) = 1-p(\textit{tutti uguali}) = 100\%-16\% = 84\%$

23) a) $\left(\dfrac{17}{18}\right)^{10} \approx 0,56$ b) $1-\left(\dfrac{17}{18}\right)^{10} \approx 1-0,56 = 0,44$ c) $10\cdot\dfrac{1}{18}\cdot\left(\dfrac{17}{18}\right)^{9} \approx 0,33$ d) $\binom{10}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{18}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{17}{18}\right)^{8} \approx 0,088$