

14.2 - Esercizi svolti (Teorema di Bayes)

Riprendiamo ora i problemi da cui avevamo preso spunto e risolviamoli.

- In un paese scandinavo il 70% delle ragazze ha i capelli Biondi, il 20% li ha Rossi, il 10% Mori. Risulta poi che ha gli occhi Scuri il 10% delle Bionde, il 25% delle Rosse, il 50% delle More. Se la ragazza con cui ho fatto amicizia tramite Internet mi fa sapere che ha gli occhi Scuri, che probabilità c'è che sia Bionda?

B	R	M	
70%	20%	10%	della popolazione femminile
10%	25%	50%	occhi Scuri

Risoluzione con la Formula di Bayes:

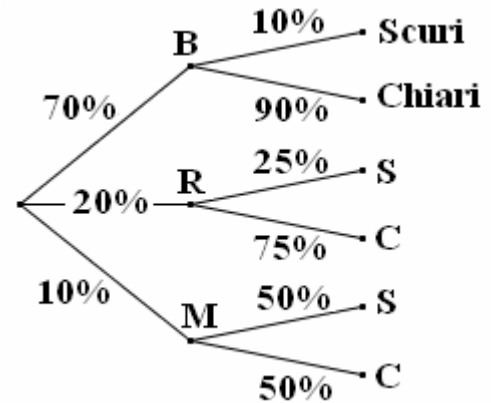
$$p(B) = 0,7 \quad p(R) = 0,2 \quad p(M) = 0,1$$

$$p(S/B) = 0,1 \quad p(S/R) = 0,25 \quad p(S/M) = 0,5$$

$$p(B/S) = \frac{p(B) \cdot p(S/B)}{p(B) \cdot p(S/B) + p(R) \cdot p(S/R) + p(M) \cdot p(S/M)} =$$

$$= \frac{0,7 \cdot 0,1}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,5} =$$

$$= \frac{0,07}{0,07 + 0,05 + 0,05} = \frac{0,07}{0,17} \approx 0,41 = 41\%$$



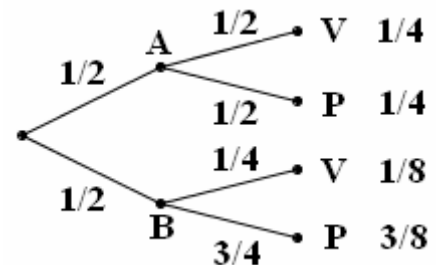
- In un bar ci sono due macchinette mangiasoldi A e B. Effettuando una singola giocata su A si vince con probabilità 1/2 (in altre parole: si vince mediamente 1 volta su 2, o, se preferisci, all'incirca 500 volte su 1000), mentre giocando su B si vince con probabilità 1/4. Supponiamo di non sapere quale sia la macchinetta A e quale la B; se ne scegliamo una a caso, giochiamo una sola volta, e vinciamo, che probabilità c'è che la macchinetta scelta sia stata A?

DIVERSI METODI O STILI DI RISOLUZIONE

1) Con la formula di Bayes

$$p(A/V) = \frac{p(A) \cdot p(V/A)}{p(A) \cdot p(V/A) + p(B) \cdot p(V/B)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$



2) Pensando semplicemente ad un'applicazione della formula $p(X/Y) = \frac{p(X \wedge Y)}{p(Y)}$

$$p(A/\text{"Vittoria"}) = \frac{p(A \wedge V)}{p(V)} = \frac{p(A) \cdot p(V/A)}{p(A \wedge V) + p(B \wedge V)} = \frac{p(A) \cdot p(V/A)}{p(A) \cdot p(V/A) + p(B) \cdot p(V/B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \dots = \frac{2}{3}$$

3) Con visione "frequentista"

Supponiamo di effettuare un numero elevato di giocate, diciamo 8000 giocate.

Pressappoco 4000 volte

la scelta casuale della macchinetta cadrà su A,

e pressappoco 4000 volte su B (legge empirica del caso).

Delle circa 4000 volte che avremo giocato su A,

vinceremo circa 2000 volte,

mentre delle circa 4000 volte che avremo giocato su B vinceremo circa 1000 volte.

Avremo perciò vinto 3000 volte circa. E di queste, pressappoco 2000 volte dovremo ringraziare A.

Perciò la probabilità richiesta (= probabilità che, avendo noi vinto, si debba ringraziare A) è $\frac{2000}{3000} = \frac{2}{3}$.

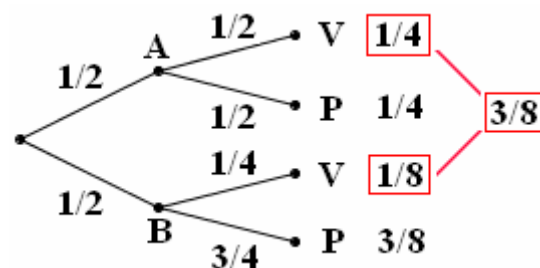
8000 giocate	4000 volte [circa] A	2000 V ●
		2000 P
	4000 volte [circa] B	1000 V ●
		3000 P

4) Pensando alle “fette di certezza”

Nella “torta della certezza”, di “peso” 1,
la “fetta di certezza” relativa a V
“pesa”, complessivamente, $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Di questa fetta da $\frac{3}{8}$,
la parte che compete all’evento “A, poi V” ha peso $\frac{1}{4}$.

Il rapporto tra le due fette è quindi $\frac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3}$.



UN ULTERIORE, BELL'ESEMPIO: GLI ARCIERI

- a) Se quattro arcieri A, B, C, D scoccano la loro freccia contemporaneamente e hanno probabilità, rispettivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ di colpire il bersaglio (NOTA) che probabilità c'è che dopo il tiro simultaneo risulti conficcata nel bersaglio esattamente 1 freccia?
NOTA: si tratta, evidentemente, di valutazioni approssimative, di tipo soggettivo/frequentista
- b) Se dopo il tiro simultaneo risulta conficcata nel bersaglio 1 e 1 sola freccia, che probabilità c'è che si tratti di quella dell'arciere A?

Risoluzione di a)

$$p(A) = \frac{1}{2} \quad p(B) = \frac{1}{3} \quad p(C) = \frac{1}{4} \quad p(D) = \frac{1}{5}$$

$$p(\text{"esattamente 1 freccia"}) = p(A \bar{B} \bar{C} \bar{D}) + p(\bar{A} B \bar{C} \bar{D}) + p(\bar{A} \bar{B} C \bar{D}) + p(\bar{A} \bar{B} \bar{C} D) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{24 + 12 + 8 + 6}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

Risoluzione di b)

Possiamo risolvere questo quesito b) ricorrendo, formalmente,

1) alla formula $p(X/Y) = \frac{p(X \wedge Y)}{p(Y)}$

2) oppure alla formula di Bayes.

I due procedimenti non differiscono molto né riguardo al principio ispiratore (sempre di “cause”, o piuttosto, in questo caso, di “eventi concomitanti”, o di “fette di certezza”, si tratta), né riguardo alla difficoltà nei calcoli (che sono anzi del tutto identici).

Dunque, vediamo.

1) con la formula $p(X/Y) = \frac{p(X \wedge Y)}{p(Y)}$

$$p(A / 1 \text{ e } 1 \text{ sola}) = \frac{p(A \wedge (1 \text{ e } 1 \text{ sola}))}{p(1 \text{ e } 1 \text{ sola})} = \frac{p(A \bar{B} \bar{C} \bar{D})}{p(A \bar{B} \bar{C} \bar{D}) + p(\bar{A} B \bar{C} \bar{D}) + p(\bar{A} \bar{B} C \bar{D}) + p(\bar{A} \bar{B} \bar{C} D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{24}{120}}{\frac{24}{120} + \frac{12}{120} + \frac{8}{120} + \frac{6}{120}} = \frac{24}{50} = 48\%$$

2) con la formula di Bayes

$$p(A / 1 \text{ e } 1 \text{ sola}) = \frac{p(A) \cdot p(1 \text{ e } 1 \text{ sola} / A)}{p(A) \cdot p(1 \text{ e } 1 \text{ sola} / A) + p(B) \cdot p(1 \text{ e } 1 \text{ sola} / B) + p(C) \cdot p(1 \text{ e } 1 \text{ sola} / C) + p(D) \cdot p(1 \text{ e } 1 \text{ sola} / D)}$$

$$= \frac{p(A) \cdot p(\bar{B} \bar{C} \bar{D})}{p(A) \cdot p(\bar{B} \bar{C} \bar{D}) + p(B) \cdot p(\bar{A} \bar{C} \bar{D}) + p(C) \cdot p(\bar{A} \bar{B} \bar{D}) + p(D) \cdot p(\bar{A} \bar{B} \bar{C})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \right)} = \frac{\frac{24}{120}}{\frac{24}{120} + \frac{12}{120} + \frac{8}{120} + \frac{6}{120}} = \frac{24}{50} = 48\%$$

NOTA: abbiamo scritto semplicemente $p(1 \text{ e } 1 \text{ sola} / A) = p(\bar{B} \bar{C} \bar{D})$ anziché $p(1 \text{ e } 1 \text{ sola} / A) = p(\bar{B} \bar{C} \bar{D} / A)$ per il fatto che le prestazioni di B, C e D in un dato tiro non sono condizionate dall'esito di A

ESERCIZI sul Teorema di Bayes

- 1) In un'urna U1 ci sono 2 palline Rosse e 1 Verde; in U2, 1 Rossa e 3 Blu; in U3, 2 Rosse e 3 Verdi.
Se si pesca da un'urna a caso non conoscendo di che urna si tratta, e la pallina estratta risulta Rossa, valutare la probabilità che l'urna di provenienza sia U3.
- 2) Le statistiche di un tribunale di provincia, relative ai processi ultimati nei trascorsi 15 anni, evidenziano che, fra gli accusati di un reato penale, il 24% era stato trattenuto in custodia cautelare (=carcerazione preventiva), gli altri lasciati a piede libero in attesa del processo.
Dei sottoposti a carcerazione preventiva, l'80% aveva poi avuto una sentenza di condanna definitiva, mentre fra gli altri soltanto il 64% erano stati riconosciuti colpevoli.
Determina, per un condannato di reato penale preso a caso, la probabilità di aver subito la custodia cautelare.
- 3) In un club di tifosi, i maschi sono il 75% e la metà di loro fuma. Fra le femmine, invece, fuma solo il 25%.
Che probabilità c'è per una persona presa a caso fra gli iscritti, di essere fumatore/fumatrice?
E presa a caso una persona che fuma in quel club, che probabilità c'è che si tratti di una donna?
- 4) Fra i fumatori di una certa città, il 60% acquista la marca "Bravo Furbo", e fra questi l'80% sono maschi.
Fra coloro che non comprano le sigarette "Bravo Furbo", la maggioranza (75%) è di femmine.
Preso una fumatrice a caso in quella città, che probabilità c'è che acquisti le "Bravo Furbo"?
- 5) In un paese asiatico, la probabilità che una radiolina della marca A sia difettosa è bassa: 0,1%.
La marca B, unica concorrente di A in quella nazione, fa ancora meglio: probabilità dello 0,05%.
Sul mercato, tuttavia, la marca A risulta prevalere, col 60% degli acquisti, perché la linea dei suoi prodotti è più carina. Che probabilità ha una radiolina perfettamente funzionante presa a caso, di essere della marca A?
- 6) Imposta un foglio elettronico in modo che l'utente possa inserire le probabilità relative ad un problema risolubile tramite la formula di Bayes (con $n=2$ e anche con $n=3$) e gli venga calcolata la risposta.

		$p(H1/E)$	$P(H2/E)$	<i>I dati vanno introdotti nelle celle ombreggiate</i>
$p(H1)=$	0,3	0,461538	0,538462	
$p(H2)=$	0,7			
$p(E/H1)=$	0,8			
$p(E/H2)=$	0,4			

Dal sito <http://classweb.gmu.edu> della George Mason University di Washington, USA, ecco due bei quesiti, uno sull'educazione dei figli e un altro sugli incidenti stradali.

- 7) In una certa nazione è noto che il 20% delle madri suole sculacciare i figli indisciplinati. L'85% delle madri che applicano questa pratica fanno uso di Valium, contro il 25% soltanto delle madri che non sculacciano. Questi dati sono tali da far supporre che il Valium induca le madri a sculacciare i loro figli? Discutine.
- 8) Una compagnia di assicurazioni auto prevede per i guidatori giovani una polizza più alta, in quanto questo gruppo tende ad avere un numero maggiore di incidenti. La compagnia distingue le età in 3 gruppi: A (sotto i 25 anni, 22% di tutti i suoi assicurati), B (25-39 anni, 43%), C (da 40 anni in su). I dati mostrano che in media ogni anno le percentuali di assicurati che hanno un incidente sono: 11% per il gruppo A, 3% per il B, 2% per il C.
 - a) Che percentuale di assicurati ci si attende abbia un incidente nei prossimi 12 mesi?
 - b) Se un assicurato X ha appena avuto un incidente, che probabilità c'è che abbia meno di 25 anni?

RISPOSTE

$$1) p(U3/R) = \frac{p(U3) \cdot p(R/U3)}{p(U1) \cdot p(R/U1) + p(U2) \cdot p(R/U2) + p(U3) \cdot p(R/U3)} = \frac{1/3 \cdot 2/5}{1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1/4 + 1/3 \cdot 2/5} = \dots = \frac{24}{79} \approx 30\%$$

$$2) p(CC/cond) = \frac{p(CC) \cdot p(cond/CC)}{p(CC) \cdot p(cond/CC) + p(\overline{CC}) \cdot p(cond/\overline{CC})} = \frac{0,24 \cdot 0,80}{0,24 \cdot 0,80 + 0,76 \cdot 0,64} = \frac{0,192}{0,6784} \approx 0,283$$

3) Il 43,75%; intorno al 14% 4) Il calcolo dà un valore prossimo al 28,6% 5) Circa il 60%

$$7) p(S/V) = \frac{p(S) \cdot p(V/S)}{p(S) \cdot p(V/S) + p(\overline{S}) \cdot p(V/\overline{S})} = \frac{0,20 \cdot 0,85}{0,20 \cdot 0,85 + 0,80 \cdot 0,25} = \frac{0,17}{0,17 + 0,20} = \frac{0,17}{0,37} \approx 0,46$$

$$p(S/\overline{V}) = \frac{p(S) \cdot p(\overline{V}/S)}{p(S) \cdot p(\overline{V}/S) + p(\overline{S}) \cdot p(\overline{V}/\overline{S})} = \frac{0,20 \cdot 0,15}{0,20 \cdot 0,15 + 0,80 \cdot 0,75} = \frac{0,03}{0,03 + 0,60} = \frac{0,03}{0,63} \approx 0,05$$

Dai dati emerge che se una donna assume Valium, è senz'altro molto più incline a sculacciare i propri figli, ma... attenzione! ... Sarà il Valium in sé a favorire questo comportamento, o piuttosto la depressione di cui plausibilmente soffrono queste donne, dato che fanno uso di Valium?

$$8a) \frac{22}{100} \cdot \frac{11}{100} + \frac{43}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{242 + 129 + 70}{10000} = \frac{441}{10000} \approx 4,4\%$$

$$8b) p(A/I) = \frac{p(A) \cdot p(I/A)}{p(A) \cdot p(I/A) + p(B) \cdot p(I/B) + p(C) \cdot p(I/C)} = \frac{0,22 \cdot 0,11}{0,22 \cdot 0,11 + 0,43 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,02} \approx 55\%$$