

STUDIO DI FUNZIONE

1) I GRANDI TEOREMI PRELIMINARI

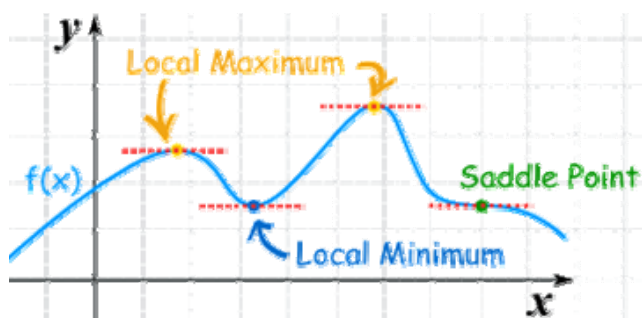
- 1.1 Funzioni continue su tutto un intervallo pag. 2
- 1.2 Il Teorema di Rolle 4
- 1.3 I Teoremi di Lagrange (o “del Valor Medio”) e di Cauchy 6
- 1.4 Il Teorema (meglio: i Teoremi) di De l’Hopital 10
 - Verso la dimostrazione 12
 - Dimostrazione 13
 - Esercizi sul Teorema di De l’Hopital 14
 - De l’Hopital e le funzioni esponenziale e logaritmica 16
 - I limiti notevoli “riscoperti” con De l’Hospital 17
- 1.5 Il Criterio di Derivabilità 18

2) LE BASI TEORICHE DELLO STUDIO DI FUNZIONE

- 2.1 Simbologia adottata 22
- 2.2 Funzioni crescenti o decrescenti:
 - I) in un insieme II) nell’intorno di un punto III) in un punto 22
- 2.3 Il segno della derivata e l’inclinazione del grafico 24
- 2.4 Massimi e minimi relativi e assoluti di una funzione 26
- 2.5 Flessi di una funzione 30
- 2.6 Cuspidi, punti angolosi 31
- 2.7 Punti stazionari 32
- 2.8 Ricerca dei punti di massimo, di minimo e di flesso orizzontale col metodo dello studio del segno della derivata prima 34
- 2.9 Ricerca dei punti di massimo, di minimo e di flesso orizzontale col metodo della derivata seconda (o delle derivate successive) 36
- 2.10 Concavita' di una curva in un punto 38
- 2.11 Ricerca dei flessi a tangente obliqua o verticale col metodo dello studio del segno della derivata seconda 40
- 2.12 Ricerca dei flessi (a tangente non verticale) col metodo delle derivate successive 43
- 2.13 Asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) 44

3) 🎵 🎵 🎵

RIASSUNTO “PRATICO” DELLE IDEE FONDAMENTALI 50- 53
TANTI ESEMPI SVOLTI 54-111 ED ESERCIZI 112-128



(figura tratta dal sito
www.mathsisfun.com)

“Studio di funzione”,
 di [Giancarlo Zilio](#),
 è distribuito
 con licenza
[Creative Commons](#)
[Attribuzione -](#)
[Non commerciale -](#)
[Non opere derivate](#)
[4.0 Internazionale](#)



STUDIO DI FUNZIONE

1) I GRANDI TEOREMI PRELIMINARI

1.1 FUNZIONI CONTINUE SU TUTTO UN INTERVALLO

Vale innanzitutto il seguente **TEOREMA FONDAMENTALE**:

Se f è una funzione CONTINUA su di un INTERVALLO I , allora anche $f(I)$ è un INTERVALLO

- Ricordiamo che col simbolo $f(I)$ si indica “l’insieme delle immagini dei punti di I ”, ossia “l’insieme dei valori assunti dalla funzione $f(x)$, cioè dalla y della funzione, quando x varia in I ” (dicendo “la funzione”, in questo, come in molti casi, si intende “la variabile dipendente”, “la y ”).
- L’insieme $f(I)$ viene anche chiamato “l’immagine di I attraverso la f ”.
Si può anche dire che $f(I)$ è “il codominio di f ”, se il dominio di f è l’insieme I , o anche se, pur essendo l’intero dominio di f più grande di I , si intende di far variare x solamente in I .

Esempi

Consideriamo le funzioni seguenti,

e per ognuna supponiamo che x vari sull’insieme I a fianco specificato, che è, in ciascun caso, un intervallo; osserviamo che ogni funzione della piccola rassegna è definita e continua sull’insieme considerato.

Bene, si può constatare che l’insieme dei valori che la y assume costituisce, in ciascun caso, ancora un intervallo!

$$\begin{array}{l} f(x) = 10 - 2x \quad I = [1, 3] \quad f(I) = [4, 8] \\ g(x) = x^2 \quad I = (-\infty; +\infty) \quad g(I) = [0; +\infty) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} g(x) = x^2 \quad I = (-1, 1) \quad g(I) = [0, 1) \\ h(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad I = (2, +\infty) \quad h(I) = \left(0; \frac{1}{3}\right) \end{array} \right.$$

Nel caso che la funzione sia CONTINUA in un INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO, valgono i quattro importanti **TEOREMI** qui di seguito elencati.

Se $y = f(x)$ è una funzione CONTINUA su di un intervallo CHIUSO E LIMITATO $[a, b]$, allora:

- (1) l’insieme $f([a, b])$ dei valori che la y assume, al variare di x in $[a, b]$, è anch’esso un intervallo chiuso e limitato;
- (2) la funzione f ammette minimo assoluto e massimo assoluto in $[a, b]$ (Teorema di Weierstrass; Karl Weierstrass, tedesco, 1815 - 1897)
- (3) la funzione f assume, almeno una volta, ogni valore compreso fra il suo minimo e il suo massimo (Teorema dei Valori Intermedi);
- (4) se $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi, allora f si annulla almeno una volta nell’intervallo aperto (a, b) (Teorema dell’Esistenza degli Zeri delle Funzioni Continue)

OSSERVAZIONI SULLE DIMOSTRAZIONI

Si può osservare che

- (2), (3), (4) sono conseguenze pressoché immediate di (1);
- (1), a sua volta, dipende in parte dal Teorema Fondamentale.

Ciò premesso, siamo purtroppo costretti a **rinunciare** alle dimostrazioni del Teor. Fondamentale e del Teor. (1), e quindi, in definitiva, di tutti i teoremi sopra enunciati.

Infatti esse richiederebbero nozioni di “**topologia**” (un settore della Matematica, che esplora e studia questioni, molto generali e ad un elevato livello di astrazione, in qualche modo ispirate dall’immaginazione geometrica) la cui presentazione, seppure sommaria, ci costringerebbe ad aprire una parentesi troppo ampia e specialistica.

Se sei interessato a queste tematiche, puoi ricercare, su Internet o in Biblioteca, nell’argomento “topologia”, o “spazi topologici”, o “spazi metrici”, le definizioni di “**insieme connesso**” e di “**insieme compatto**”, con i teoremi secondo i quali

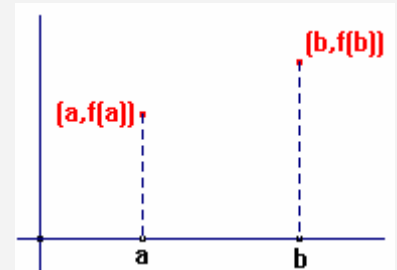
- “i sottoinsiemi di \mathbb{R} aventi la proprietà di essere sia ‘connessi’ che ‘compatti’ sono tutti e soli gli intervalli chiusi e limitati”
- “l’immagine di un insieme connesso attraverso una funzione continua è ancora un insieme connesso” (brevemente: “l’immagine continua di un connesso è ancora un connesso”)
- “l’immagine continua di un compatto è ancora un compatto”

OSSERVAZIONI

Si potrebbe affermare che tutti questi teoremi sono "geometricamente evidenti" ...

Pensiamo ad esempio al teorema (2), quello detto "di Weierstrass":
 "se $y = f(x)$ è una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora la funzione f ammette minimo assoluto e massimo assoluto in $[a, b]$ ".

Supponiamo di voler disegnare sull'intervallo $[a, b]$ della figura qui a fianco, una funzione $f(x)$ che sia continua su tutto l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.
 La nozione intuitiva di continuità su di un intervallo fa pensare ad una curva che possa essere tracciata "senza mai staccare la matita dal foglio" ... quindi dovremo partire con la punta della matita appoggiata sul punto di coordinate $(a, f(a))$ e muovere la matita senza mai alzarne la punta fino ad approdare in $(b, f(b))$.



Ora, si capisce che in questo nostro "viaggio" saremo **OBBLIGATI, PER FORZA**, a toccare un massimo assoluto da cui ridiscendere e un minimo assoluto dal quale risalire!

... tuttavia, giustificazioni "geometrico-intuitive" di questo tipo non sono ritenute sufficientemente rigorose, per diversi motivi:

- L'esistenza di funzioni stranissime ci mostra che, in Analisi, l'intuizione a volte può ingannare. Basti pensare che proprio il tedesco Weierstrass diede per primo (1871) un esempio di funzione continua su TUTTO un intervallo, ma non derivabile in NESSUN punto di quell'intervallo!!!
 Diciamo la verità, chi mai avrebbe scommesso che potesse esistere una funzione siffatta???

- In particolare, la possibilità di costruire funzioni come quella di Weierstrass appena citata, ma anche soltanto il pensare a una funzione come la

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{per } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

stramba e tutta "disgregata" ma tuttavia dotata della proprietà di essere **continua in $x = 0$** , ci fanno dubitare dell'idea che la continuità di una funzione su di un intervallo possa essere sempre interpretata come

"la possibilità di tracciamento del grafico senza mai staccare la matita dal foglio"

(ammettendo pure che questa idea legata all'esperienza concreta sia in qualche modo "matematizzabile", cioè traducibile in relazioni non equivocate fra entità matematiche astratte).

- E' atteggiamento caratterizzante della matematica l'organizzare ciascun tema oggetto di studio secondo una **struttura "ipotetico-deduttiva"** (basti pensare alla geometria euclidea ...)
 Insomma, si sceglie un sistema di proposizioni "di base" (= gli "assiomi") e, a partire da questi, per via puramente logica, si ricavano altre proposizioni "dimostrate" (= i "teoremi").
 Se una proposizione che si sospetta fortemente esser vera non è stata dimostrata come teorema,
 - o la si tiene "congelata" come "**congettura**" (= proposizione "plausibile", non smentita, ma comunque ancora in attesa di una dimostrazione)
 - oppure si decide di aggiungerla esplicitamente alla famiglia degli assiomi.
- Ancora: il dimostrare questioni numeriche restando in ambito puramente numerico (quindi, evitando di coinvolgere la geometria) permette di dare piena autonomia alla costruzione teorica dell' Aritmetica-Algebra-Analisi (in effetti, il completo **affrancamento dell'Analisi dalla Geometria** è considerato una delle maggiori conquiste intellettuali della matematica del Diciannovesimo secolo)

♥ Intendiamoci:

con ciò, non voglio dire che in Analisi si debba rinunciare all'intuizione geometrica, tutt'altro!

Questa, anzi, è utilissima, insostituibile!!!

Come scrisse August De Morgan (1806 -1871):

*"The moving power of mathematical invention is not reasoning but **imagination**".*

Voglio solo sottolineare che la validità di quegli enunciati, che siamo portati a intuire e a ritenere plausibili a partire da una visione geometrica, deve poi essere stabilita in via definitiva con catene deduttive fondate su basi puramente **razionali**.

1.2 IL TEOREMA DI ROLLE

TEOREMA DI ROLLE

Michel Rolle, francese, 1652-1719

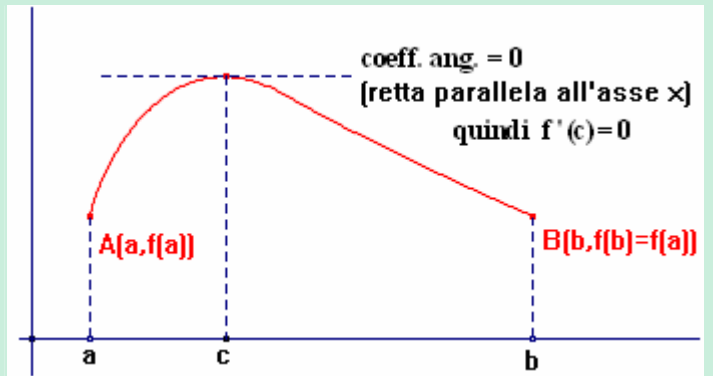
Ipotesi

- f continua su $[a, b]$
- f derivabile perlomeno su (a, b)
- $f(a) = f(b)$

Tesi

Esiste almeno un punto c in (a, b) tale che

$$f'(c) = 0$$



Giustificazione con l'intuizione geometrica

La curva grafico della funzione, partendo dal punto $A(a, f(a))$, si snoda con continuità, senza interruzioni, fino ad approdare nel punto $B(b, f(b))$. Ma A e B hanno la stessa ordinata (infatti per ipotesi è $f(a) = f(b)$); quindi, **se il grafico parte da A in salita (o, rispettivamente, in discesa), per poter giungere a B , che si trova alla stessa "altezza" di A , dovrà prima o poi ridiscendere (risalire) e nel cambiare la "direzione di marcia" sarà obbligato a toccare un massimo (minimo), nel quale la retta tangente sarà orizzontale e quindi la derivata sarà nulla.**

Dimostrazione rigorosa

Sia f continua su $[a, b]$, derivabile perlomeno su (a, b) , e tale che $f(a) = f(b)$.

Per il teorema di Weierstrass, f ammette, su $[a, b]$, minimo assoluto m e massimo assoluto M .

- Se è $m = M$, allora f è costante su tutto $[a, b]$, quindi $f'(x) = 0$ per ogni x di $[a, b]$ e la tesi è vera.
- Se è $m \neq M$, allora almeno uno dei due valori m, M deve essere distinto dal valore $f(a) = f(b)$; quindi, dovrà essere assunto dalla f in corrispondenza di un'ascissa c diversa sia da a che da b ($a < c < b$). Dico ora che $f'(c) = 0$.

Supponiamo, per meglio fissare le idee, che c sia il punto di MINIMO assoluto:

$f(c) = m$, ossia: $\forall x \in [a, b], f(x) \geq m = f(c)$ (analogo sarebbe il ragionamento nel caso $f(c) = M$)

- Se costruiamo il rapporto incrementale DESTRO in c , avremo: $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$
perché, su tutto $[a, b]$, è $f(x) \geq f(c)$ quindi $f(x) - f(c) \geq 0$,
e inoltre, essendo x alla *destra* di c ($x > c$), sarà pure $x - c > 0$.
- Se invece costruiamo il rapporto incrementale SINISTRO in c , avremo: $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$
perché, su tutto $[a, b]$, è $f(x) \geq f(c)$ quindi $f(x) - f(c) \geq 0$,
ma, essendo questa volta x alla *sinistra* di c ($x < c$), sarà $x - c < 0$.

Ora l'ipotesi ci dice che f è derivabile su tutto (a, b) quindi anche in c ;

pertanto i due rapporti incrementali destro e sinistro in c dovranno tendere allo stesso limite

(la derivata $f'(c)$) quando si fa tendere x a c : $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$

Essendo, come abbiamo visto, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ quando $x > c$ e $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ quando $x < c$,

dovrà necessariamente essere $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ e $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

Ora, **tali due limiti, in considerazione dei loro segni, possono essere uguali soltanto se entrambi nulli.**

Con ciò resta provato che $f'(c) = 0$, cioè la tesi.

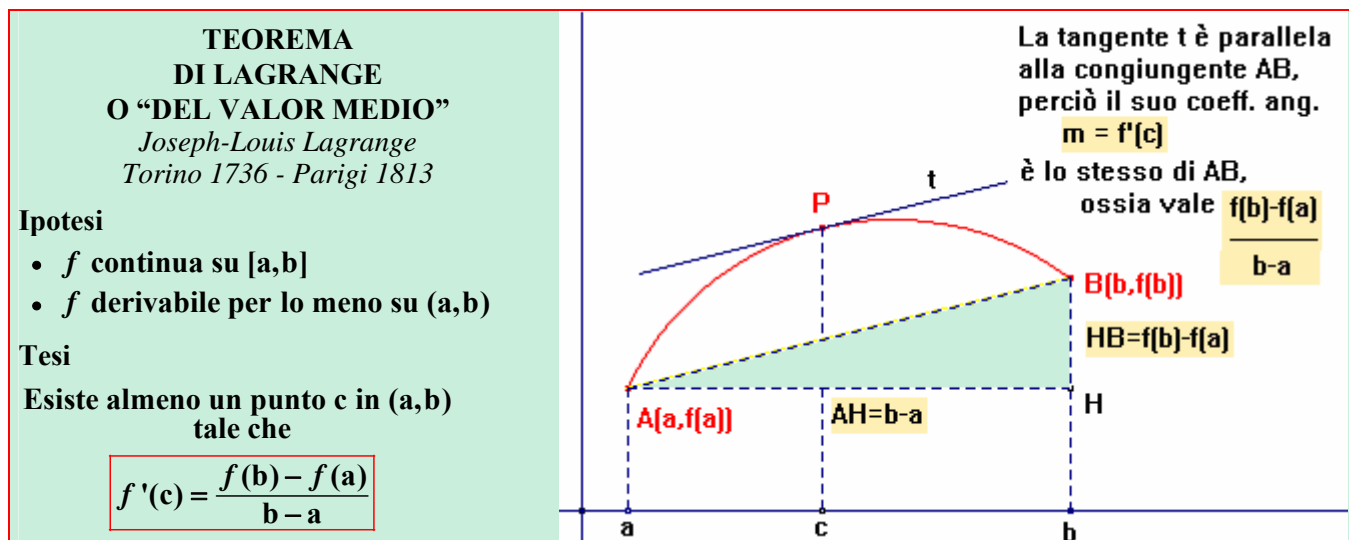
ESERCIZI sul teorema di Rolle (risposte alla fine)

- 1) Considera la funzione $y = x^3 - x$ sull'intervallo $[0, 1]$.
 - a) Dopo aver controllato che esistono le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.
 - b) Traccia infine il "grafico probabile" della funzione (su tutto il suo dominio \mathbb{R}), *tenendo anche conto dei punti in cui hai stabilito che la derivata si annulla (in questi punti la retta tangente dovrà essere orizzontale!)*.
- 2) Considera la funzione $y = \sqrt{1 - x^2}$ sull'intervallo $[-1, 1]$
 - a) Dopo aver controllato che esistono (appena appena!) le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.
 - b) Grafico probabile.
- 3) Considera la funzione $y = x^4 - 2x^2$ sull'intervallo $[-3, 3]$
 - a) Dopo aver controllato che sussistono le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.
 - b) Grafico probabile della funzione (su tutto il suo dominio \mathbb{R}).
- 4) Spiega perché Rolle non è applicabile alla funzione $y = |x|$ su $[-1; 1]$
- 5) Determina il valore del parametro k in modo che alla funzione $y = \frac{kx - 1}{x^2 - 3}$ sia applicabile Rolle su $[2; 4]$
 - a) Determina poi l'ascissa c in $(2, 4)$ tale che $f'(c) = 0$
 - b) Spiega perché non avrebbe avuto senso, per nessun valore di k , applicare Rolle su $[0; 2]$
 - c) Grafico probabile (su tutto il dominio).
- 6)
 - a) Applica Rolle alla funzione $y = \sin x - \cos x$, su $[0, 2\pi]$ verificando che di punti c tali che $f'(c) = 0$ ce n'è più d'uno.
 - b) Traccia il grafico probabile della funzione su $[0, 2\pi]$, costruendolo per differenza di ordinate.
- 7) Considera la funzione $f(x) = 3\sqrt{x} - x$
 - a) Determina il secondo estremo di un intervallo, il cui primo estremo sia 1, sul quale sia possibile applicare alla $f(x)$ il teorema di Rolle.
 - b) Successivamente, determina in tale intervallo l'ascissa c in cui $f'(c) = 0$.
 - c) Grafico probabile della funzione (su tutto il dominio).

RISPOSTE

- 1) $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 2) $c = 0$; dico che le condizioni per l'applicabilità del Teorema di Rolle sussistono "appena appena" perché la funzione non è derivabile agli estremi dell'intervallo.
- 3) Ben 3 possibili valori di c : $-1, 0, +1$
- 4) Rolle non è applicabile in questo caso, perché la funzione non è derivabile su tutto $(-1, 1)$: infatti ha derivata sinistra e destra distinte ("punto angoloso") in $x = 0$.
- 5) a) $k = \frac{6}{11}$ b) $c = \frac{11 + \sqrt{13}}{6} \approx 2.434$ c) perché la funzione non è definita su tutto $[0; 2]$: il dominio si interrompe in $x = \pm\sqrt{3}$, e $0 < \sqrt{3} < 2$.
- 6) $c_1 = \frac{3}{4}\pi$, $c_2 = \frac{7}{4}\pi$
- 7) L'altro estremo è 4; $c = \frac{9}{4}$

1.3 I TEOREMI DI LAGRANGE (O “DEL VALOR MEDIO”) E DI CAUCHY



Giustificazione con l'intuizione geometrica (vedi la figura sovrastante)

Si capisce che, se f verifica le ipotesi del teorema, **deve per forza esistere un punto P sul grafico nel quale la tangente t alla curva sia parallela alla secante passante per i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.**

Detta c l'ascissa di P , la tangente t ha coefficiente angolare

$$f'(c)$$

e la secante AB ha coefficiente angolare

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ma essendo t ed AB parallele, tali due coefficienti angolari saranno uguali.

Dimostrazione rigorosa del teorema di Lagrange

Si effettua **ric conducendosi al teorema di Rolle**.

A tale scopo, si costruisce la **funzione ausiliaria**

$$F(x) = f(x) - kx$$

con k scelto in modo tale che a tale funzione F si possa poi applicare Rolle.

Occorre perciò che sussista la condizione $F(a) = F(b)$ e quindi che sia

$$f(a) - ka = f(b) - kb$$

da cui ricaviamo

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Applichiamo dunque Rolle alla funzione

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x \quad (\text{d\`a, ricontrolla, per sostituzione, che \u00e9 proprio } F(a) = F(b) !);$$

ne deduciamo l'esistenza di un'ascissa c , strettamente compresa fra a e b , per la quale

$$F'(c) = 0$$

Ma \u00e9

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

quindi avremo, per questa ascissa $x = c$,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ossia

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

come volevasi dimostrare.

ESERCIZI sul Teorema di Lagrange (risposte alla pagina successiva)

- 1) E' applicabile Lagrange alla funzione $y = \sqrt{x}$ su $[0, 4]$?
- 2) Inventa una funzione+intervallo per cui Lagrange non sia applicabile.
- 3) Applica Lagrange alla funzione $y = x^5 + x^3 + 1$ sull'intervallo $[-1, 1]$, determinando l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.
- 4) Applica Lagrange alla funzione $y = e^{-x}$ sull'intervallo $[0, 1]$, determinando l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.
- 5) Applica Lagrange alla funzione $y = ax^2 + bx + c$ sull'intervallo $[x_1, x_2]$, determinando l'ascissa di cui il teorema assicura l'esistenza.
- 6) a) Applica Lagrange alla funzione $y = 6/x$ sull'intervallo $[1, 3]$, determinando l'ascissa c .
 b) Indica con A, B i punti del grafico della funzione, di ascisse 1 e 3 rispettivamente. Dovresti ora essere in grado di stabilire qual è il punto N dell'arco della curva, di estremi A e B, che ha dalla retta AB la distanza massima, e di calcolare quanto vale tale distanza massima.



RISPOSTE

1) Sì: la funzione è continua sull'intervallo chiuso $[0, 4]$ e derivabile su tutto l'intervallo aperto $(0, 4)$. E' pur vero che la funzione non è derivabile in $x = 0$, perché in tale ascissa la derivata diventa infinita, ma si tratta di un *estremo* dell'intervallo, *non* di un suo punto interno.

2) Qui ci si può sbizzarrire... basta che la funzione considerata

a) *non sia definita su tutto l'intervallo*: es. $y = 1/x$ su un intervallo contenente l'ascissa 0, come $[-1; 1]$

b) *oppure sia definita su tutto l'intervallo ma abbia in esso una discontinuità di specie qualsiasi*:

- potrai servirti di una funzione definita "a tratti", o "per casi", come ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{per } 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{per } x \in [-\pi, \pi] - \{0\} \\ 5 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1/x & \text{per } -1 \leq x < 0 \vee 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

- potrai scomodare funzioni come $\text{int}(x)$ ="parte intera" di x oppure $m(x)$ ="mantissa" di x
- per non parlare di discontinuità più estese e "drammatiche" (funzione di Dirichlet e affini)
- ...

c) *oppure ancora abbia uno o più punti di non derivabilità*.

- Tipiche a tale proposito sono le funzioni col simbolo di valore assoluto che presentano di norma punti angolosi:

ad es., $y = x^2 + |x - 1|$ su di un qualsiasi intervallo chiuso contenente l'ascissa 1, come $[0; 2]$

- Puoi anche considerare situazioni di "derivata infinita",

come $y = \sqrt[3]{x}$ o $y = \sqrt[3]{x^2}$ su di un qualsivoglia intervallo chiuso contenente l'ascissa 0, come $[-1, 1]$

- La funzione $f(x) = \begin{cases} x \frac{\text{sen } \pi}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ è continua ovunque ma non è derivabile per $x = 0$

- Puoi inventare una funzione definita "a tratti", che sia continua su tutto un intervallo ma presenti un punto di non derivabilità in corrispondenza dell'ascissa in cui cambia l'espressione analitica: es.

$$p(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{per } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- Se vuoi fare un po' di "scena", potresti citare la funzione di Weierstrass "continuous but nowhere differentiable" di cui abbiamo parlato all'inizio del capitolo
- ...

3) $c_1 = -\sqrt{\frac{2}{5}}, c_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}$

4) $1 - \ln(e - 1)$

5) $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$

6) $c = \sqrt{3}; N(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}); d = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \approx 0.479$

CONSEGUENZE NOTEVOLI DEL TEOREMA DI LAGRANGE

TEOREMA: se una funzione ha DERIVATA NULLA in tutti i punti di un intervallo (chiuso o aperto, limitato o illimitato), essa è COSTANTE in quell'intervallo

Dimostrazione

Se è $f'(x) \equiv 0$ su tutto un intervallo I (il simbolo \equiv vuol dire “identicamente uguale a”) allora, presi due qualsivoglia punti x_1, x_2 di I , dovrà essere necessariamente, $f(x_1) = f(x_2)$ in quanto, se così non fosse, ossia se $f(x_1)$ fosse diverso da $f(x_2)$, per il teorema di Lagrange esisterebbe, fra x_1 e x_2 , un'ascissa c nella quale si avrebbe

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$$

contro l'ipotesi che $f'(x)$ sia identicamente nulla in I . Ciò prova che la f è costante su I .

TEOREMA: se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno DERIVATE UGUALI in tutti i punti di un intervallo (chiuso o aperto, limitato o illimitato), allora DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE

Dimostrazione

Se è $f'(x) \equiv g'(x)$ su tutto un intervallo I , allora, considerata la funzione ausiliaria $F(x) = f(x) - g(x)$, si avrà $F'(x) = f'(x) - g'(x) \equiv 0$ su I , da cui, per il teorema precedente, $F(x) = c$ con c costante, e quindi $f(x) - g(x) = c$, come volevasi dimostrare.

Perché il Teorema di Lagrange viene anche detto “del valor medio”?

In Fisica, dato lo spazio percorso in funzione del tempo attraverso la funzione $s = s(t)$, la derivata $s'(t) = ds/dt$ fornisce, istante per istante, la velocità del moto: $s'(t) = v(t)$

Se l'intervallo temporale nel quale vogliamo studiare il moto è $a \leq t \leq b$,

la velocità media è data invece dal rapporto $\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$.

Ricordiamo che “velocità media” di un moto significa

“quella velocità la quale, se fosse stata mantenuta costante per tutto il tempo del moto, avrebbe dato luogo al medesimo spostamento complessivo che si è registrato in regime di velocità varia”.

Ora, il valore $t = c$ di cui il teorema di Lagrange assicura l'esistenza, è tale che $s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$;

quindi la velocità in tale istante è $v(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} =$ velocità media del moto.

In definitiva, Lagrange assicura

(se, come di norma avviene, la funzione $s(t)$ soddisfa a determinate ipotesi di regolarità)

l'esistenza di un istante c nel quale la velocità istantanea è uguale alla velocità media del moto:

di qui la denominazione del teorema.

TEOREMA DI CAUCHY

Augustin Louis Cauchy, francese, 1789-1857

- Ipotesi**
- f, g continue su $[a, b]$
 - f, g derivabili per lo meno su (a, b)
 - $g'(x) \neq 0$ su tutto (a, b)

Tesi Esiste almeno un punto c in (a, b) tale che
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dimostrazione

Come per Lagrange, si utilizza una funzione ausiliaria:

$F(x) = f(x) - k \cdot g(x)$, con k determinato in modo che $F(a) = F(b)$;

a questa funzione ausiliaria F si applicherà poi il teorema di Rolle, deducendo facilmente la tesi.

1.4 II TEOREMA (MEGLIO: I TEOREMI) DI DE L'HOPITAL

Teorema (PRIMO TEOREMA DI DE L'HOPITAL)

Guillaume de l'Hôpital, francese, 1661-1704

Sia I_c un intorno di $c \in \mathbb{R}$, e siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite e derivabili su tutto $I_c - \{c\}$ (non è necessario fare alcuna ipotesi sul comportamento delle due funzioni IN c , dove, addirittura, l'una o l'altra o entrambe le funzioni potrebbero persino non essere definite).

Sia inoltre $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$

cosicché il calcolo del limite $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenti come forma di indecisione $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Supponiamo infine che sia $g'(x) \neq 0$ su tutto $I_c - \{c\}$.

Bene!

Il teorema di cui ci occupiamo dice che, *sotto le ipotesi di cui sopra*,

SE ESISTE il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ALLORA ESISTE pure il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ E COINCIDE col precedente,

ossia risulta

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sin(\pi x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{\pi \cos(\pi x)} = -\frac{3}{\pi}$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

la catena appena scritta ha senso perché il secondo dei due limiti, quello del rapporto fra le derivate, esiste ...

nel caso non fosse esistito il secondo limite,

il discorso per quanto riguarda il primo limite sarebbe rimasto aperto.

Vale a dire:

quando il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste,

de l'Hopital non è applicabile e quindi nulla si può dire, a priori, sul $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$;

quest'ultimo potrà non esistere, oppure esistere finito o infinito, a seconda dei casi.

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(4x-3)}{x^2+7x-8} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{4}{4x-3}}{2x+7} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(4x-3)(2x+7)} = \frac{4}{9}$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^3-3x-2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{3x^2-3} = \infty$

L'alternativa a De l'Hopital, in quest'ultimo caso, sarebbe stata di scomporre in fattori e semplificare:

con De l'Hopital, comunque, la determinazione del limite risulta più rapida.

In pratica, il teorema considerato dice che

(se, beninteso, sono verificate determinate ipotesi)

il limite del rapporto di due funzioni,

che si presenti sotto la forma di indecisione $[0/0]$,

è uguale al limite del rapporto fra le loro derivate!!!

Il teorema vale anche se l'intorno I_c è solo unilaterale.

E vale pure nel caso in cui x , anziché tendere a $c \in \mathbb{R}$, tenda a $+\infty$ oppure a $-\infty$.

IL "SECONDO TEOREMA DI DE L'HOPITAL"

Un enunciato analogo al precedente vale anche se il limite del rapporto f/g
si presenta sotto la forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 4}{3x + 2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0^+$

Quando si cita il "Teorema di De l'Hopital" ci si vuole di norma riferire
indifferentemente all'uno o all'altro dei due teoremi che abbiamo presentato,
o, se si preferisce, all'unico enunciato che si otterrebbe riunendoli.

Quando il rapporto delle derivate risulta essere ancora una forma di indecisione $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$
è possibile applicare il Teorema di De l'Hopital una seconda volta, ed eventualmente poi una terza ...

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 + x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x + 2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$

Il teorema di De l'Hopital si riferisce alle forme di indecisione $[0/0]$ oppure $[\infty/\infty]$;
tuttavia,

anche le forme $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$ e le forme di indecisione con potenze: $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$
possono a volte essere risolte riconducendole a $[0/0]$ oppure $[\infty/\infty]$ e poi applicando De l'Hopital.

A tale scopo, si utilizzeranno le tre identità seguenti:

1) $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{f}{1}}{\frac{1}{g}}$

2) $f(x)^{g(x)} =$

3) $f - g = f \left(1 - \frac{g}{f} \right) = g \left(\frac{f}{g} - 1 \right)$

(si lascerà a numeratore l'una o l'altra delle due funzioni, a seconda della convenienza) $= e^{\ln [f(x)^{g(x)}]}$
 $= e^{g(x) \ln f(x)}$ (si raccoglierà o l'una o l'altra delle due funzioni, a seconda della convenienza; tuttavia, di norma queste ultime formule non sono molto utili perché possono essere sostituite da procedimenti alternativi più vantaggiosi, ad esempio un banale denominatore comune)

Esempio 6 $[0 \cdot \infty]$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0^-$

Esempio 7 $[\infty \cdot 0]$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{+e^{-x}} = 0^+$ (NOTA)

NOTA: Verifica tu che lasciando a numeratore l'esponenziale, cioè passando a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1/x^2} \dots$$

... il tentativo di applicare de l'Hopital sarebbe fallito ☹ perché avrebbe portato ad espressioni via via più complicate rispetto a quella di partenza.

Esempio 8 $[0^0]$ $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln (\sin x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln \sin x}$

e dopo questi passaggi preliminari, andremo a calcolare il limite della funzione ad esponente riconducendoci ad un quoziente "trattabile" con De l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2 \cos x}{\sin x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \overset{0^+}{x} \cdot \overset{1}{\cos x} = 0^-$$

In definitiva, tornando all'esercizio iniziale, avremo $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\overbrace{x \cdot \ln \sin x}^{\rightarrow 0}} = 1$

VERSO LA DIMOSTRAZIONE - Un'interpretazione geometrica del teorema di De l'Hopital

La figura qui sotto riportata vuole suggerire un'interpretazione geometrica molto suggestiva del Teorema di De l'Hopital.

Proponiamoci di calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Tale limite si presenta sotto la forma di indecisione [0/0]: c'è dunque un "conflitto"

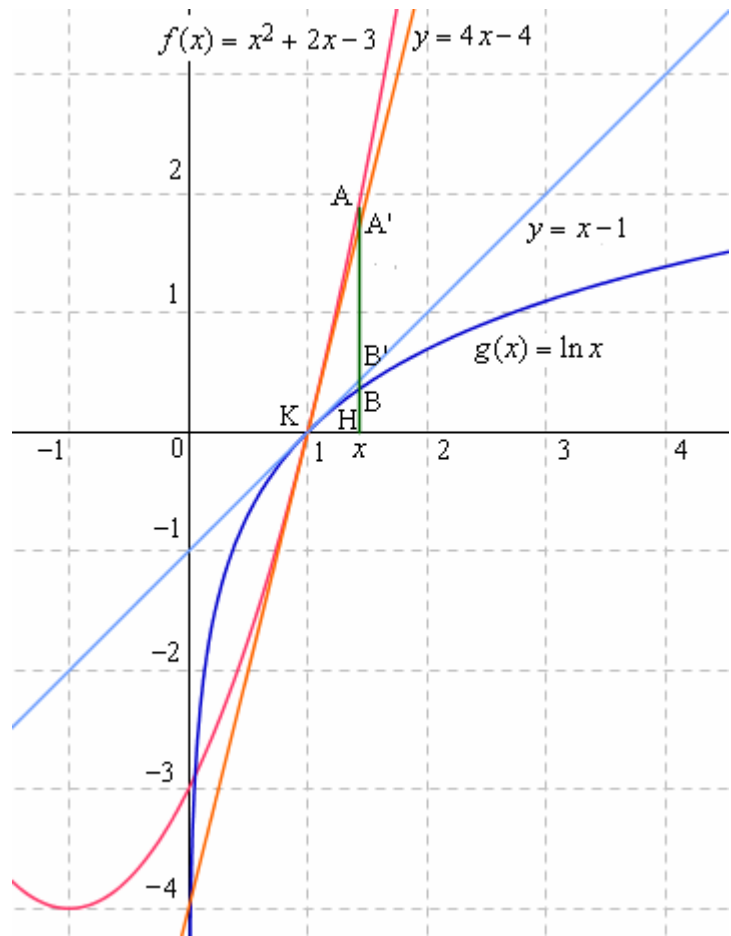
fra la funzione a denominatore, che col suo tendere a zero "vorrebbe"

far impennare la frazione verso l'infinito, e la funzione a numeratore, che col suo tendere a zero "vorrebbe"

schacciare la frazione verso lo zero.

Il valore del limite dipenderà dalla **RAPIDITA'** con cui tendono a zero, rispettivamente, numeratore $f(x)$ e denominatore $g(x)$.

Ma la rapidità nel tendere a zero di $f(x)$ e, rispettivamente, $g(x)$, è legata alla **PENDENZA** con cui il grafico di ciascuna funzione confluisce verso lo zero!



E tale pendenza non è altro che la pendenza della retta tangente in $K(1,0)$ a ciascuna curva (legata, a sua volta, al **COEFFICIENTE ANGOLARE della tangente** ossia alla **DERIVATA** della funzione!)

Cerchiamo di mettere meglio a fuoco questa idea,

l'idea cioè di **chiamare in causa le rette tangenti** alle due curve in K , e il loro coefficiente angolare.

Prendiamo un'ascissa x (l'ascissa del punto H in figura) prossima a 1, e andiamo a considerare il rapporto delle rispettive ordinate $f(x)$ e $g(x)$ (rapporto di cui ci interessa il limite per x che tende a 1).

Poiché siamo in prossimità del punto K ,

i grafici delle due curve "si confondono con" le rispettive rette tangenti in K .

Il valore del rapporto $f(x)/g(x)$ è quindi **ottimamente approssimato** dal valore del rapporto fra le due ordinate, che corrispondono a x NON sulle curve $y = x^2 + 2x - 3$ e $y = \ln x$, bensì sulle rispettive *rette tangenti* in K .

Avremo allora

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{y_A}{y_B} \approx \frac{y_{A'}}{y_{B'}} = \frac{HA'}{HB'} = \frac{m_{KA'} \cdot KH}{m_{KB'} \cdot KH} = \frac{m_{KA'}}{m_{KB'}} = \frac{f'(1)}{g'(1)}$$

↓
come confidiamo che sia,
essendo le nostre due
funzioni f, g
molto "regolari"

La catena appena scritta costituisce un **abbozzo** di giustificazione

(non è sufficientemente preciso né sufficientemente generale per poter essere considerato una "dimostrazione") del Teorema di De l'Hopital.

Ma ecco, alla pagina successiva, la "vera" dimostrazione, riferita a quello che abbiamo chiamato Il "Primo Teorema di De l'Hopital", e la cui ipotesi e tesi ti invito a rivedere, prima di iniziare la lettura.

Il "Secondo Teorema di De l'Hopital" avrebbe una dimostrazione analoga (anzi, più semplice, non essendoci in quel caso il problema del comportamento della funzione IN c).

DIMOSTRAZIONE del Teorema di De l'Hopital (nel caso del Primo Teorema)

L'ipotesi vincola il comportamento delle due funzioni $f(x)$, $g(x)$ IN PROSSIMITA' di c :

- $f(x)$ e $g(x)$ definite e derivabili su tutto un intorno I_c di c , ad eccezione al più del punto c ;
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$;
- $g'(x) \neq 0$ su tutto $I_c - \{c\}$
- esiste il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ma non richiede alcunché riguardo al comportamento di $f(x)$ e $g(x)$ IN c , dove le due funzioni potrebbero addirittura non essere definite.

Ciò finirebbe per complicarci alquanto la vita, ma (IDEA!) dato che la tesi riguarda ciò che accade quando x viene FATTO TENDERE a c (e NON ciò che avviene con x UGUALE A c), potremmo superare l'ostacolo andando a considerare, al posto delle funzioni date $f(x)$, $g(x)$, i loro "prolungamenti per continuità in c ", ossia le due funzioni ausiliarie

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq c \\ 0 & \text{per } x = c \end{cases}; \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{per } x \neq c \\ 0 & \text{per } x = c \end{cases}$$

Nel caso in cui $f(x)$ sia continua in c , cioè si abbia non solo $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$, ma anche $f(c) = 0$,

la F coincide perfettamente con f ; diciamo che questo è il caso in cui l'introduzione della F sarebbe inutile; se invece $f(x)$ è discontinua in c (perché non è definita in c , oppure perché $f(c)$ è diverso da 0), la F differisce dalla f esclusivamente per il comportamento in c , ma è del tutto identica a f fuori dall'ascissa c ; in compenso, la F è più "brava" della f perché, oltre a risultare $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = 0$, è pure $F(c) = 0$.

E le stesse cose si possono affermare riguardo alla G nei confronti della g .

Delle due funzioni F e G possiamo dunque dire che:

- $F(x)$ e $G(x)$ sono definite e continue su tutto I_c e derivabili su tutto $I_c - \{c\}$;
- $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = \lim_{x \rightarrow c} G(x) = 0$ e $F(c) = G(c) = 0$;
- $G'(x) \neq 0$ su tutto $I_c - \{c\}$
- esiste il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)}$

E se ora riusciremo a dimostrare la tesi con riferimento alle due funzioni "figlie" F , G , vale a dire:

se riusciremo a far vedere che esiste il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{G(x)}$ ed è $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)}$,

avremo provato pure la tesi originaria, quella sulle funzioni "madri" f , g , in quanto le "figlie" F e G coincidono perfettamente, al di fuori dell'ascissa c , con le "madri" f e g .

Consideriamo dunque il rapporto $\frac{F(x)}{G(x)}$.

Possiamo scrivere la catena $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - 0}{G(x) - 0} = \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)}$.

Ora, il teorema di Cauchy, applicato all'intervallo chiuso di estremi c , x (intervallo che sarà $[c, x]$ oppure $[x, c]$ a seconda che x si trovi a destra o a sinistra di c)

ci assicura che internamente a questo intervallo esiste un'ascissa c_x per la quale $\frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}$

(controlla tu con attenzione: le condizioni di applicabilità di Cauchy sono assicurate dall'ipotesi ...).

Ricapitolando, per questa ascissa c_x , compresa fra c e x , si ha $\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \frac{F(x)}{G(x)}$.

Ma a questo punto siamo a posto !!! ☺

Sì, perché dato che esiste il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)}$, essendo c_x compreso fra c e x esisterà pure il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}$

e sarà uguale al precedente, ossia varrà l'uguaglianza $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)}$,

da cui $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{G(x)}$, C.V.D.

ESERCIZI sul Teorema di De l'Hopital

- 1) Applicando il Teorema di De l'Hopital, verifica che: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\ln x} = 5$
- 2) Verifica che $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 3$ a) scomponendo e semplificando (per due volte di seguito)
b) applicando de l'Hopital (per due volte di seguito)
- 3) Verifica applicando il Teorema di de l'Hopital la correttezza dei limiti seguenti, osservando comunque che per determinarli sarebbe sufficiente, come è ben noto, considerare i gradi dei polinomi in gioco:
- a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 + x + 1} = \pm\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^3 + x^2 + 8x + 14}{x^4 - x^2 + 1} = 0$

- 4) Considera i limiti notevoli seguenti (già noti) e ritrova i loro valori applicando de l'Hopital:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

i) **ESERCIZIO SVOLTO:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k, \quad k \in \mathbb{R}$

RISOLUZIONE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \cdot (1+x)^{k-1}}{1} = k \cdot 1^{k-1} = k \cdot 1 = k$

5) ESERCIZIO SVOLTO

Verifica che, per x che tende a zero, sul rapporto di funzioni

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin \frac{\pi}{x}}{\sin x}$$

de l'Hospital NON è applicabile perché il rapporto delle derivate non tende ad alcun limite; ciononostante, il limite di $f(x)/g(x)$, per x che tende a zero, esiste (e vale 0).

Questo bel controesempio mostra che De l'Hopital esprime una condizione SUFFICIENTE, MA NON NECESSARIA, per l'esistenza del limite in questione.

RISOLUZIONE: $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cdot \sin \frac{\pi}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{\cos x} = \frac{2x \cdot \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cdot \cos \frac{\pi}{x}}{\cos x}$

quindi, in effetti, il rapporto delle derivate non tende ad alcun limite al tendere di x a 0:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{tende} \\ \text{a zero} \end{array} \boxed{2x} \cdot \begin{array}{c} \text{oscilla} \\ \text{fra } -1 \text{ e } 1 \end{array} \boxed{\sin \frac{\pi}{x}} - \pi \cdot \begin{array}{c} \text{oscilla} \\ \text{fra } -1 \text{ e } 1 \end{array} \boxed{\cos \frac{\pi}{x}}}{\begin{array}{c} \text{tende a 1} \\ \boxed{\cos x} \end{array}}$$

Ed ecco ora, SENZA ovviamente de l'Hopital, il calcolo del limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{\pi}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \begin{array}{c} \text{tende a 1} \\ \boxed{x} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{tende a zero} \\ \boxed{x} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{oscilla} \\ \text{fra } -1 \text{ e } 1 \end{array} \boxed{\sin \frac{\pi}{x}} = 0$$

- 6) Stabilisci se è possibile applicare de l'Hopital alla determinazione del limite seguente: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Verifica, comunque, dividendo per x sia il numeratore che il denominatore, che tale limite vale 1.

7) Verifica, col Teorema di de l'Hopital, i limiti notevoli seguenti:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d) **ESERCIZIO SVOLTO:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n = 2, 3, 4, 5, \dots$

RIS.: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \stackrel{H}{=} \dots \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$

e) **ESERCIZIO SVOLTO:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad n = 2, 3, 4, \dots$

tende a 0
(es. 7c) tende a 0
RIS.: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} = 0.$

In alternativa: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n x^n} = 0$

f) **ESERCIZIO SVOLTO:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x}{x} = 0$

RIS. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln^3 x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{1}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 \ln^2 x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24 \ln x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24}{x} = 0$

8) Servendoti del Teorema di de l'Hopital, calcola i limiti seguenti (risultati in fondo alla pagina):

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \dots$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{e^{-x}} = \dots$ i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \dots$

l) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\sqrt{x} - 2} = \dots$ m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 64}{\sqrt{x} - 2} = \dots$ n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{4\sqrt[3]{2x+5} + 7} = \dots$

o) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{\ln(3x^2+5x+7)} = \dots$ p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+8}}{x^3 + x^2 + x + 1} = \dots$ q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x+11)}{e^{x-4}} = \dots$

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^x} = \dots$ s) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \dots$ t) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{2x - \pi}} = \dots$

u) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln[x^{(x^2)}]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2 \cdot \ln x} = \dots$ perché con de l'Hospital si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \dots$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} = \dots$ w) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{x-1}} = \dots$ z) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = \dots$

RISULTATI: g) 0 h) 0 i) 0 l) 192 m) $+\infty$ n) $+\infty$ o) $\pm\infty$ p) $+\infty$ q) 0 r) 0 s) 0
 t) 0 u) 1, essendo uguale a 0 il limite dell'esponente v) e^2 w) $1/e$ z) $-1/2$

**De l'Hopital mostra quanto è "FORTE" la funzione ESPONENZIALE
e quanto è "DEBOLE" la funzione LOGARITMICA**

a)

Con de l'Hopital si può provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ cioè per } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \text{ cioè per ogni } \alpha > 0$$

Ciò è IMPORTANTISSIMO e può essere condensato nello "slogan":

la funzione esponenziale tende all'infinito PIU' RAPIDAMENTE di qualsiasi funzione algebrica, comunque alto sia l'esponente di quest'ultima.

Se anche prendiamo $n=1000$, o ancora più alto, non riusciremo mai a costruire una funzione algebrica che riesca a competere con l'esponenziale, nella rapidità del tendere a infinito!!!

"L'ESPONENZIALE VINCE" CONTRO LA FUNZIONE ALGEBRICA!!!

b)

De l'Hopital permette poi di dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \text{ cioè per ogni } \alpha > 0$$

Ciò è IMPORTANTISSIMO e può essere condensato nello "slogan":

la funzione logaritmica tende all'infinito PIU' LENTAMENTE di qualsiasi funzione algebrica.

... Non importa se cerchiamo di "indebolire" la funzione algebrica assegnandole esponenti piccoli, come $1/3$, $1/10$, $1/1000$... il limite precedente, qualunque sia l'esponente α , vale sempre zero!

"IL LOGARITMO PERDE" CONTRO LA FUNZIONE ALGEBRICA!!!

c)

Dimostra, trasformando opportunamente il prodotto in quoziente per poter poi applicare De l'Hopital, che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ cioè per } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \text{ cioè per ogni } \alpha > 0 \text{ (effettua innanzitutto la sostituzione } z = -x \dots)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ cioè per } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \text{ cioè per ogni } \alpha > 0$$

Questo conferma la "maggior forza" della funzione esponenziale rispetto alla funzione algebrica, anche in un contesto diverso dal precedente.

Qui, nel "tira-e-molla" fra due "forze" contrastanti

(il tendere a zero della funzione esponenziale, che "vorrebbe" far convergere il prodotto a zero, e il tendere all'infinito della funzione algebrica, che "vorrebbe" far divergere il prodotto all'infinito, la funzione esponenziale è talmente rapida nel suo tendere a zero, che non si lascia "sconfiggere" da nessuna funzione algebrica tendente all'infinito,

comunque grande scegliamo l'esponente di quest'ultima nel tentativo di "irrobustirla".

"L'ESPONENZIALE VINCE" CONTRO LA FUNZIONE ALGEBRICA!!!

SLOGAN CONTRO PRECISIONE

E' molto utile ricordare gli slogan

“l'esponenziale vince” e “il logaritmo perde” (nel “conflitto” con ogni funzione algebrica),

“l'esponenziale è una funzione forte” (nel suo tendere all'infinito o nel suo tendere a zero),

“il logaritmo è una funzione debole” (nel suo tendere all'infinito positivo o negativo),

ma

GLI SLOGAN DEVONO PIU' CHE ALTRO COSTITUIRE

RICHIAMI DI CARATTERE GENERALE,

DA INSERIRE POI IN UN CONTESTO PRECISO.

In che senso “l'esponenziale vince”? ...

Nel senso PRECISO espresso dalle relazioni viste alla pagina precedente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{per ogni } \alpha > 0 \quad \text{con la sua conseguenza} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{per } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad \text{con la sua generalizzazione} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \text{per } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad \text{con la sua generalizzazione} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$$

Sarebbe **SBAGLIATISSIMO**, ad esempio, di fronte al limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (\text{forma } [0/0])$$

affermare che, siccome l'esponenziale vince sulla funzione algebrica, tale limite è zero (in effetti, sappiamo invece che vale 1).

NON E' IN QUESTO CONTESTO che l'esponenziale “vince” sulla funzione algebrica!!!

E discorso analogo vale per il logaritmo.

RISCOPRIAMO I LIMITI NOTEVOLI

Come abbiamo avuto modo di constatare nel corso di questo capitolo, molti fra i famosi “limiti notevoli”, la cui determinazione era stata a suo tempo in alcuni casi faticosa, possono a questo punto essere ricostruiti facilmente grazie al buon de l'Hopital.

Ecco qui un quadro riassuntivo generale:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{per ogni } \alpha > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty \quad \text{per ogni } \alpha > 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x ^\alpha e^x = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k, \quad k \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha, \beta > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha, \beta > 0$

1.5 IL “ CRITERIO SUFFICIENTE DI DERIVABILITA’ ”

Supponiamo di sapere che una certa funzione f è derivabile su tutto un intorno I_{x_0} di un'ascissa x_0 , privato di x_0 (NOTA).

Supponiamo inoltre che la funzione f sia continua in x_0 (occhio! quest'ipotesi è indispensabile!).

NOTA

Voglio dire: IN x_0 noi non sappiamo ancora se la funzione sia o non sia derivabile; però all'immediata sinistra e alla immediata destra di x_0 certamente lo è.

Bene. Se adesso esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, allora esisterà pure $f'(x_0)$ e sarà uguale a L ,

$$\text{ossia si avrà pure } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \quad (\text{se si preferisce, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L)$$

Il teorema vale non solo se L (come abbiamo sopra supposto) è un valore finito ($L \in \mathbb{R}$), ma anche se L è uguale a $+\infty$ o $-\infty$; in quest'ultimo caso, la tesi è che la f ha in x_0 “derivata infinita”, cioè che il limite del rapporto incrementale in x_0 , quando l'incremento tende a 0, è $+\infty$ o $-\infty$.

Questo importante teorema viene chiamato “**Criterio sufficiente di derivabilità**”, o, più sbrigativamente, “**Criterio di derivabilità**”.

Schematizziamone e poi analizziamone l'enunciato:

CRITERIO (SUFFICIENTE) DI DERIVABILITA’

- Ipotesi**
- f derivabile su tutto $I_{x_0} - \{x_0\}$
 - f continua in x_0
 - esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L$ (L finito o infinito)

- Tesi**
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$, ossia:
- se L è finito, esiste la derivata di f $\boxed{\text{IN}}$ x_0 , ed è uguale a L ($\exists f'(x_0) = L$),
- se L è infinito, f ha $\boxed{\text{IN}}$ x_0 derivata infinita

Osservazioni

- a) Quando il limite del rapporto incrementale è infinito, si dice, indifferentemente, che
- I) “la funzione non è derivabile in quel punto” e che II) “la funzione ha derivata infinita in quel punto”.
- La contraddizione, in termini linguistici, è evidente e molto fastidiosa, ma è entrata nell'uso (non senza le sue buone ragioni) per cui ci rassegheremo ad accettarla.
- b) ♥ **Il teorema è molto interessante. A partire da certe ipotesi sul comportamento di f e della sua derivata $\boxed{\text{IN UN INTORNO DI } x_0}$, consente di trarre conclusioni sulla derivata $\boxed{\text{IN } x_0}$.**
- c) Il teorema varrebbe anche limitandosi a considerare solo un intorno sinistro (o solo un intorno destro) di x_0 . La tesi riguarderebbe in questo caso una derivata UNILATERALE.

Dimostrazione

Prendiamo un'ascissa x prossima a x_0 (contenuta nell'intorno di x_0 menzionato dall'ipotesi) e consideriamo l'intervallo chiuso di estremi x_0 e x (si tratterà di $[x_0, x]$ oppure di $[x, x_0]$ a seconda che x si trovi a destra o a sinistra di x_0).

Poiché l'ipotesi ci assicura che f è continua in x_0 e derivabile in tutti i punti compresi fra x_0 (escluso) e x (incluso), all'intervallo in questione sarà lecito applicare il teorema di Lagrange.

Questo stabilisce l'esistenza di un punto c_x compreso strettamente fra x_0 e x , per il quale si ha

$$(1) \quad f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{NOTA: il simbolo } c_x \text{ è stato scelto per sottolineare la dipendenza di questo punto dall'ascissa } x$$

Ma l'ipotesi afferma anche che esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L$.

Essendo c_x compreso fra x_0 e x , sarà allora anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(c_x) = L$ e quindi, per la (1),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

La tesi è così dimostrata.

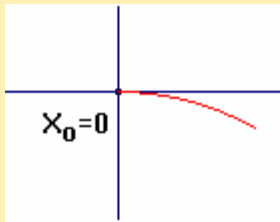
Esempio 1

Consideriamo la funzione $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

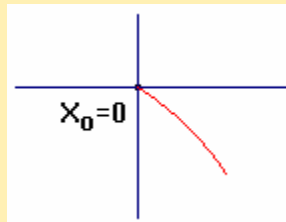
Si tratta, in pratica, della funzione $y = x \ln x$,
della quale si sa (vedi il capitolo su De l'Hospital) che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$,
“prolungata per continuità” nell'origine.

Il grafico di questa funzione “nasce” dunque dall'origine, ma ...
con quale pendenza si proietta fuori dall'origine?

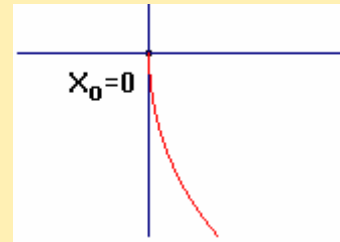
... così? ...
(fig. 1)



... o forse così ...??
(fig. 2)



... o, chissà, magari così !?! ...
(fig. 3)



Per rispondere a questa domanda, noi **dovremmo calcolare la derivata $f'(0)$** (ammesso che esista).

Il guaio è che, data la particolare definizione “per casi”,

non possiamo effettuare il calcolo di questa derivata **applicando una formula,**
ma siamo costretti a svolgerlo scrivendo il rapporto incrementale in $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x - 0}{x - 0} = \frac{x \ln x}{x} = \ln x$$

e facendo poi tendere x a $x_0 = 0$

(precisamente, dato che la nostra funzione non esiste per $x < 0$, facendo poi tendere x a 0^+).

Si vede immediatamente che il limite del rapporto incrementale considerato è $-\infty$:

perciò in definitiva possiamo dire che

$$f'(0) = -\infty$$

e abbiamo così stabilito che $f(x)$ si affaccia fuori dall'origine con “discesa infinita” (come in fig. 3, quindi!)

A questa conclusione, però, avremmo potuto anche pervenire in un modo diverso e più comodo, utilizzando il nostro bravo “Criterio di derivabilità”.

Vediamo.

Fin dall'inizio noi sapevamo che la funzione $f(x)$ (continua nell'origine) era derivabile nei punti a destra dell'origine. Tale derivata valeva

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad (x \neq 0).$$

Facciamo tendere ora x a zero (precisamente, a 0^+): avremo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1) = -\infty$$

il che ci assicura, per il Criterio di derivabilità appunto, che

$$f'(0) = -\infty \quad (\text{più precisamente: } f'_+(0) = -\infty).$$

In questo modo, il procedimento di determinazione della derivata in 0 è più facile, è **più comodo e veloce**.

E' di norma **più agevole, o più rapido**, stabilire il valore della derivata in un punto x_0 calcolando $f'(x)$ fuori da x_0 e poi facendo tendere x a x_0 , piuttosto che attraverso la costruzione diretta del rapporto incrementale in x_0 .

Può esserci **davvero utile**, dunque, questo teorema chiamato “**Criterio di derivabilità**” !

□ **Esempio 2**

La funzione $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} = 1 - x^{2/3}$ è definita e continua su tutto \mathbb{R} .

Essa ha per derivata $g'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

ma **questa derivata, contrariamente alla funzione, NON è definita in $x_0 = 0$.**
Con quale inclinazione la funzione confluisce nel punto di ascissa 0 ?

Se noi andiamo a calcolare i due limiti di $g'(x)$,
 al tendere di x a zero da sinistra e, rispettivamente, da destra, troveremo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\infty$$

Applicando il **Criterio di Derivabilità**, possiamo allora dire che

$$g'_-(x_0) = +\infty, \quad g'_+(x_0) = -\infty :$$

cioè che, se si andasse a scrivere il rapporto incrementale in $x_0 = 0$
 e si facesse poi tendere a zero l'incremento,
 si troverebbe come limite sinistro del rapporto incrementale $+\infty$ e come limite destro $-\infty$.
 Verifichiamo questo fatto **operando direttamente sul rapporto incrementale**:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{(1 - \sqrt[3]{x^2}) - 1}{x} = -\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = -\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

da cui, appunto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

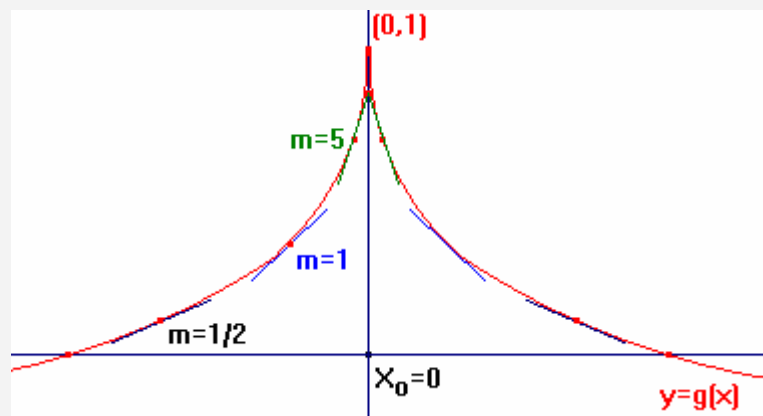
ovvero:

$$g'_-(x_0) = +\infty, \quad g'_+(x_0) = -\infty$$

D'altronde, dopo aver constatato che $\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\infty$,

cosa avremmo potuto dedurre, intuitivamente, riguardo al grafico della funzione?

Dunque ...
 al tendere di x a zero da sinistra,
 le rette tangenti alla curva $y = g(x)$
 assumono inclinazioni
 in salita sempre più ripida ...
 mentre al tendere di x a zero da destra,
 le tangenti presentano inclinazioni
 in discesa sempre più ripida...
 ma allora il grafico, tenuto conto anche
 della continuità in $x_0 = 0$,
 non può essere altro che
 del tipo raffigurato qui a fianco!



E cosa ci dice ora il disegno riguardo alla pendenza IN x_0 ?

Evidentemente, ci dice che la curva confluisce (da sinistra) nel punto $(x_0, g(x_0))$, in salita verticale (= in salita infinita), ed esce (verso destra) dallo stesso punto in discesa verticale (= in discesa infinita). Insomma, dalla conoscenza del comportamento della pendenza della curva IN PROSSIMITA' DI x_0 (e tenendo presente anche il fatto che la funzione, come sappiamo, è continua in x_0), era intuitivo che si potesse dedurre la pendenza della curva IN x_0 .

Il carattere intuitivo di previsioni di questo tipo induce parecchi testi a ignorare completamente il Criterio di Derivabilità, facendo passare per "ovvie" le conclusioni che da esso dipendono ... tuttavia, "salti logici" di tal tipo nella sistemazione teorica comportano una rinuncia al rigore di questa.

□ **Esempio 3 (CONTROesempio: qui il Criterio di derivabilità non sarà applicabile)**

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

e chiediamoci se è derivabile nell'origine.

La funzione è **continua nell'origine** perché, come facilmente si dimostra, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Fuori dall'origine, la derivata esiste e vale

$$f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) = 2x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - \pi \cdot \cos \frac{\pi}{x}$$

Ora, se esistesse il

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x),$$

saremmo nelle condizioni di applicare il Criterio di derivabilità.

Sennonché, tale limite non esiste!

Infatti, dei due addendi $2x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ e $-\pi \cdot \cos \frac{\pi}{x}$,

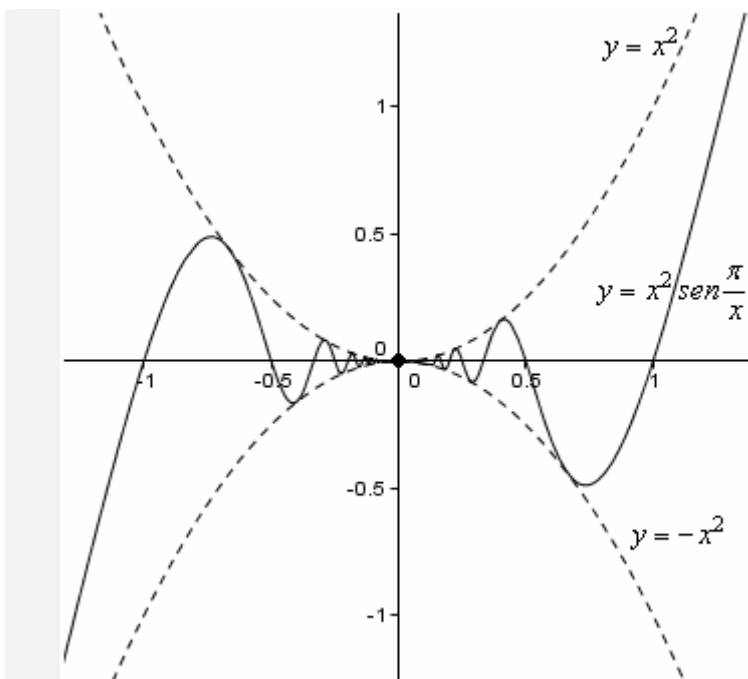
il primo tende a zero, ma il secondo oscilla fra $-\pi$ e π in qualsiasi intorno di $x = 0$.

Pertanto **IL CRITERIO DI DERIVABILITÀ NON È APPLICABILE.**

Per rispondere al quesito che ci eravamo posti (la funzione è derivabile nell'origine, o no?) dovremo per forza ricorrere al rapporto incrementale:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - 0}{x - 0} = x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

Poiché tale rapporto incrementale, al tendere di x a $x_0 = 0$, tende a zero, potremo in definitiva affermare che *la derivata nell'origine esiste ed è nulla.*



Ecco il grafico della funzione:
essendo

$$-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \quad \forall t$$

si ha

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \leq x^2 \quad \forall x$$

per cui il grafico della $y = f(x)$ si mantiene compreso fra i grafici delle due parabole

$$y = -x^2 \quad \text{e} \quad y = x^2.$$

Ciò permette di comprendere molto bene il motivo per cui la derivata nell'origine esiste ed è nulla.

STUDIO DI FUNZIONE

2) LE BASI TEORICHE DELLO STUDIO DI FUNZIONE

2.1 SIMBOLOGIA ADOTTATA

- Il **dominio** di una data **funzione** f verrà indicato con D .
- Il simbolo I verrà utilizzato per indicare un **intervallo**, mentre il simbolo I_x indicherà un **intorno**, non necessariamente circolare, del punto x (ossia: un intervallo aperto contenente x).

2.2 FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI:

I) IN UN INSIEME II) NELL'INTORNO DI UN PUNTO III) IN UN PUNTO

Occhio, perché si tratta di **TRE DEFINIZIONI BEN DISTINTE** !

- I. f crescente in $E \subseteq D \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\text{def.}} \forall x', x'' \in E, x' < x'' \rightarrow f(x') < f(x'')$
- II. f crescente IN UN INTORNO DI $x_0 \in D \xrightarrow{\text{def.}} \exists I_{x_0}$ tale che $\forall x', x'' \in I_{x_0} \cap D, x' < x'' \rightarrow f(x') < f(x'')$
- III. f crescente IN $x_0 \in D \xrightarrow{\text{def.}} \exists I_{x_0}$ tale che $\forall x \in I_{x_0} \cap D, x < x_0 \rightarrow f(x) < f(x_0) \wedge x > x_0 \rightarrow f(x) > f(x_0)$

Naturalmente, apportando ovvie modifiche alle definizioni precedenti si otterranno le definizioni di "funzione **decrecente** in E ", "funzione decrecente in un intorno di x_0 ", "funzione decrecente in x_0 ":

- I. f decrecente in $E \subseteq D \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\text{def.}} \forall x', x'' \in E, x' < x'' \rightarrow f(x') > f(x'')$
- II. f decrecente IN UN INTORNO DI $x_0 \in D \xrightarrow{\text{def.}} \exists I_{x_0}$ tale che $\forall x', x'' \in I_{x_0} \cap D, x' < x'' \rightarrow f(x') > f(x'')$
- III. f decrecente IN $x_0 \in D \xrightarrow{\text{def.}} \exists I_{x_0}$ tale che $\forall x \in I_{x_0} \cap D, x < x_0 \rightarrow f(x) > f(x_0) \wedge x > x_0 \rightarrow f(x) < f(x_0)$

E' importante riconoscere che:

- se f è crescente IN UN INTORNO DI x_0 , evidentemente lo è anche IN x_0 ;
- ma non vale necessariamente il viceversa!

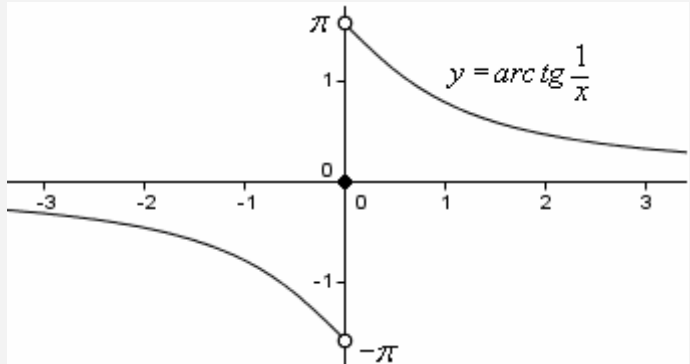
(discorso analogo vale sostituendo l'aggettivo "crescente" con "decrecente")

Ad esempio, considera la **figura 1a** qui a fianco, dove è rappresentata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

La funzione f è crescente NELL'origine, ma non IN UN INTORNO DELL'origine.

Fig. 1a



Anche la funzione della **figura 1b** qui riportata, che è poi la

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è crescente NELL'origine (Nota 1) ma non IN UN INTORNO DELL'origine (Nota 2).

Nota 1.

E' facile dimostrare che esiste un intorno dell'ascissa $x_0 = 0$ nel quale: quando $x < 0$, è $g(x) < 0 = g(0)$; quando $x > 0$, è $g(x) > 0 = g(0)$

Nota 2.

Questo fatto si può dimostrare utilizzando la "pendenza" della curva, ossia andando a calcolare la derivata $g'(x)$ e analizzandone il segno.

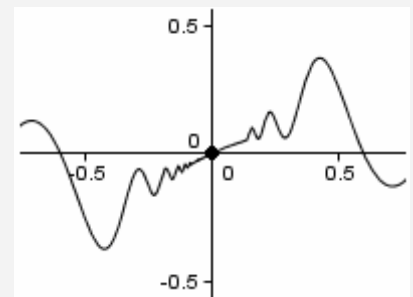


Fig. 1b

Quindi la situazione in cui f è crescente (risp. decrescente) **IN** un punto x_0 è **più generale** di quella in cui f è crescente (risp. decrescente) **IN UN INTORNO DI** x_0 .

Attenzione però, nel consultare i libri di testo:

alcuni Autori, quando scrivono " f crescente (decrescente) **in** x_0 ", danno a questa locuzione il significato che noi abbiamo assegnato invece alla locuzione " f crescente (decrescente) **in un intorno di** x_0 ".

D'altronde, sai bene che, quando si utilizza un testo, è sempre indispensabile tenere ben presenti le definizioni e convenzioni che QUEL testo pone e la simbologia che QUEL testo adotta.

□ Teorema 1

Se I è un intervallo, allora:

f crescente in $I \Leftrightarrow f$ crescente nell'intorno di ogni punto di $I \Leftrightarrow f$ crescente in ogni punto di I
 f decrescente in $I \Leftrightarrow f$ decresc. nell'intorno di ogni punto di $I \Leftrightarrow f$ decresc. in ogni punto di I

Osservazione 1 (il discorso dei "gemelli")

Abbiamo qui due **proposizioni "gemelle"** (scritte ciascuna su di una riga).

Noi, nelle osservazioni seguenti e nella dimostrazione, faremo riferimento soltanto alla prima delle due, in quanto il discorso riguardo all'altra si ridurrebbe ad una banale ed ovvia lieve modifica di cose già dette. Analogamente ci regoleremo per altre coppie di proposizioni o definizioni "gemelle" che incontreremo in seguito.

Osservazione 2

Si tratta, in realtà, di tre biimplicazioni (è pur vero che, una volta dimostrate due qualsiasi di esse, la terza ne discenderebbe subito come conseguenza) quindi di tre teoremi riuniti in un unico enunciato.

Osservazione 3

Le implicazioni da sinistra a destra si dimostrano immediatamente; assai più problematico è invece dimostrare quelle da destra verso sinistra...

la verità di tali implicazioni viene subito colta come intuitivamente evidente, ma se tenta di organizzare un ragionamento dimostrativo rigoroso, ci si troverà di fronte a difficoltà molto serie.

Osservazione 4

Abbiamo già discusso in modo approfondito nella parte 1 (dedicata ai "teoremi preliminari") il fatto che l'esigenza di una dimostrazione rigorosa permanga, anche di fronte a quegli enunciati che sembrano intuitivamente condivisibili.

Osservazione 5

La biimplicazione " f crescente nell'intorno di ogni punto di $I \Leftrightarrow f$ crescente in ogni punto di I " ci dice che, mentre le due condizioni

II) f crescente **NELL'INTORNO DI** un punto x_0

III) f crescente **IN** un punto x_0

quando riferite **AD UN SINGOLO punto, NON SONO equivalenti, perché II) implica III) ma non viceversa,**

esse **DIVENTANO equivalenti quando le si suppone verificate PER TUTTI i punti di un INTERVALLO**

Osservazione 6 (sulla dimostrazione dell'enunciato)

Una dimostrazione corretta del Teorema 1

(o meglio, come abbiamo rimarcato, delle implicazioni da destra a sinistra, in quanto quelle da sinistra a destra si provano immediatamente) **dipende in sostanza da considerazioni di carattere topologico.**

Si tratta essenzialmente di utilizzare il cosiddetto "Lemma di Borel",

la cui trattazione **ci porterebbe però ad un livello un po' troppo avanzato per i limiti di questo corso.**

Siamo costretti perciò a omettere la dimostrazione del Teorema.

Passiamo ora ad una nuova Definizione.

Una **funzione** si dice "**crescente in senso lato**", o anche "**non decrescente**", in un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ se
 $\forall x', x'' \in E, \quad x' < x'' \rightarrow f(x') \leq f(x'')$

Analogamente si potrà parlare, adattando definizioni già date,

di funzione "crescente in senso lato" (o "non decrescente"), "in un intorno di un punto x_0 ", o "in un punto x_0 ".

E' del tutto ovvio poi il passaggio alle definizioni "gemelle" riguardanti una funzione

"decrescente in senso lato", o "non crescente", in un insieme E , nell'intorno di un punto x_0 , o in un punto x_0 .

Se scriveremo "crescente" (o "decrescente"), senza aggiungere altro, vorrà sempre dire "in senso stretto".

2.3 IL SEGNO DELLA DERIVATA E L'INCLINAZIONE DEL GRAFICO

□ Teorema 2

Se f è derivabile in x_0 ed è $f'(x_0) > 0$, allora f è crescente in x_0 .

Se f è derivabile in x_0 ed è $f'(x_0) < 0$, allora f è decrescente in x_0 .

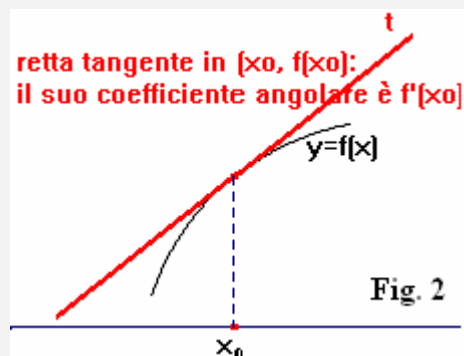
Giustificazione intuitiva del Teorema 2

Dal punto di vista geometrico intuitivo, appare subito plausibile che il teorema sia vero perché la condizione

$$f'(x_0) > 0$$

significa che la retta tangente nel punto di ascissa x_0 ha coefficiente angolare positivo e quindi è "in salita".

Si capisce allora che dovrà essere "in salita" anche il grafico della funzione quando si passa dalla sinistra alla destra dell'ascissa x_0 (vedi fig. 2 qui a fianco).



Dimostrazione

(come già dichiarato nell'Oss. 1 al Teor. 1, farò riferimento solo alla prima delle due proposizioni "gemelle". E' del tutto evidente il fatto che il discorso relativo alla seconda, altro non sarebbe che una noiosa ripetizione - con ovvie modifiche - di quanto già detto).

Sia $f'(x_0) > 0$. Per definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, avremo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$$

Per il Teorema della Permanenza del Segno, esiste dunque un intorno di x_0 tale che, per ogni x di quell'intorno (eccettuato $x = x_0$) si abbia

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Ma se la frazione $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è positiva, allora

- per $x < x_0$ (e quindi $x - x_0 < 0$) dovrà essere $f(x) - f(x_0) < 0$ ossia $f(x) < f(x_0)$
- per $x > x_0$ (e quindi $x - x_0 > 0$) dovrà essere $f(x) - f(x_0) > 0$ ossia $f(x) > f(x_0)$

La tesi è così dimostrata.

□ Teorema 3

Se f è derivabile in x_0 ed è crescente in x_0 , allora $f'(x_0) \geq 0$

Se f è derivabile in x_0 ed è decrescente in x_0 , allora $f'(x_0) \leq 0$

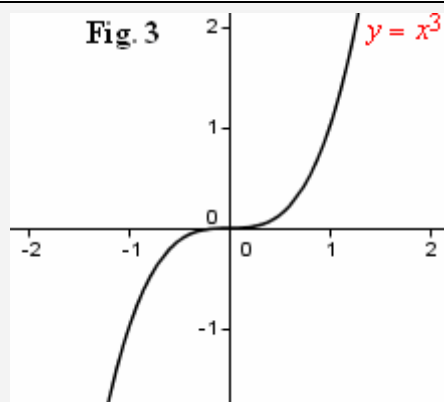
Dimostrazione

Se f è derivabile in x_0 ed è crescente in x_0 , non può essere $f'(x_0) < 0$, altrimenti, per il teorema 2, f sarebbe decrescente in x_0 .

Osservazione

Sotto l'ipotesi che f sia crescente in x_0 , la tesi è dunque $f'(x_0) \geq 0$, NON $f'(x_0) > 0$.

Infatti, ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è crescente nell'origine, ma la derivata nell'origine non è strettamente positiva: è invece nulla (fig. 3 qui a fianco)



□ **Teorema 4**

Se f è derivabile in un intervallo I e, per ogni $x \in I$, si ha $f'(x) > 0$, allora f è crescente in I

Se f è derivabile in un intervallo I e, per ogni $x \in I$, si ha $f'(x) < 0$, allora f è decrescente in I

Dimostrazione

Conseguenza del teorema 2 e del teorema 1.

Osservazione 1

Il Teorema 4 è valido per qualsiasi intervallo,

sia esso limitato, illimitato, aperto, chiuso o semiaperto.

Nel caso in cui un estremo dell'intervallo sia incluso nell'intervallo stesso,

la derivata corrispondente va intesa come unilaterale.

Osservazione 2 (IMPORTANTE: riguarda la particolare impostazione da noi scelta)

La maggior parte dei libri di testo fa a meno della definizione da noi stabilita di

“funzione crescente (decrescente) IN un punto”,

perché assegna a questa locuzione il significato che noi abbiamo invece riservato alla locuzione “ f crescente (decrescente) NELL'INTORNO DI un punto” (cfr. NOTA a piè pagina).

Ciò comporta, per questi testi, il “vantaggio” di evitare il ricorso al nostro Teorema 1, che dipende da considerazioni topologiche superiori (come il Lemma di Borel), ma anche l'inconveniente di dover rinunciare in linea di massima ad enunciati di carattere “locale” (come il nostro Teorema 2) e di doverli forzatamente sostituire con enunciati che impegnano il comportamento della funzione su interi intervalli, con un inevitabile rafforzamento (e quindi appesantimento e minore generalità) delle ipotesi. Anche i procedimenti dimostrativi ne risultano in più di un caso appesantiti.

Ad esempio il teorema 4 verrebbe dimostrato da questi testi ricorrendo al teorema di Lagrange: vedi quanto scritto qui di seguito.

Dimostrazione del Teorema 4 così come è proposta della maggior parte dei testi.

Supponiamo che f sia derivabile in un intervallo I e che, per ogni $x \in I$, si abbia $f'(x) > 0$.

Vogliamo dimostrare che, sotto questa ipotesi, f è crescente in I .

Siano dunque $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$.

Ci proponiamo di far vedere che è $f(x_1) < f(x_2)$.

E' possibile applicare Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$

(infatti f è derivabile su tutto I quindi in particolare è derivabile e continua su $[x_1, x_2]$)

ottenendo

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x}) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$$

dove \bar{x} indica un opportuno punto compreso fra x_1 e x_2 .

L'ipotesi che $f'(x)$ sia >0 su tutto I ci assicura che $f'(\bar{x}) > 0$ e da ciò si trae che

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

da cui

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ricapitolando, abbiamo visto che, presi due generici punti x_1, x_2 di I ,

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Ciò prova che f è crescente in I , c.v.d.

NOTA - Invece la definizione di “funzione crescente” (decrescente) IN UN INSIEME che si ritrova in tutti i testi è sempre identica alla nostra.

2.4 MASSIMI E MINIMI RELATIVI ED ASSOLUTI DI UNA FUNZIONE

Definizione

x_0 **punto di massimo relativo** per la funzione $f(x)$ $\xleftarrow{\text{def.}}$ $\exists I_{x_0}$ tale che $\forall x \in I_{x_0} \cap D, f(x) \leq f(x_0)$

x_0 **punto di minimo relativo** per la funzione $f(x)$ $\xleftarrow{\text{def.}}$ $\exists I_{x_0}$ tale che $\forall x \in I_{x_0} \cap D, f(x) \geq f(x_0)$

Osservazioni

In questo caso si dice che il valore $f(x_0)$ è un "massimo (minimo) relativo" per la funzione f .
Dunque (**IMPORTANTE!**):

quando si dice "**punto di massimo (minimo) relativo**" si intende parlare di un'ascissa,
mentre quando si dice "**massimo (minimo) relativo**" ci si riferisce ad un'ordinata.

A volte, la locuzione "punto di massimo (minimo) relativo" viene usata non per indicare un'ascissa, bensì un punto della curva: il punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Quando ciò avviene, risulta chiaro dal contesto.

I punti di massimo relativo e minimo relativo prendono il nome complessivo di "**estremanti relativi**".
Le rispettive ordinate sono chiamate "**estremi relativi**".

Definizione:

x_0 **punto di massimo assoluto** per la funzione $f(x)$ $\xleftarrow{\text{def.}}$ $\forall x \in \underset{\text{dominio}}{D}, f(x) \leq f(x_0)$

x_0 **punto di minimo assoluto** per la funzione $f(x)$ $\xleftarrow{\text{def.}}$ $\forall x \in \underset{\text{dominio}}{D}, f(x) \geq f(x_0)$

Osservazione

Valgono osservazioni analoghe a quelle fatte in relazione alla definizione precedente:

"**punto di massimo (minimo) assoluto**" denota un'ascissa,
"**massimo (minimo) assoluto**" denota un'ordinata.

Nella fig. 4 qui a fianco,

x_1 e x_3 sono punti di massimo relativo,
e x_3 è anche il punto di massimo assoluto.

I massimi relativi sono $f(x_1)$ e $f(x_3)$;
quest'ultima ordinata costituisce anche
il massimo assoluto.

I punti di minimo relativo sono x_2 e b ;
i minimi relativi sono $f(x_2)$ e $f(b)$.

Non esiste un punto di minimo assoluto
per la funzione rappresentata in figura:
si ha soltanto un "estremo inferiore",
che è poi, con espressione grossolana,

"l'ordinata del buco", ossia il
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Nota, caro lettore,
che la funzione proposta come esempio qui sotto
non è definita con $x = a$, dove abbiamo un "buco"
o, in termini matematici più seri,
una "discontinuità di terza specie"

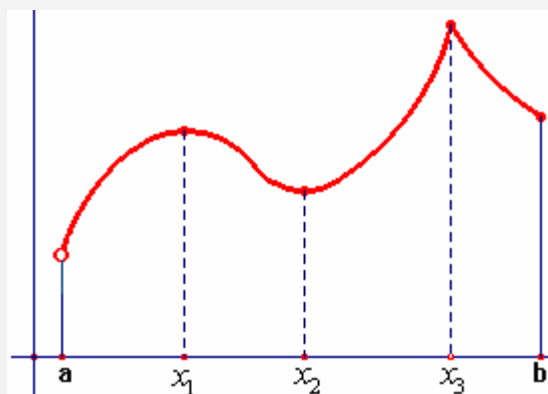


Fig. 4

Un **punto di massimo relativo** può essere "**forte**" (o "**proprio**") oppure "**debole**" (o "**improprio**").

Definizione:

Se x_0 è un **punto di massimo relativo** per la funzione $f(x)$, allora si dice che x_0 è "**forte**" (o "**proprio**") se e solo se

$$\exists I_{x_0} \text{ tale che } \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}, f(x) < f(x_0)$$

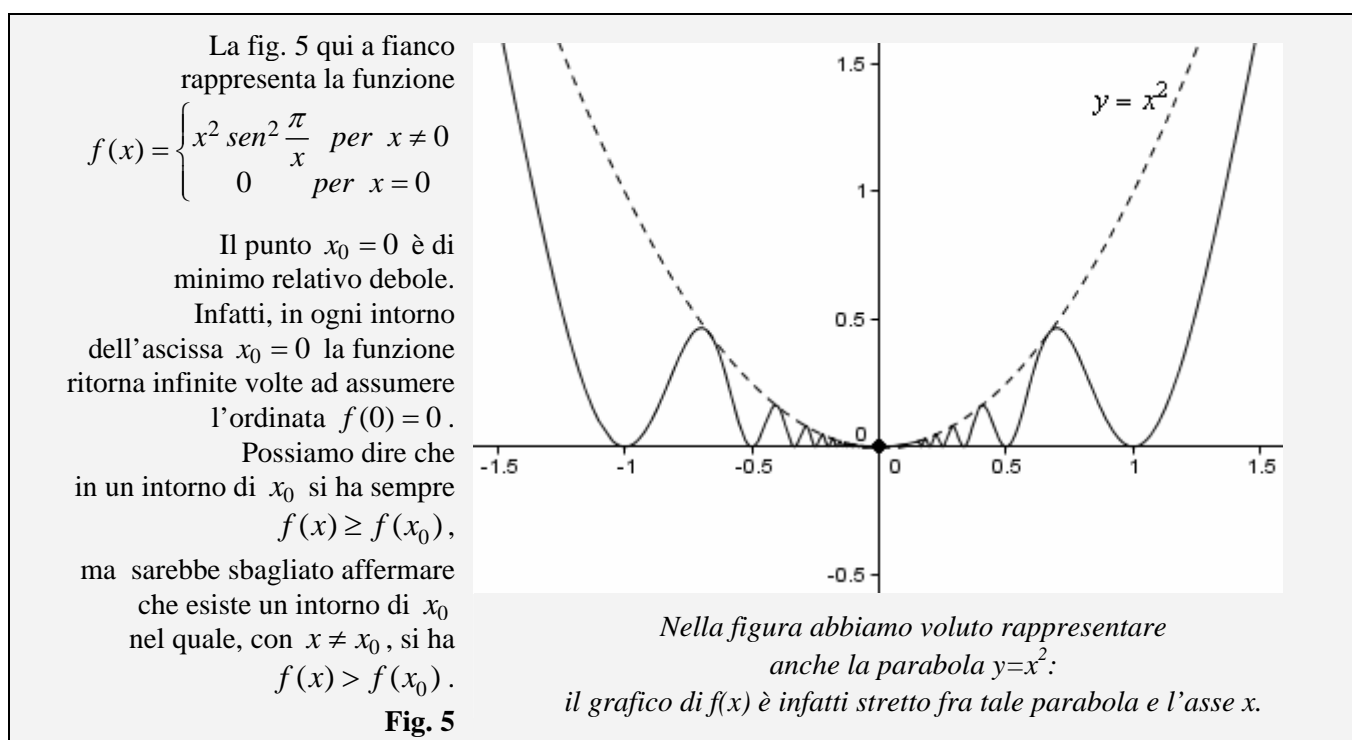
ossia, se il simbolo \leq può essere sostituito dal simbolo $<$ (con x diverso da x_0 , ovviamente).

Può invece accadere (sebbene sia circostanza "rara") che, pur essendo x_0 un punto di massimo relativo, tuttavia in qualsiasi intorno di x_0 la funzione $f(x)$ ritorni ad assumere il valore $f(x_0)$, cosicché sarebbe sbagliato scrivere il simbolo di disuguaglianza stretta.

In tal caso si dice che x_0 è un punto di massimo relativo "**debole**" (o "**improprio**").

Evidentemente, si potrebbe formulare una definizione "gemella" per stabilire quando un punto di *minimo* relativo possa essere detto "forte" o "debole".

La figura seguente, in cui compare una situazione di minimo relativo debole, dovrebbe illustrare efficacemente quanto detto.



Si può portare come ulteriore esempio la **funzione di Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Per essa, ogni ascissa razionale è di massimo relativo debole, e ogni ascissa irrazionale è di minimo relativo debole.

□ Osservazione

Nel seguito, quando parleremo di "estremante relativo", non intenderemo necessariamente che sia "forte": potrebbe essere o forte, o debole. Se vorremo riferirci ad un estremante relativo "forte", lo dichiareremo espressamente.

□ **Teorema 5 (di FERMAT)**

Pierre de Fermat, francese, 1601-1665

f sia definita su di un intervallo I e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo (brevemente: un estremante relativo), *interno* a tale intervallo (l'ipotesi che sia interno è indispensabile).

Allora (se, beninteso, f è derivabile in x_0), risulta

$$f'(x_0) = 0$$

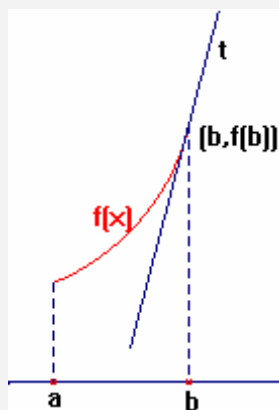
Osservazione 1

E' essenziale specificare che il punto di cui si parla è supposto *interno* all'intervallo di definizione della funzione: altrimenti, la tesi in generale non vale.

Ad esempio, nella fig. 6 qui a fianco, dove il dominio della funzione rappresentata è l'intervallo chiuso $[a, b]$, il punto b è di massimo relativo, eppure la derivata (sinistra) in b non è nulla.

Il teorema non è applicabile, perché il punto b considerato non è interno all'intervallo ma ne è invece un estremo.

Fig. 6



t è la retta tangente nel punto $(b, f(b))$. Non è parallela all'asse x , quindi il suo coefficiente angolare non è nullo. Pertanto $f'(b)$ non è nulla, nonostante b sia punto di massimo relativo. Ma b NON è punto INTERNO all'intervallo di estremi a, b .

Osservazione 2

La condizione $f'(x_0) = 0$ è *necessaria, ma non sufficiente* affinché x_0 sia un estremante relativo interno all'intervallo di definizione.

Nella fig. 7a qui a fianco, è rappresentata la funzione

$$y = (x - 2)^3 + 1 = x^3 - 6x^2 + 12x - 7.$$

Nell'ascissa 2 la derivata si annulla: $f'(2) = 0$.

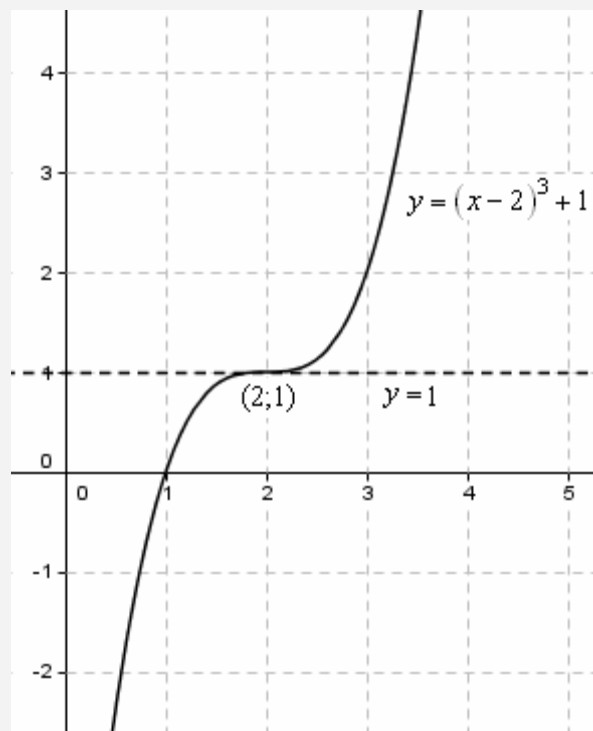
La retta tangente in $(2; 1)$ è perciò orizzontale. Tuttavia, il punto $x = 2$ non è un estremante relativo.

In corrispondenza di questo punto, il grafico della funzione attraversa la retta tangente.

Quando ciò accade, si dice che siamo in presenza di un "punto di flesso".

Dei punti di flesso ci occuperemo più dettagliatamente in seguito.

Fig. 7a



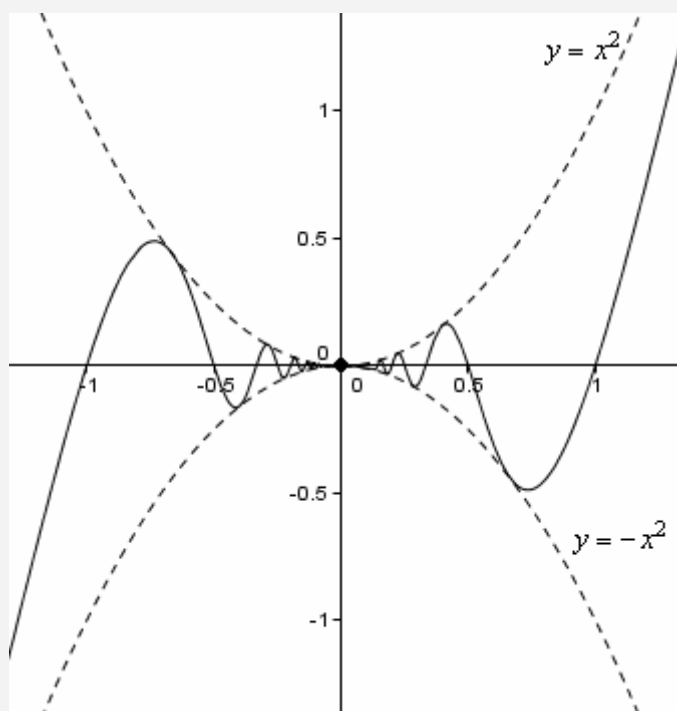
Un po' più inconsueto
è il caso della funzione
rappresentata qui a fianco (fig. 7b):

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

(il grafico di $g(x)$
è compreso fra le due parabole
 $y = -x^2$ e $y = x^2$).

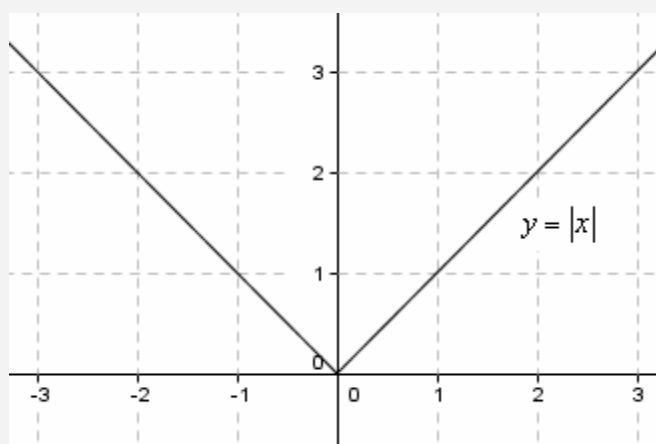
Nel punto $x_0 = 0$ la derivata
esiste e si annulla
(verificalo calcolandola!),
ma non si tratta
di un estremo relativo
(e neppure di un punto di flesso).

Fig. 7b



Infine, il teorema vale
(è ovvio, ma non nuocerà ribadirlo)
sotto l'ipotesi che f sia derivabile in x_0 ;
tale ipotesi è di norma verificata, ma non sempre:
ad esempio, la funzione $y = |x|$ ha un minimo
per $x_0 = 0$, ma non è derivabile in tale punto.

Fig. 7c



Dimostrazione del teorema 5

Per assurdo.

Sia x_0 un punto, tanto per fissare le idee, di massimo relativo,
interno all'intervallo I di definizione della funzione.

Se fosse $f'(x_0) > 0$, allora, per il Teorema 2, f sarebbe crescente in x_0 ,
e x_0 non potrebbe essere punto di massimo relativo,
perché in un intorno destro di x_0 i valori della funzione sarebbero maggiori di $f(x_0)$.

Se fosse $f'(x_0) < 0$, allora, per il Teorema 2, f sarebbe decrescente in x_0 ,
e x_0 non potrebbe essere punto di massimo relativo,
perché in un intorno sinistro di x_0 i valori della funzione sarebbero maggiori di $f(x_0)$.

Analogamente è la dimostrazione se si suppone che x_0 sia di minimo relativo.

2.5 FLESSI DI UNA FUNZIONE

x_0 si dice "**punto di flesso**" per la funzione $f(x)$ se, nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa x_0 , **il grafico della funzione attraversa la retta tangente** nel punto di ascissa x_0 .

Più precisamente (vedi figure qui a fianco):

sia f definita in un intervallo,

sia x_0 un punto interno a questo intervallo,

f sia derivabile in x_0 ed esista dunque la retta t , tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Se nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa x_0 , il grafico della funzione attraversa la tangente t , passando da sotto a sopra,

o da sopra a sotto rispetto ad essa,

allora si dice che x_0 è un punto di flesso per la f .

Si parla di "**flesso ascendente**" quando la funzione passa "**da sotto a sopra**" rispetto alla tangente in x_0 (figg. 8a, 8b), si parla di "**flesso discendente**" quando passa "**da sopra a sotto**" (8c, 8d).

Notare che in corrispondenza di un flesso ascendente

non è detto che la funzione, sia crescente:

potrebbe pure essere decrescente, come in fig. 8b.

Analogamente, nel caso di un flesso discendente,

la funzione potrà essere decrescente (fig. 8c)

ma anche crescente (fig. 8d).

Flessi verticali

Per estensione, si parla di "punto di flesso" anche quando il grafico è dotato di retta tangente verticale, purché però la funzione attraversi la tangente verticale con andamento "monotono" (crescente o decrescente); se infatti f non fosse monotona, il punto verrebbe chiamato "cuspidè" (vedi più avanti).

Dovremo però in questo caso intenderci sull'uso degli aggettivi "ascendente" e "discendente", perché, se la retta tangente è verticale, rispetto ad essa non si può più parlare di "sotto" e di "sopra".

La questione viene risolta nel modo seguente:

se ritorniamo a considerare le precedenti figure

8a, 8b, 8c, 8d, possiamo osservare che

in corrispondenza dei flessi che in quel contesto

avevamo chiamato "ascendenti",

la funzione presenta una transizione dalla "concavità"

(diciamo, per ora, molto "alla buona",

che la concavità è la "gobba verso l'alto")

alla "convessità"

(gobba verso il basso, parte cava verso l'alto).

Per analogia, parleremo allora di flesso "ascendente"

in casi come quello della figura 9a,

di flesso "discendente"

in situazioni come quella di figura 9b,

anche se questi aggettivi, a prima vista,

potrebbero suscitare perplessità.



fig. 8a

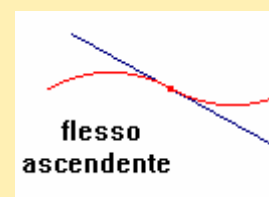


fig. 8b



fig. 8c

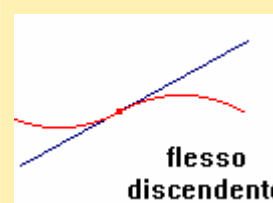
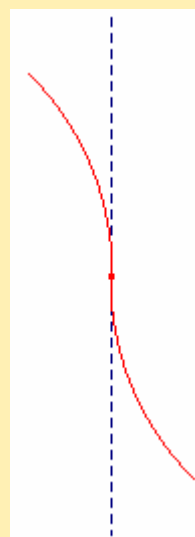
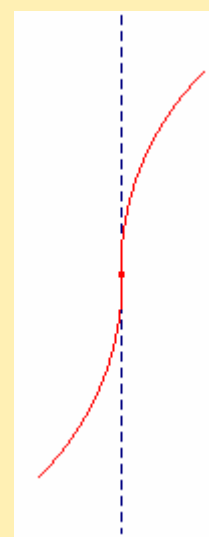


fig. 8d



Flesso verticale ascendente
(sì, non sto sbagliando!
Dalla concavità alla convessità, quindi "ascendente")

fig. 9a



Flesso verticale discendente
(sì, non sto sbagliando!
Dalla convessità alla concavità, quindi "discendente")

fig. 9b

2.6 CUSPIDI, PUNTI ANGOLOSI

Invece nel caso della figura 10 qui a fianco non si parla di "flesso", bensì di "cuspidè".

La funzione diagrammata è $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

La curva è tangente in $(1, 2)$ alla retta verticale $x = 1$.

Come descriveremo dunque una "cuspidè"?

Una "cuspidè" è un punto $(x_0, f(x_0))$

in cui la funzione è continua, e non è derivabile, ma è tale che la derivata sinistra e la derivata destra valgono una $\pm\infty$, l'altra $\mp\infty$:

$$f'_-(x_0) = \pm\infty, \quad f'_+(x_0) = \mp\infty$$

... in altre parole,

il rapporto incrementale sinistro in x_0 e il rapporto incrementale destro in x_0 tendono, al tendere a zero dell'incremento, uno a $\pm\infty$, l'altro a $\mp\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty$$

Una "cuspidè" può essere considerata come un caso particolare di "punto angoloso".

Nella figura 11 qui a fianco, dove è rappresentata la funzione $y = |x^2 - 1|$, puoi osservare *due* punti angolosi, di ascisse -1 e $+1$ rispettivamente.

Si dice "punto angoloso"

un punto in cui la funzione è continua ma derivata sinistra e destra sono diverse fra loro (una o entrambe possono anche essere infinite).

Per esercizio, con riferimento alla fig. 11, verifica che le due semirette tangenti nel punto $(1,0)$ hanno coefficienti angolari -2 e 2 .

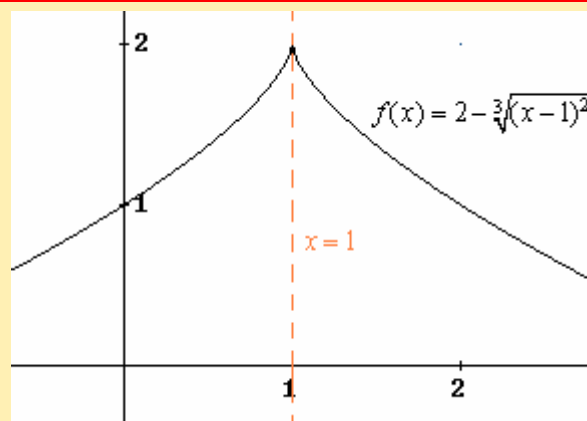
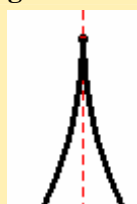


Fig. 10: una cuspidè (vedi particolare qui sotto)



←
Particolare
del
grafico di fig. 10

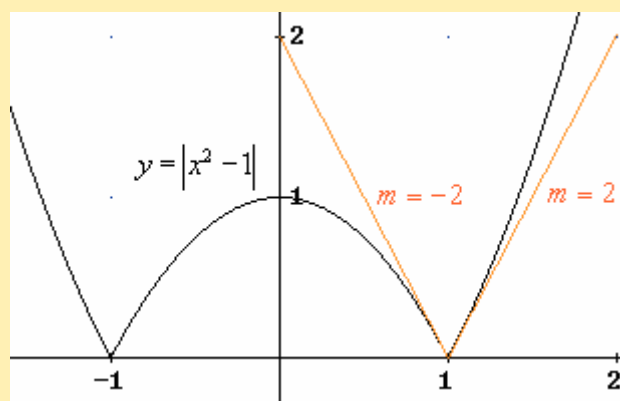


Fig. 11: due punti angolosi

Esercizio 1

Verifica che la funzione $\sqrt[5]{x^4}$ ha una cuspidè per $x = 0$, mentre $\sqrt[5]{x^3}$ ha per $x = 0$ un flesso verticale.

Esercizio 2

Verifica che la funzione $g(x) = x^2 + ax + b|x|$ presenta, nell'origine, un punto angoloso nel quale l'ampiezza dell'angolo formato dalle due semitangenti può essere modulata a piacere assegnando valori opportuni ai due parametri a, b .

Esercizio 3

Spiega perché la funzione $h(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{|x|} + ax$ presenta nell'origine un punto angoloso in cui una delle due semitangenti è verticale.

Dimostra inoltre che l'angolo (assoluto) γ formato dalle due semitangenti è tale che $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{|a|}$ (NOTA)

NOTA. - Ricordiamo che:

- L'angolo α che una retta $r: y = mx + q$ forma con l'asse orientato delle x è tale che $\operatorname{tg} \alpha = m$
 - Per calcolare l'angolo γ formato dalle due rette $r: y = mx + q$, $r': y = m'x + q'$ si applica una delle due formule seguenti:
 - ♫ $\operatorname{tg} \gamma = \frac{m - m'}{1 + mm'}$ se ci interessa un angolo "orientato" (strettamente compreso fra -90° e $+90^\circ$)
- L' "angolo orientato" è qui l'angolo di cui deve ruotare la retta r' , per sovrapporsi alla r con la rotazione più breve possibile, preso con segno:
- positivo se la rotazione più breve è quella che avviene in senso antiorario,
 - negativo se in senso orario
- ♫ $\operatorname{tg} \gamma = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$ se vogliamo l'angolo "assoluto" (=senza segno)

2.7 PUNTI STAZIONARI

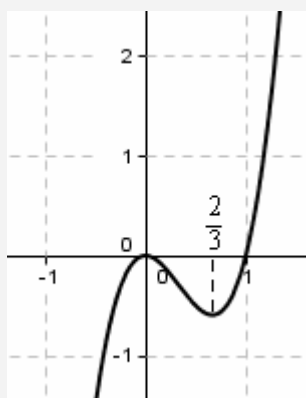
Data una funzione $y = f(x)$, si dice che x_0 è un "punto stazionario" della f se $f'(x_0) = 0$.

I punti stazionari di una funzione sono dunque quelli nei quali la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale (NOTA).

NOTA: scrivo spesso, per comodità, "orizzontale", quando a rigore dovrei scrivere "parallela all'asse delle ascisse": in effetti, di norma (anche se non sempre) l'asse delle ascisse è disposto orizzontalmente rispetto al lettore.

Se x_0 è un punto stazionario, allora può essere:

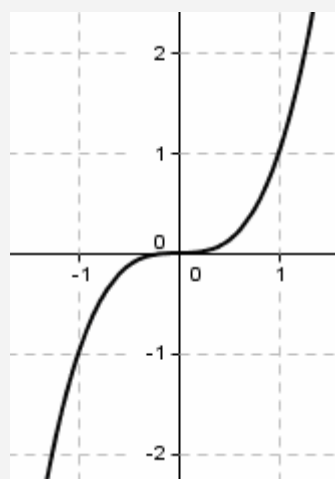
- un punto di **massimo o di minimo relativo** (cioè, un estremo relativo): fig. 12a
- oppure un **flesso a tangente orizzontale**: fig. 12b
- oppure ancora (**caso raro**) può darsi che non sia **né un estremo né un flesso**: fig. 12c



$$y = 4x^3 - 4x^2$$

Punti stazionari:
 $x = 0$ (**massimo relativo**),
 $x = 2/3$ (**minimo relativo**)

fig. 12°



$$y = x^3$$

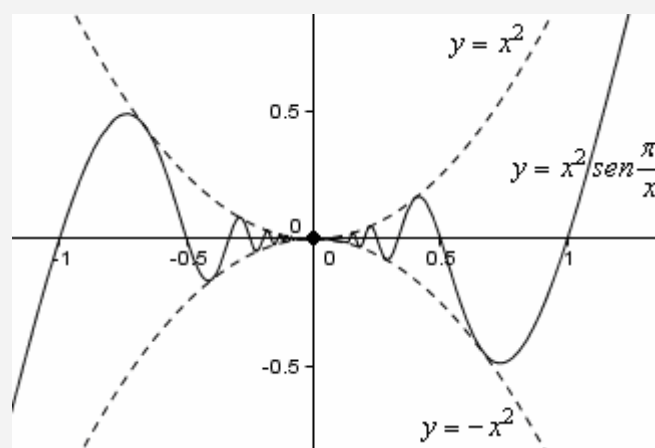
Punto stazionario:
 $x = 0$ (**flesso orizzontale**)

fig. 12b

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Fig. 12c

Punto stazionario: $x = 0$
 (non è né di massimo,
 né di minimo,
 né di flesso)



I punti stazionari di una funzione si ricercano

ricavando la derivata prima $f'(x)$ e quindi risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$.

Poi, naturalmente, occorrerà stabilire, per ciascun punto stazionario, se si tratti di un punto di massimo, di un punto di minimo, di un punto di flesso orizzontale oppure (caso raro) nessuna delle eventualità precedenti.

I teoremi che seguono sono finalizzati appunto a questa analisi dei punti stazionari.

□ **Lemma 1**

Se una funzione f è crescente su (a, x_0) e decrescente su (x_0, b) e inoltre è continua in x_0 , allora il punto x_0 è di massimo relativo forte per la funzione.

Se f è decrescente su (a, x_0) e crescente su (x_0, b) e inoltre è continua in x_0 , allora il punto x_0 è di minimo relativo forte per f .

Osservazione 1

Notare come sia indispensabile l'ipotesi di continuità in x_0 .

Prendiamo, come controesempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

(parabola col "buco": fig. 13 qui a fianco).

L'ascissa $x_0 = 0$ NON È di massimo relativo, sebbene $f(x)$ sia crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra.

Il Lemma non è applicabile per via della discontinuità in x_0 .

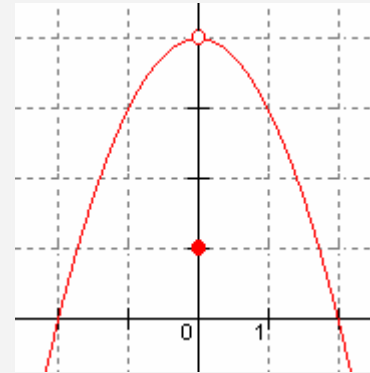


Fig. 13

Osservazione 2

L'enunciato *non è banale*, per il fatto che gli intervalli sono supposti APERTI.

Se si fosse scritto $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ al posto di (a, x_0) e (x_0, b)

si sarebbe ottenuta una proposizione ancora vera, ma del tutto ovvia!

Invece gli intervalli sono aperti ... il punto x_0 è "tagliato fuori" da questi intervalli ...

... e allora è **indispensabile** l'ipotesi di continuità della funzione in x_0

per "saldare" il comportamento in x_0 al comportamento in **prossimità di** x_0 , e assicurare la verità della tesi.

Dimostrazione del Lemma 1

Si effettua ricorrendo al concetto di "estremo superiore"

e applicando il "Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotone". Dunque:

1.

f è crescente su (a, x_0) ed è continua in x_0 .

La continuità in x_0 significa che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

D'altra parte, applicando sull'intervallo (a, x_0) il "Teor. di esistenza del limite delle funzioni monotone", possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x)$$

Confrontando le due uguaglianze appena scritte,

si trae $f(x_0) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x)$

e da ciò discende, tenendo conto anche del carattere *strettamente* crescente della f su (a, x_0) , che, $\forall x \in (a, x_0)$, si ha $f(x) < f(x_0)$.

NOTA 1

Abbiamo scritto la disug. STRETTA in quanto:

se, per assurdo, un $\bar{x} \in (a, x_0)$ fosse tale che $f(\bar{x}) = f(x_0)$, allora nell'intervallo (\bar{x}, x_0) la $f(x)$, essendo strettamente crescente su tutto (a, x_0) , assumerebbe valori maggiori di $f(x_0)$; ma ciò è incompatibile col fatto che $f(x_0) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x)$

2.

f è decrescente su (x_0, b) ed è continua in x_0 .

La continuità in x_0 significa che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

D'altra parte, applicando sull'intervallo (x_0, b) il "Teor. di esistenza del limite delle funzioni monotone", possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$$

Confrontando le due uguaglianze appena scritte,

si trae $f(x_0) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$

e da ciò discende, tenendo conto anche del carattere *strettamente* decrescente della f su (x_0, b) , che, $\forall x \in (x_0, b)$, si ha $f(x) < f(x_0)$.

NOTA 2

Abbiamo scritto la disug. STRETTA in quanto:

se, per assurdo, un $\bar{x} \in (x_0, b)$ fosse tale che $f(\bar{x}) = f(x_0)$, allora nell'intervallo (x_0, \bar{x}) la $f(x)$, essendo strettamente decrescente su tutto (x_0, b) , assumerebbe valori maggiori di $f(x_0)$; ma ciò è incompatibile col fatto che $f(x_0) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$

3. Perciò, in definitiva, per ogni x di (a, b) distinto da x_0 è $f(x) < f(x_0)$ quindi x_0 è di massimo relativo forte per la funzione, C.V.D.

2.8 RICERCA DEI PUNTI DI MASSIMO, DI MINIMO E DI FLESSO ORIZZONTALE COL METODO DELLO STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

□ **Teorema 6** (con l'enunciato si dà simultaneamente, in corsivo, anche la dimostrazione)

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in tutto un intorno di x_0 , dotata di derivata nulla in x_0 : $f'(x_0) = 0$.

Per stabilire se il punto x_0 è di massimo, di minimo, o di flesso orizzontale basta

"studiare il segno della derivata prima nell'intorno di x_0 ", e precisamente:

- Se $f'(x)$ è positiva a sinistra di x_0 e negativa a destra di x_0 , allora f è crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra di x_0 (per il Teor. 4), per cui x_0 è un punto di massimo relativo (NOTA 1)
- Se $f'(x)$ è negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra di x_0 , allora f è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0 , per cui x_0 è un punto di minimo relativo (NOTA 1)
- Se $f'(x)$ è positiva sia a sinistra che a destra di x_0 , allora f è crescente sia a sinistra che a destra di x_0 , per cui x_0 è un punto di flesso ascendente a tangente orizzontale (NOTA 1, NOTA 2)
- Se $f'(x)$ è negativa sia a sinistra che a destra di x_0 , allora f è decrescente sia a sinistra che a destra di x_0 , per cui x_0 è un punto di flesso discendente a tangente orizzontale (NOTA 1, NOTA 2)

NOTA 1 f , essendo derivabile in x_0 , è ivi anche continua e vale il precedente Lemma 1

NOTA 2 Gli ultimi due enunciati richiedono, per la loro dim., un'ovvia variante "unilaterale" del Lemma 1

Osservazioni

- Nell'enunciato, "massimo" e "minimo" sono da intendersi come "massimo forte" e "minimo forte".
- Questo teorema 6 fornisce il cosiddetto

"metodo per la ricerca dei punti di massimo, minimo e flesso orizzontale con lo studio del segno della derivata prima".

Tale metodo è molto semplice:

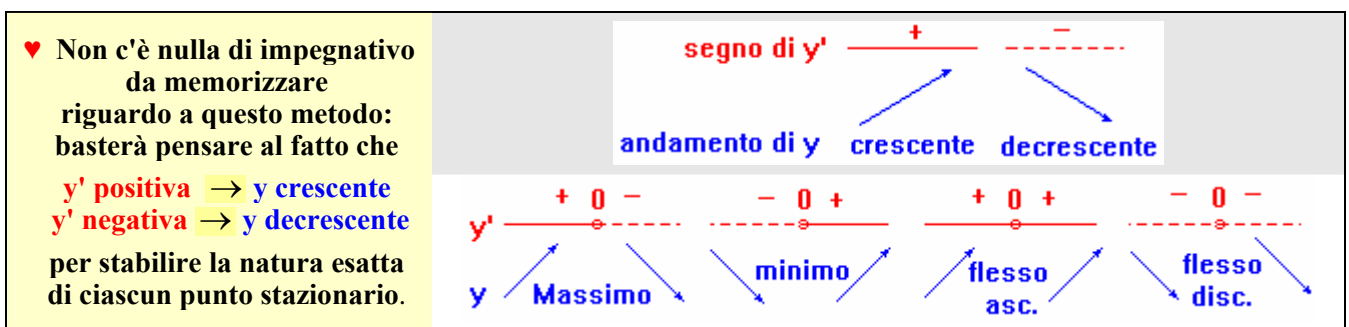
data la funzione $y = f(x)$, innanzitutto si risolve l'equazione $f'(x) = 0$

per determinare i punti stazionari; poi si affronta lo studio del segno della derivata prima,

e a tale scopo si risolve la disequazione $f'(x) > 0$;

in tal modo si trovano i valori di x per cui la y' è positiva,

quindi, per esclusione, si possono trovare anche quelli per cui la y' è negativa.



- E' chiaro che comunque che in tal modo non si potranno trovare gli eventuali estremanti relativi in cui la funzione non è derivabile (pensiamo ad esempio alla funzione $y = |x|$ che ha un minimo in 0).

Il discorso fatto riguarda poi i massimi e minimi relativi interni al dominio della funzione; la ricerca degli eventuali estremanti relativi che stanno ai confini del dominio, come pure la ricerca degli estremanti assoluti, è tutt'altra cosa.

Ma gli estremanti dei tre tipi citati:

- estremanti relativi in cui la funzione non è derivabile
- estremanti relativi che stanno ai confini del dominio
- estremanti assoluti

si troveranno in modo facile e immediato,

dopo aver ultimato lo studio della funzione e averne tracciato il grafico definitivo.

Osservazione (possibilità di attenuazione delle ipotesi per il Teorema 6)

Le ipotesi del precedente teorema 6, limitatamente alle parti a) e b), potrebbero anche essere attenuate, per ciò che concerne il comportamento della funzione NEL punto x_0 .

Ferma restando la derivabilità a sinistra e a destra di x_0 ,

non è indispensabile che la funzione sia derivabile con derivata nulla in x_0

(anche se questo poi è il caso di gran lunga più frequente nelle applicazioni);

è sufficiente che $f(x)$ sia CONTINUA in x_0 , perché la tesi sia vera.

Si ottiene in tal modo la variante seguente:

Teorema 6'

Sia $y = f(x)$ una funzione continua in x_0 ,

e derivabile in tutto un intorno di x_0 , con esclusione, tutt'al più, del punto x_0 .

a') Se $f'(x)$ è

> 0 a sinistra di x_0 e < 0 a destra di x_0 , allora x_0 è un punto di massimo relativo forte per la f

b') Se $f'(x)$ è

< 0 a sinistra di x_0 e > 0 a destra di x_0 , allora x_0 è un punto di minimo relativo forte per la f .

Sia $y = f(x)$ una funz. derivabile in tutto un intorno di x_0 , dotata di derivata nulla in x_0 : $f'(x_0) = 0$.

c') Se $f'(x)$ è

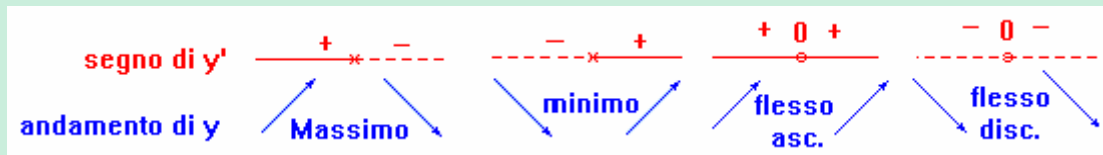
> 0 sia a sinistra che a destra di x_0 , allora x_0 è un punto di flesso ascendente a tang. orizzontale

d') Se $f'(x)$ è

< 0 sia a sinistra che a destra di x_0 , allora x_0 è un punto di flesso discendente a tang. orizzontale.

La figura sottostante riassume l'enunciato:

la "crocetta" riferita a y' indica i casi in cui non si fa alcuna ipotesi (neppure di esistenza) su y' in x_0 .



Osserviamo che le dimostrazioni del Teorema 6' che si ritrovano nella maggior parte dei testi si basano sul Teorema di Lagrange.

Il ragionamento è più o meno il seguente (facciamo riferimento al PRIMO dei quattro enunciati):

Sia

$$a < x' < x_0 < x'' < b,$$

dove abbiamo indicato con a, b gli estremi dell'intorno di x_0 di cui parla l'ipotesi.

x' e x'' , insomma, sono due punti presi arbitrariamente uno a sinistra e l'altro a destra di x_0 (sempre, s'intende, nell'ambito dell'intorno suddetto);

ci proponiamo di mostrare che tanto $f(x')$ quanto $f(x'')$ sono minori di $f(x_0)$.

Il Teorema di Lagrange è applicabile all'intervallo $[x', x_0]$ e ci dice che

$$f(x_0) - f(x') = f'(\bar{x}) \underbrace{(x_0 - x')}_{>0} \quad \text{essendo } \bar{x} \text{ ("x segnato")} \text{ un opportuno punto compreso fra } x' \text{ e } x_0;$$

poiché $x' < \bar{x} < x_0$, sarà $f'(\bar{x}) > 0$ e quindi $f(x_0) - f(x') > 0$ ossia $f(x') < f(x_0)$

Ora, Lagrange è applicabile anche all'intervallo $[x_0, x'']$ e ci dice che

$$f(x'') - f(x_0) = f'(\bar{x}) \underbrace{(x'' - x_0)}_{>0} \quad \text{essendo } \bar{x} \text{ ("x segnato due volte")} \text{ un opportuno punto fra } x_0 \text{ e } x'';$$

poiché $x_0 < \bar{x} < x''$, sarà $f'(\bar{x}) < 0$ e quindi $f(x'') - f(x_0) < 0$ ossia $f(x'') < f(x_0)$

In definitiva, abbiamo provato che sia a sinistra che a destra di x_0 è $f(x) < f(x_0)$ e ciò dimostra, appunto, che x_0 è di massimo relativo.

2.9 RICERCA DEI PUNTI DI MASSIMO, DI MINIMO E DI FLESSO ORIZZONTALE COL METODO DELLA DERIVATA SECONDA (O DELLE DERIVATE SUCCESSIVE)

□ Teorema 7

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile tante volte quanto occorra; (NOTA 1)
 supponiamo che $f'(x_0) = 0$ (x_0 punto stazionario). (NOTA 2)

Allora:

- se $f''(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo relativo;
- se $f''(x_0) < 0$, x_0 è un punto di massimo relativo;
- se $f''(x_0) = 0$, **nulla si può dire**, per ora, intorno alla natura del punto stazionario x_0 ;
ma, in questo caso, si calcolino le derivate successive $f'''(x_0)$, $f^{IV}(x_0)$, $f^V(x_0) \dots$,
fino a trovare la prima di queste derivate che sia diversa da 0:
 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

A questo punto:

- se n è pari, allora x_0 è un punto di minimo o di massimo relativo, e precisamente:
 - a) x_0 è un punto di **minimo** se $f^{(n)}(x_0) > 0$
 - b) x_0 è un punto di **massimo** se $f^{(n)}(x_0) < 0$
- se n è dispari, allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale, e precisamente:
 - a) x_0 è un punto di flesso orizzontale **ascendente** se $f^{(n)}(x_0) > 0$
 - b) x_0 è un punto di flesso orizzontale **discendente** se $f^{(n)}(x_0) < 0$

OSSERVAZIONE

Nell'enunciato, "massimo" e "minimo" sono da intendersi come "massimo forte" e "minimo forte".

NOTA 1

Esprimendomi in questo modo, voglio dire: l'enunciato riassume diverse possibili situazioni; non è perciò conveniente formulare un'unica ipotesi che valga nella totalità dei casi prospettati, perché poi, quando si va a prendere un caso specifico, tale ipotesi sarebbe inutilmente sovrabbondante; sottintenderemo invece che, qualora nell'enunciato venga chiamata in causa la derivata di un certo ordine, in un certo punto, la derivata in questione esista effettivamente in quel punto. Tutto molto ovvio e ragionevole, niente di speciale!

NOTA 2

Occorre, qui e altrove, tener presente che **l'esistenza della derivata f' in un punto x_0 comporta necessariamente l'esistenza della funzione $f(x)$ in tutto un intorno di x_0** .
 E allo stesso modo, se nell'enunciato si suppone l'esistenza di $f^{(k)}(x_0)$, derivata di ordine k calcolata nel punto x_0 , allora ciò presuppone l'esistenza della derivata di ordine immediatamente inferiore, $f^{(k-1)}(x)$, in tutto un intorno di x_0 .

Dimostrazione del teorema 7**PRIMA PARTE**

Supponiamo che $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$. Vogliamo dimostrare che x_0 è punto di minimo relativo.

Osservazione: abbiamo già sottolineato che l'esistenza di $f''(x_0)$ presuppone l'esistenza di $f'(x)$ in tutto un intorno di x_0 ; invece la derivata seconda potrebbe anche esistere esclusivamente nel punto x_0 , sebbene il caso di gran lunga più comune sia che esista anch'essa in tutto un intorno di x_0 .

Dunque:

se $f''(x_0) > 0$, allora $f'(x)$ è crescente in x_0 (ricordiamo che la f'' non è altro che la derivata della f'); ma essendo $f'(x_0) = 0$, sarà quindi $f'(x) < 0$ per $x < x_0$, e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$.

Pertanto la funzione f è decrescente a sinistra di x_0 , e crescente alla destra di x_0 (NOTA)

f è anche continua in x_0 (infatti è derivabile in x_0),

quindi possiamo concludere che x_0 è punto di minimo relativo (Lemma 1, o, volendo, Teorema 6 oppure 6')

Non sto, per ovvie ragioni, a scrivere la dimostrazione nel caso $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$

(qui la tesi è che x_0 sia punto di massimo relativo):

essa sarebbe perfettamente speculare a quella appena conclusa.

NOTA - In questo e in molti altri casi, quando scrivo "a sinistra di x_0 ", "a destra di x_0 ",

oppure, come nella riga sopra, "per $x < x_0$ ", "per $x > x_0$ ",

il lettore deve comunque capire che sto usando, per brevità, dei modi di esprimermi "condensati":

per la precisione dovrei dire "esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale

avviene che: a sinistra di x_0 ovvero se $x < x_0$ ecc. ecc. e a destra di x_0 ovvero se $x > x_0$ ecc. ecc."

Così scrivendo, però, l'esposizione si sfilaccerebbe un po' troppo,

da cui la scelta di locuzioni brevi, che poi chi legge interpreterà convenientemente.

SECONDA PARTE

Sia ora $f'(x_0) = 0$ e anche $f''(x_0) = 0$. Supponiamo che sia $f'''(x_0) = f^{IV}(x_0) = 0$ ed $f^V(x_0) > 0$.

Sto considerando un caso particolare, per fissare le idee; tuttavia, dal modo in cui svolgerò la dimostrazione in questo caso particolare, si capirà come potrebbe essere svolta in altri casi particolari, e sarà a quel punto evidente la possibilità di formulare una dimostrazione di carattere generale (non riportata in queste pagine).

Sappiamo che $f^V(x_0) > 0$. Quindi la $f^{IV}(x)$ è crescente in x_0 .

Ma $f^{IV}(x_0) = 0$.

Quindi $f^{IV}(x)$ è negativa a sinistra di x_0 , positiva a destra di x_0 .

Quindi $f'''(x)$ è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0 .

Ma $f'''(x_0) = 0$.

Quindi $f'''(x)$ è positiva sia a sinistra che a destra di x_0 .

Quindi $f''(x)$ è crescente sia a sinistra che a destra di x_0 .

Ma $f''(x_0) = 0$.

Quindi $f''(x)$ è negativa a sinistra di x_0 , positiva a destra di x_0 .

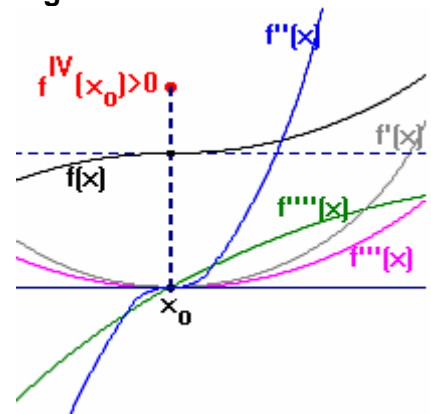
Quindi $f'(x)$ è decrescente a sinistra di x_0 , crescente a destra di x_0 .

Ma $f'(x_0) = 0$.

Quindi $f'(x)$ è positiva sia a sinistra che a destra di x_0 .

Quindi $f(x)$ è crescente sia a sinistra che a destra di x_0 .

Pertanto il punto stazionario x_0 è di flesso ascendente.

Fig. 14

Esercizi utilissimi.

- Per ripassare in modo molto efficace la dimostrazione della SECONDA PARTE del Teorema, ricostruisci passo a passo la figura 14, disegnando i grafici delle funzioni f^V , f^{IV} , f''' , f'' , f' , f **uno dopo l'altro in sequenza**, coerentemente con le ipotesi fatte sulle derivate successive della funzione.
- Noi abbiamo, per fissare le idee, supposto che la prima derivata a non annullarsi in x_0 fosse la derivata quinta, e fosse positiva; come esercizio molto istruttivo, passa a considerare qualche altro caso, immaginando ad es. che la prima derivata a non annullarsi sia la derivata quarta e sia negativa... con l'aiuto di una figura costruita passo a passo, dimostra la tesi corrispondente.

2.10 CONCAVITA' DI UNA CURVA IN UN PUNTO

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in un punto x_0 .

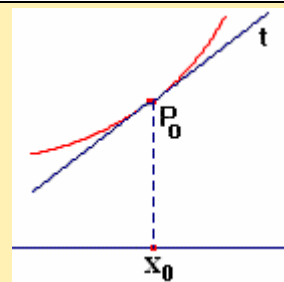
Allora, la curva grafico della funzione ammette retta tangente, non verticale, nel punto P_0 di ascissa x_0 .

Tale retta tangente ha equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Definizione:

**Se esiste un intorno completo di x_0
per ogni x del quale, escluso x_0 ,
la curva sta AL DI SOPRA DELLA TANGENTE in P_0 ,
allora si dirà che la curva stessa ha, in P_0 ,
“la CONCAVITA' RIVOLTA VERSO L'ALTO”.**

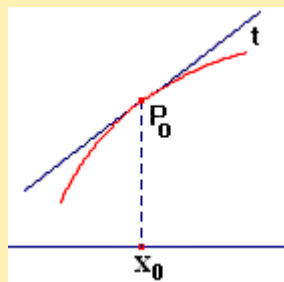
Fig. 15a



Definizione:

**Se esiste un intorno completo di x_0
per ogni x del quale, escluso x_0 ,
la curva sta AL DI SOTTO DELLA TANGENTE in P_0 ,
allora si dirà che la curva stessa ha, in P_0 ,
“la CONCAVITA' RIVOLTA VERSO IL BASSO”.**

Fig. 15b



A volte, per brevità,

anziché dire: " f ha la concavità rivolta verso l'alto in x_0 ", diremo: " f è *convessa* in x_0 "

e anziché dire: " f ha la concavità rivolta verso il basso in x_0 " diremo: " f è *concava* in x_0 "

Si dice poi che una funzione f ha la concavità rivolta verso l'alto (verso il basso) **in un intervallo I** , se f ha la concavità rivolta verso l'alto (verso il basso) **in ogni punto di I** .

□ Teorema 8

♪ Se è $f''(x_0) > 0$, allora la funzione ha, in x_0 , la **concavità rivolta verso l'alto**;

♪ se è $f''(x_0) < 0$, allora la funzione ha, in x_0 , la **concavità rivolta verso il basso**.

Insomma:

♪ **laddove la derivata seconda è positiva, la concavità è rivolta verso l'alto**;

♪ **laddove la derivata seconda è negativa, la concavità è rivolta verso il basso**

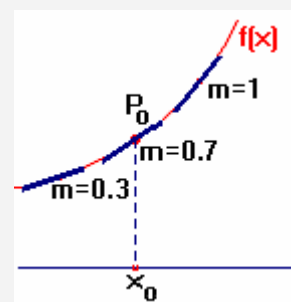
(ricordiamo che l'esistenza della " y " in un punto presuppone l'esistenza della " y' " in quel punto, anzi: addirittura in tutto un intorno del punto considerato).

Giustificazione con l'intuizione geometrica del teorema 8

Poiché la f'' non è altro che la derivata della f' ,
se la $f''(x_0) > 0$, allora la f' è crescente in x_0 ;
ora, si capisce che
se il coefficiente angolare della tangente alla curva
cresce quando si attraversa l'ascissa x_0 ,
la funzione è obbligata ad avere la concavità
rivolta verso l'alto (vedi figura qui a fianco).

Analogamente, se fosse $f''(x_0) < 0$...

Fig. 16



*Tuttavia, la considerazione intuitiva di carattere geometrico appena fatta
non può pretendere di costituire una dimostrazione rigorosa dell'enunciato.
Vediamo qui di seguito tale dimostrazione.*

Dimostrazione del teorema 8

Supponiamo $f''(x_0) > 0$.

Vogliamo dimostrare che f ha, in x_0 , la concavità rivolta verso l'alto.

Dovremo allora far vedere che, in un intorno di x_0 escluso x_0 , il grafico della funzione sta *al di sopra* della retta ad esso tangente in $(x_0, f(x_0))$.

L'equazione di tale retta tangente è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

ossia

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Si tratterà dunque di provare che, in un intorno di x_0 escluso x_0 , la differenza

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

è > 0 .

Indichiamo con $Y(x)$ questa differenza:

$$Y(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

Avremo:

$$Y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \text{ da cui } Y(x_0) = 0;$$

$$Y'(x) = f'(x) - f'(x_0) \text{ da cui } Y'(x_0) = 0;$$

$$Y''(x) = f''(x) \text{ da cui } Y''(x_0) = f''(x_0)$$

Essendo $f''(x_0) > 0$, sarà dunque $Y''(x_0) > 0$, ed essendo $Y'(x_0) = 0$ (x_0 punto stazionario per Y), x_0 sarà punto di minimo forte per Y (teorema 7).

Ora, essendo $Y(x_0) = 0$ e x_0 punto di minimo forte per Y , in un intorno di x_0 , escluso x_0 , sarà $Y(x) > 0$, come volevasi dimostrare (NOTA).

*Analoga è la dimostrazione del teorema nel caso $f''(x_0) < 0$
(caso nel quale la tesi è che f abbia, in x_0 , la concavità rivolta verso il basso)*

NOTA

Si può anche evitare di citare il precedente teorema 7.

Basta ragionare così: Essendo $f''(x_0) > 0$, è pure $Y''(x_0) > 0$.

Ma allora $Y'(x)$ è crescente in x_0 ; ed essendo $Y'(x_0) = 0$,

$Y'(x)$ sarà negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra;

pertanto $Y(x)$ sarà decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra.

Ma essendo $Y(x_0) = 0$, ciò implica $Y(x) > 0$ su tutto un intorno di x_0 , eccettuato x_0 .

IMPORTANTE “NOTA NELLA NOTA”

In realtà, quando noi diciamo, ad es., che

$Y'(x)$ è negativa, e perciò $Y(x)$ decrescente, “a sinistra di x_0 ”, e

$Y'(x)$ è positiva, e perciò $Y(x)$ crescente, “a destra di x_0 ” intendiamo

“in un intorno sinistro di x_0 ESCLUSO x_0 ”, “in un intorno destro di x_0 ESCLUSO x_0 ”

quindi la conclusione $Y(x) > Y(x_0) = 0$ richiederebbe, per la precisione,

un riferimento alla continuità della $Y(x)$ in x_0

(qui assicurata dal fatto che $Y(x)$ è derivabile in x_0) e una citazione del Lemma 1.

Ormai però noi padroneggiamo ben solidamente la problematica del Lemma 1,

per cui possiamo permetterci esposizioni più sintetiche, che lascino sottintesa qualche puntualizzazione, se questo può andare a vantaggio dell'efficacia espositiva.

D'altronde così abbiamo già fatto nel corso della dimostrazione della Seconda Parte del Teorema 7.

E in questo modo ci prenderemo la licenza di fare anche in seguito.

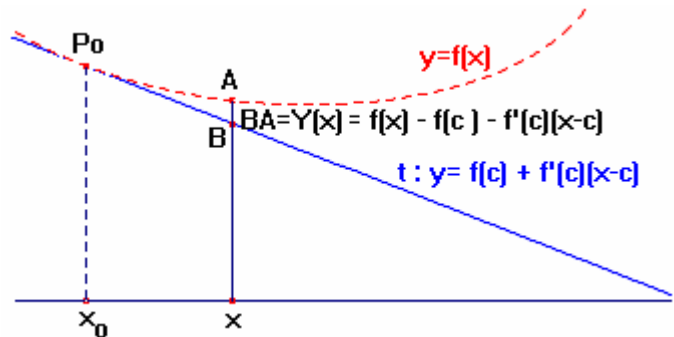


Fig. 17

2.11 RICERCA DEI FLESSI A TANGENTE OBLIQUA O VERTICALE COL METODO DELLO STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

□ Teorema 9

Se risulta $f''(x_0) = 0$

e se, nel passaggio dalla sinistra alla destra del punto x_0 , la $f''(x)$ cambia di segno, allora la funzione ha un flesso in x_0 :

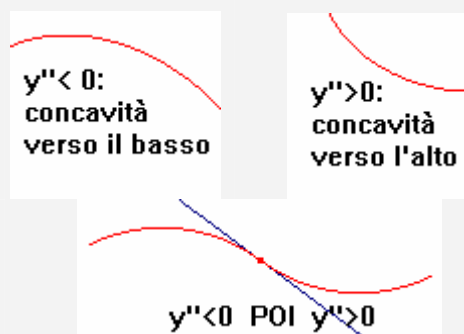
- flesso **ascendente**, se la derivata seconda f'' è **negativa a sinistra** di x_0 e **positiva a destra**;
- flesso **discendente**, se la derivata seconda f'' è **positiva a sinistra** di x_0 e **negativa a destra**.

Giustificazione con l'intuizione geometrica del teorema 9.

♥ In effetti, se, nell'attraversare l'ascissa x_0 , la y'' cambia di segno, allora la y cambierà di concavità; è perciò intuitivo che si abbia un flesso.

Basta pensare che

- $y'' > 0$ **implica concavità rivolta verso l'alto**
- $y'' < 0$ **implica concavità rivolta verso il basso**, per convincersi della validità del teorema.



Figg. 18a, 18b, 18c

Tuttavia, questo ragionamento non costituisce una dimostrazione rigorosa dell'enunciato.

Infatti, quando si dice che f ha, ad esempio, la concavità rivolta verso l'alto (o verso il basso) in un punto di ascissa x diversa da x_0 , con ciò si afferma che il grafico della f sta, nell'intorno di x , al di sopra (o al di sotto) della tangente nel punto $(x, f(x))$, mentre affermare che si ha un flesso in x_0 significa dire che la funzione attraversa, in x_0 , la tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Insomma, la tesi del teorema si riferisce alla posizione della curva rispetto alla retta tangente nel punto di ascissa x_0 ,

mentre l'ipotesi si riferisce alla posizione della curva rispetto alle diverse tangenti nei diversi punti di ascissa x prossima a x_0 .

Di conseguenza, il passaggio dall'ipotesi alla tesi non è così banale come potrebbe sembrare a prima vista! Dimostriamo, dunque, il teorema.

Dimostrazione

Per ipotesi, la $f''(x)$ cambia di segno nell'attraversamento dell'ascissa x_0 ; supponiamo ad esempio, per meglio fissare le idee, che $f''(x)$ sia negativa in un intorno sinistro di x_0 e positiva in un intorno destro di x_0 (la dimostrazione sarebbe poi perfettamente analoga se andassimo a prendere il caso opposto).

Consideriamo la medesima "funzione differenza" introdotta nella dimostrazione del precedente Teorema 8:

$$Y(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Questa $Y(x)$ è la differenza fra l'ordinata del punto della curva che ha ascissa x , e l'ordinata del punto di ascissa x sulla retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Dunque, avremo:

$$Y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{da cui} \quad Y(x_0) = 0;$$

$$Y'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \text{da cui} \quad Y'(x_0) = 0;$$

$$Y''(x) = f''(x) \quad \text{da cui} \quad Y''(x_0) = f''(x_0) = 0.$$

Essendo $Y''(x) = f''(x)$, la $Y''(x)$ sarà negativa in un intorno sinistro di x_0 e positiva in un intorno destro; pertanto $Y'(x)$ sarà decrescente in un intorno sinistro di x_0 e crescente in un intorno destro;

e poiché $Y'(x_0) = 0$, $Y'(x)$ sarà allora positiva sia in un intorno sinistro di x_0 che in un intorno destro.

Ma allora $Y(x)$ sarà crescente sia in un intorno sinistro di x_0 che in un intorno destro;

e poiché $Y(x_0) = 0$, $Y(x)$ sarà negativa in un intorno sinistro di x_0 e positiva in un intorno destro.

Ricordando a questo punto che $Y(x)$ è la differenza fra l'ordinata sulla curva e l'ordinata sulla tangente in x_0 , ciò dimostra che x_0 è punto di flesso ascendente per la funzione f .

Si può dimostrare (ma noi ometteremo questa dimostrazione) che il teorema 9 vale anche sotto ipotesi meno restrittive: non è necessario che si verifichi la condizione $f''(x_0) = 0$ (anzi, la f'' potrebbe pure non esistere in x_0) ...

□ Teorema 9'

Purché f'' cambi di segno nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa x_0 , e purché la curva ammetta retta tangente, eventualmente anche verticale, nel punto $(x_0, f(x_0))$, indipendentemente dall'esistenza o dal valore della f'' nel punto x_0 , x_0 sarà punto di flesso per la funzione f .

Osservazioni

In considerazione del Teorema 9, e visto che negli esercizi la situazione più frequente è di trovarsi di fronte a funzioni "tranquille", nel senso che sono dotate di derivata prima e derivata seconda continue nel dominio della funzione, **si dice spesso che i punti di flesso vanno ricercati fra le soluzioni dell'equazione $y'' = 0$... questa affermazione, però, è un'indicazione di carattere generale, ma non è completamente vera. Infatti, oltre alle ascisse di flesso così trovate, potrebbero esserci anche altre ascisse di flesso:**

- **le ascisse alle quali abbiamo accennato presentando l'enunciato del teorema 9'**, ossia le ascisse attraversando le quali la y'' cambia di segno senza annullarsi (purché però esista la retta tangente nel punto considerato, ossia si possa parlare della $y'(x_0)$, finita o infinita che sia):
 - ✓ è questo il caso, ad esempio, della ben nota funzione $y = \sqrt[3]{x}$,
 - ✓ oppure della $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2} + x = x^{5/3} + x$ (vedi figura 19a), interessante per avere derivata prima finita ma derivata seconda infinita nell'origine;
- **altre ascisse di flesso per le quali non sono verificate né le ipotesi del Teorema 9, né quelle del 9'**; sebbene, per la verità, per rintracciare casi del genere sia necessaria una certa fantasia (le figure 19b, 19c mostrano due situazioni di questo tipo). Infatti, i teoremi 9 e 9' esprimono condizioni sufficienti, ma non necessarie per la presenza di un flesso.

Allora, **in definitiva, riguardo alla ricerca dei flessi non orizzontali, potremo dare il seguente metodo:**

a) Risolvere innanzitutto l'equazione $y'' = 0$.

Fra le ascisse che si troveranno risolvendo tale equazione, saranno di flesso soltanto quelle attraversando le quali la y'' cambia di segno (= la y cambia concavità); **si studierà perciò il segno della y'' mediante la disequazione $y'' > 0$ e da tale studio si trarranno le conclusioni opportune**

b) Andare successivamente a vedere se, oltre ai punti di flesso precedentemente trovati, ne esistano altri.

Quindi:

- riprendere lo studio del segno della y'' per vedere se ci sono ascisse attraversando le quali la y'' cambia di segno senza annullarsi (controllare però che in corrispondenza di tali ascisse esista o sia infinita la y');
- valutare se esistano (caso ben raro) altre ascisse di flesso, per le quali non siano verificate né le ipotesi del teorema 9, né quelle del 9'.

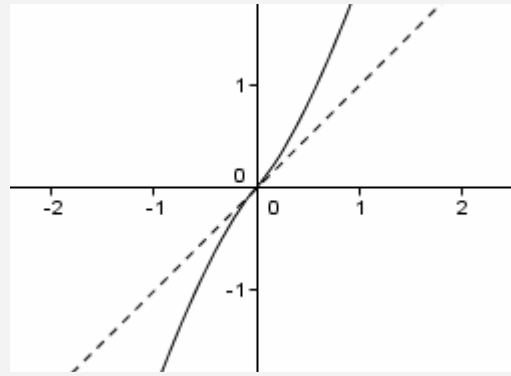
Infine, possiamo osservare che la ricerca dei flessi a tangente obliqua o verticale con lo studio del segno della derivata seconda viene di solito effettuata, in uno studio di funzione, dopo aver determinato **i flessi a tangente orizzontale**; è chiaro che questi ultimi **verranno così ritrovati una seconda volta** (e ciò potrà allora costituire una verifica di una parte del lavoro già svolto).

Figura 19a:

$$y = x \cdot \sqrt[3]{x^2} + x = x^{5/3} + x$$

y'' cambia di segno, nell'attraversamento dell'ascissa 0,
ma $y''(0)$ non esiste (va all'infinito).
Interessante constatare che invece esiste finita $y'(0)$.
Non valgono le ipotesi del Teorema 9,
in compenso sono verificate quelle del Teorema 9'.

La funzione ha in $O(0,0)$ un punto di flesso.

fig. 19a**Figura 19b:**

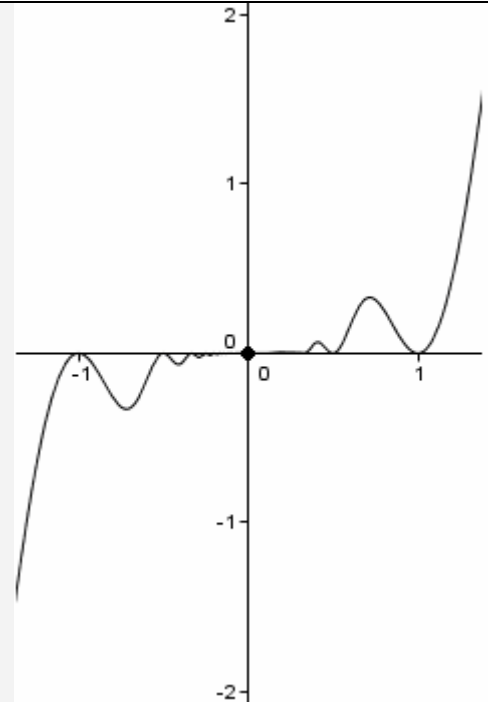
qui si ha un flesso senza che siano verificate, nel punto in questione,
né le ipotesi del Teorema 9, né quelle del Teorema 9'.

In effetti, la y'' cambia di segno infinite volte
in ogni intorno sinistro e in ogni intorno destro dell'ascissa di flesso,
quindi non si può dire che si abbia
"un cambiamento di segno della derivata seconda
nell'attraversamento dell'ascissa"

Osserviamo ancora che
il grafico della funzione attraversa, nell'origine, la retta tangente in O
(di equazione $y = 0$),
ma in qualsiasi intorno dell'ascissa 0,
tale retta viene toccata infinite volte dalla curva.
Siamo in presenza, potremmo dire, di un "flesso improprio" nell'origine.

Per inciso, la determinazione di $g'(x)$, $g'(0)$, $g''(x)$, $g''(0)$
costituisce, per questa particolare funzione g ,
un esercizio estremamente istruttivo.

Ci vuoi provare?

fig. 19b

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

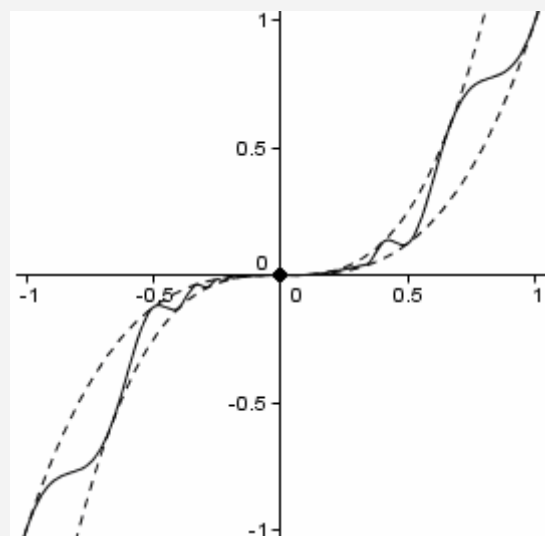
Figura 19c:

(le due funzioni che "bordano" la $h(x)$
sono $y = x^3$ e $y = 2x^3$)

Il comportamento di questa funzione $h(x)$
richiama quello della funzione precedente;
qui però la retta tangente nell'origine
(che è ancora la $y = 0$)
NON viene toccata dalla curva,
eccetto, appunto, nell'origine
dove viene "attraversata".

Il flesso non è più, come nel caso precedente,
"improprio".

Ma è pur sempre un flesso "anomalo"
per il fatto che la y''
cambia di segno infinite volte in qualsiasi intorno
dell'ascissa di flesso,
quindi non si può affermare che cambi di segno
nell'attraversamento dell'ascissa di flesso.

Fig. 19c

$$h(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} + x^3 & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

2.12 RICERCA DEI FLESSI (A TANGENTE NON VERTICALE) COL METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

□ Teorema 10

Sia x_0 un punto in cui $f''(x_0) = 0$;
si calcolino le derivate successive $f'''(x_0), f^{IV}(x_0), f^V(x_0), \dots$,
fino a trovare la prima di queste derivate che sia diversa da 0: $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

A questo punto:

- ♪ se n è dispari, allora x_0 è un punto di flesso, e precisamente:
 - a) di flesso *ascendente* se $f^{(n)}(x_0) > 0$
 - b) di flesso *discendente* se $f^{(n)}(x_0) < 0$
- ♫ se n è pari, allora x_0 non è un punto di flesso, bensì:
 - c) è un punto in cui f volge la concavità verso l'alto se $f^{(n)}(x_0) > 0$
 - d) è un punto in cui f volge la concavità verso il basso se $f^{(n)}(x_0) < 0$

Dimostrazione

Si effettua come per il teorema 7, deducendo, da ciò che si sa sulla derivata di ordine più alto, informazioni sulla derivata di ordine immediatamente inferiore, e così via.

Nella dim. del teorema 7 occorre giungere a deduzioni riguardanti la derivata prima, per poi trarre da queste la conclusione riguardante la funzione; qui invece "salteremo" direttamente dalla derivata seconda alla funzione, perché ci interessano questioni di concavità e convessità, e non più di andamento crescente o decrescente. Ci limiteremo a ragionare *su due casi particolari*, dopodiché sarà chiara la possibilità di procedere in modo analogo per qualsiasi altro caso particolare, e, volendo, di formulare una dimostrazione di carattere generale.

Supponiamo $f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{IV}(x_0) = 0$, e invece $f^V(x_0) < 0$.
Il fatto che sia $f^V(x_0) < 0$ ci dice che la $f^{IV}(x)$ è decrescente in x_0 .
Ma $f^{IV}(x_0) = 0$.
Quindi $f^{IV}(x)$ è positiva a sinistra di x_0 , negativa a destra di x_0 .
Quindi $f'''(x)$ è crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra di x_0 .
Ma $f'''(x_0) = 0$. Quindi $f'''(x)$ è negativa sia a sinistra che a destra di x_0 .
Quindi $f''(x)$ è decrescente sia a sinistra che a destra di x_0 .
Ma $f''(x_0) = 0$. Quindi $f''(x)$ è positiva a sinistra di x_0 , negativa a destra di x_0 .
Pertanto la f cambia concavità
nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa x_0 :
 x_0 è ascissa di flesso (per il precedente teorema 9).
Si tratta di un flesso discendente perché la $f''(x)$ passa da positiva a negativa,
quindi la f da convessa diventa concava. La tesi è dimostrata!

**Traduci in disegno
tu stesso
le varie fasi
della dimostrazione!**

Ora vediamo la dimostrazione nel caso in cui
 $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, e $f^{IV}(x_0) > 0$.
Essendo $f^{IV}(x_0) > 0$ ne deduciamo che la $f'''(x)$ è crescente in x_0 .
Ma $f'''(x_0) = 0$. Quindi $f'''(x)$ è negativa a sinistra di x_0 , positiva a destra di x_0 .
Quindi $f''(x)$ è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0 .
Ma $f''(x_0) = 0$. Quindi $f''(x)$ è positiva sia a sinistra che a destra di x_0 .
Pertanto la f ha la concavità rivolta verso l'alto sia a sinistra che a destra di x_0 .
E' intuitivo, e si potrebbe d'altronde dimostrare utilizzando
la "funzione differenza" $Y(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$
in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 9,
che la f ha quindi la concavità rivolta verso l'alto in x_0 . La tesi è dimostrata.

OSSERVAZIONE

Il teorema appena stabilito fornisce uno strumento in più per la determinazione dei flessi di una funzione. Si tratta dunque di risolvere l'equazione $y'' = 0$, per determinare le ascisse in cui si annulla la derivata seconda. In corrispondenza di ciascuna di queste ascisse, si calcoleranno poi le derivate successive della funzione, fino a trovare la prima derivata non nulla. Nel caso in cui tale derivata sia di ordine dispari... ecc. ecc. Così facendo, si potranno trovare alcuni flessi, ma può darsi che ce ne siano pure altri: magari a tangente verticale (il presente metodo, richiedendo l'esistenza della derivata seconda in x_0 , presuppone che la funzione ammetta derivata prima in x_0 - più precisamente, su tutto un intorno di x_0 - quindi restano esclusi gli eventuali punti a retta tangente verticale); o comunque tali che la y'' cambi di segno senza annullarsi; oppure ancora "anomali". Pertanto si proseguirà come al punto b) delle Osservazioni al Teorema 9'.

2.13 ASINTOTI

Un "asintoto", per una funzione $y = f(x)$, è una retta alla quale il grafico della funzione "si avvicina indefinitamente", "si avvicina di tanto quanto noi vogliamo", nel senso precisato dalle tre definizioni che seguono.

Distinguiamo fra *tre* tipi di asintoti: verticali, orizzontali, obliqui.

Asintoti verticali

La retta verticale $x = x_0$ è "asintoto verticale"

per la funzione $y = f(x)$
se e solo se

la f tende all'infinito quando x tende a x_0 ,
ossia

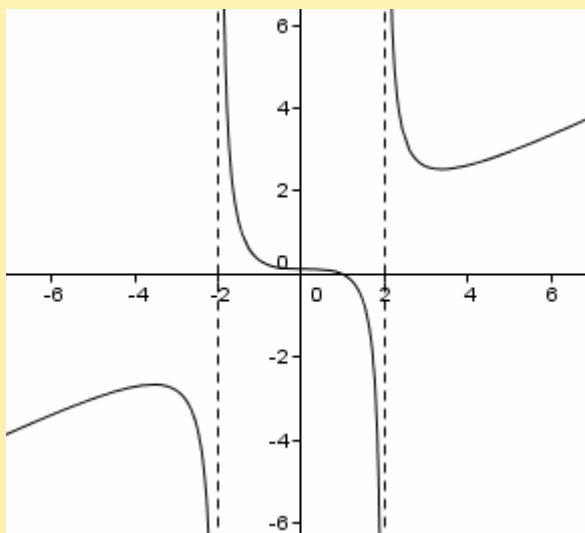
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Nella figura, è rappresentata la funzione

$$y = \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 8}$$

coi suoi due asintoti verticali:
le rette $x = -2$ e $x = 2$

fig. 20a



Può accadere che sia infinito solo il limite sinistro, o solo il limite destro, nel qual caso si parla di "asintoto verticale sinistro" o "destro", rispettivamente.

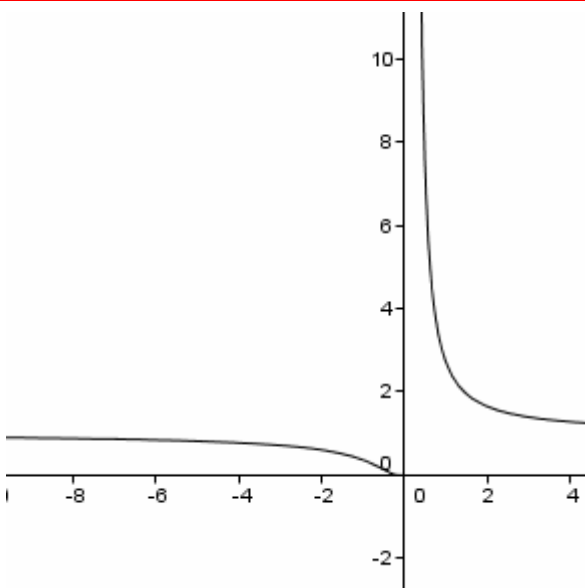
Nella figura è rappresentata la funzione

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

per la quale la retta $x = 0$ è "asintoto verticale unilaterale" (precisamente: destro) in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

fig. 20b



INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI VERTICALI

Andiamo a considerare (se ve ne sono) le ascisse che costituiscono "interruzioni" del dominio, o (caso poco frequente) le ascisse nelle quali la funzione, pur essendo definita, presenta una discontinuità.

Calcoliamo quindi il limite della nostra funzione, al tendere di x a ciascuna di tali ascisse.

Quando il limite (bilaterale o unilaterale) è infinito, ecco che avremo individuato un asintoto verticale.

Asintoti orizzontali

La retta orizzontale $y = k$ è
 "asintoto orizzontale"
 per la funzione $y = f(x)$
 se $f(x)$ tende a k
 quando x tende all'infinito,

ossia

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = k$$

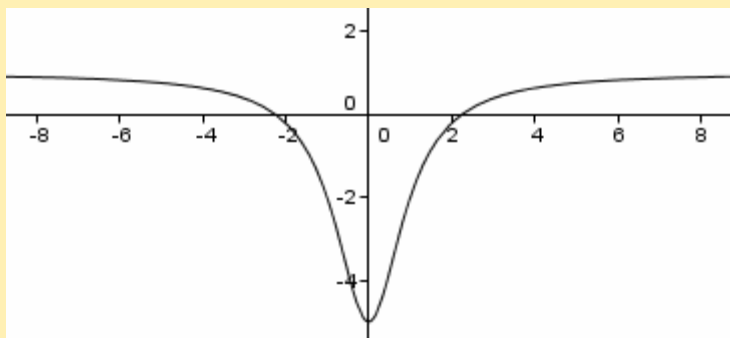
Nella figura, è rappresentata la funzione

$$y = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1}$$

col suo asintoto orizzontale "bilaterale"

$$y = 1.$$

fig. 21



Si possono anche avere
asintoti orizzontali "unilaterali".

Ad esempio, la funzione
 rappresentata in figura 21b è

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + x}}$$

e poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2/3$$

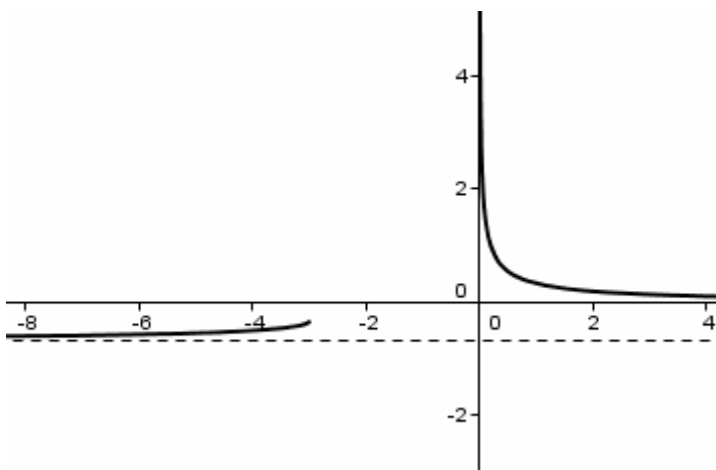
possiamo dire che per questa funzione
 la retta $y = 0$

fa da asintoto orizzontale "destro",

e la retta $y = -2/3$

fa da asintoto orizzontale "sinistro".

fig. 21b



La figura 21c qui a fianco
 mostra la funzione

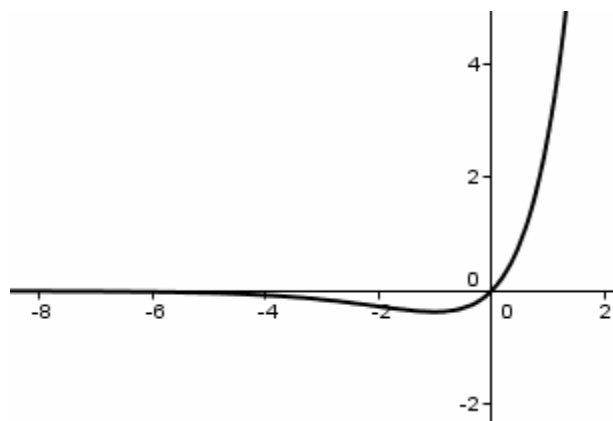
$$y = x e^x$$

che presenta soltanto

un asintoto orizzontale sinistro:

la retta $y = 0$.

fig. 21c



INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI ORIZZONTALI

Calcoliamo il limite della funzione data, per x che tende a $-\infty$ e per x che tende a $+\infty$
 (ovviamente, ciò ha senso soltanto se il dominio della funzione
 è illimitato verso sinistra, o, rispettivamente, verso destra).

Se il limite che si trova è finito, ecco individuato un asintoto orizzontale.

Se invece tale limite non esiste oppure è infinito, niente asintoto orizzontale;
 tuttavia, in caso di limite infinito, potrà eventualmente esserci un asintoto obliquo.

Asintoti obliqui

La retta obliqua $y = mx + q$ è
 “**asintoto obliquo**”

per la funzione $y = f(x)$
 se e solo se la differenza

$$f(x) - [mx + q]$$

(ossia la differenza fra le ordinate dei due punti,
 sul grafico della funzione e sulla retta,
 aventi la stessa ascissa x),
 tende a zero quando x tende all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} BA = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

Un asintoto obliquo

può eventualmente anche essere “unilaterale”
 (= soltanto “sinistro” o soltanto “destro”)

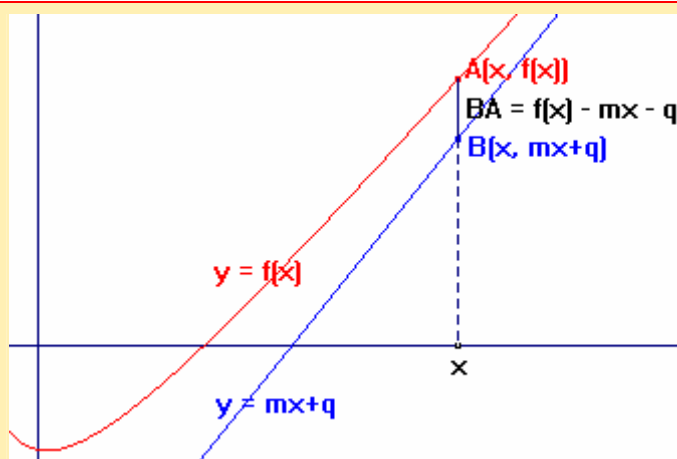


fig. 22a

Nella figura 22b è rappresentata la funzione

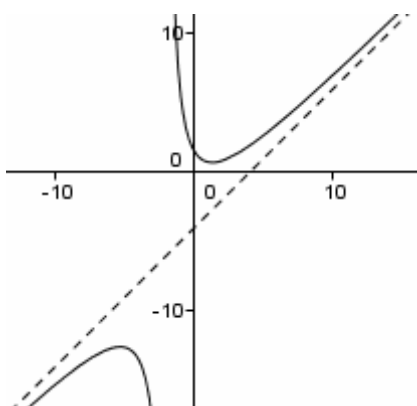
$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$$

che ammette come asintoto obliquo (bilaterale)
 la retta $y = x - 4$

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} - (x - 4) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x + 2} = 0$$

fig. 22b



INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI OBLIQUI

Innanzitutto, avrà senso ricercare un eventuale asintoto obliquo bilaterale/destro/sinistro per la funzione
 $y = f(x)$

soltanto se si è constatato che la funzione tende a infinito quando x tende a $\infty / +\infty / -\infty$

Dopodiché, si ricorre al seguente

Teorema 11

La retta obliqua $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se e solo se

- esiste finito e diverso da zero il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$
- esiste finito il $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$ (dove m è il valore al quale si riferisce il punto a)

Pertanto per la ricerca si procede come segue:

- si calcola il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$;
 se si trova che tale limite non esiste oppure è infinito oppure è nullo,
 allora l'asintoto obliquo non c'è;
 se invece tale limite è finito e diverso da zero, lo si indica con m ...
- ... e poi si va a calcolare il $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$;
 se si trova che tale limite non esiste oppure è infinito, allora l'asintoto obliquo non c'è;
 se invece tale limite è finito, lo si indica con q ...
- ... e a questo punto resta stabilito che la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la $f(x)$.

ESEMPIO

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

per cui la f ammette come ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO la retta $y=1$.

Invece

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

per cui

la f POTREBBE avere un asintoto obliquo sinistro .

Calcoliamo il

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e constatiamo che

tale limite vale -2 .

Poiché

tale limite è finito e diverso da 0 ,

ha senso continuare.

Poniamo dunque

$$m = -2$$

e calcoliamo il

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x - (-2x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \dots = -1$$

Avendo trovato che

tale limite esiste finito ,

possiamo porre

$$q = -1$$

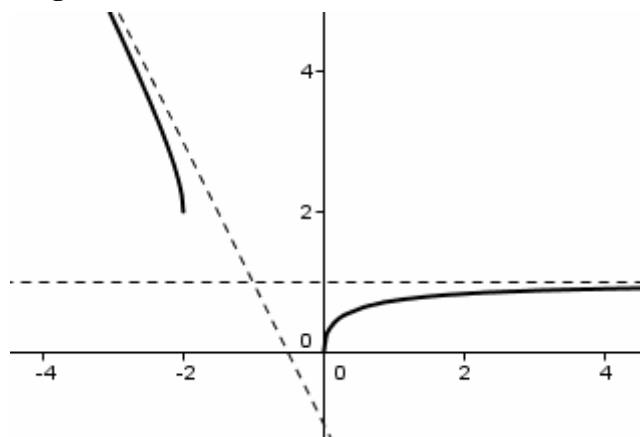
e affermare che la retta

la retta $y = -2x - 1$ è ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO

per la nostra funzione.

Ed ecco il grafico!!!

Fig. 22c



OSSERVAZIONE 1

nell'esporre il Teorema 11 e le successive indicazioni per la ricerca degli asintoti obliqui, abbiamo fatto tendere x a "infinito";
 se si pensa di far tendere invece x a "più infinito"
 o, rispettivamente, "meno infinito",
 tutto il discorso rimane valido
 e l'asintoto eventualmente trovato, invece di essere "bilaterale", è soltanto "unilaterale".
 A dire il vero, abbiamo già dato tutto ciò per acquisito quando abbiamo svolto l'esempio precedente.

OSSERVAZIONE 2

Per il calcolo del $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,

che, poiché la $f(x)$ tende a infinito, si presenterà come forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$,

si potrà utilizzare, volendo, il **Teorema di De l'Hospital**.

Tale teorema assicura che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \quad (\text{ammesso che esista il } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x))$$

e tutto ciò ha un preciso riscontro geometrico:

se esiste il limite, per x che tende all'infinito, della derivata prima $f'(x)$, ciò significa che la "pendenza" della f , quando x tende all'infinito, tende ad un determinato valore; ora è del tutto evidente che, se la funzione ammette un asintoto obliquo, il valore al quale si avvicina la pendenza della $f(x)$ debba coincidere con la pendenza che è propria dell'asintoto, ossia col coefficiente angolare m dell'asintoto stesso.

OSSERVAZIONE 3

Per certe funzioni, accade che si verifichi la prima delle due condizioni a), b), ma non la seconda.

In questi casi, dunque, esiste finito e diverso da zero il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$

ma non esiste, oppure è infinito, il $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$

Si parla allora di una "**direzione asintotica**" m , **senza che ci sia asintoto**.

□ Esempio:

la funzione $y = x + \ln x$ ammette, per $x \rightarrow +\infty$, la direzione asintotica $m = 1$, perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\rightarrow 0} \right) = 1$$

ma non ammette asintoto obliquo, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \ln x - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$$

Dimostrazione del teorema 11**PRIMA PARTE**

Facciamo vedere che se la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la $f(x)$, allora risulta

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$$

Supponiamo dunque che la retta $y = mx + q$ sia asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$.

Allora, per definizione di asintoto obliquo, si avrà

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

e dunque, a maggior ragione,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$

da cui:

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - m - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - m \quad \left(\text{il } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} \text{ è } 0 \right)$$

Ma da

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - m$$

si ricava appunto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Essendo poi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

sarà anche

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$$

La dimostrazione di questa PRIMA PARTE è così completata.

SECONDA PARTE

Supponiamo che esistano finiti i due limiti

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$$

Vogliamo dimostrare che, considerata la retta $y = mx + q$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

e ciò significherà che la $y = mx + q$ fa da asintoto obliquo per la $f(x)$

In effetti, molto facilmente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] - q = q - q = 0$$

e con ciò la dimostrazione è davvero completata.

3) RIASSUNTO "PRATICO" DELLE IDEE FONDAMENTALI ESEMPI SVOLTI ED ESERCIZI

IN GENERALE

Supponiamo di voler determinare le caratteristiche e il grafico di una funzione, data la sua equazione $y = f(x)$.

Cosa occorrerà fare?

0)

Può darsi che il grafico della funzione f da studiare si possa ricavare con "manipolazioni"

a partire dal grafico

(già noto o comunque molto più facile da tracciare) di una funzione più semplice g .

Ad esempio, ciò avviene se f è della forma

$$g(x) + k, k \cdot g(x), g(x + k), g(kx),$$

$$a \cdot g(x) + b, g(ax + b), \frac{1}{g(x)}, |g(x)|,$$

$$\sqrt[n]{g(x)}, [g(x)]^n, a^{g(x)}, \log_a g(x), \text{ ecc.}$$

Bisogna comunque valutare *se valga la pena* di impostare un lavoro di questo tipo, tenendo conto della difficoltà delle manipolazioni; a volte, questo approccio "dà subito un'idea" - utilissima - dell'andamento della f , ricavato da quello della g , ma per la determinazione dei massimi, minimi ecc. sarà poi necessario ricorrere alle tecniche esposte ai punti successivi
[Approfondimento 1, pag. 53]

1)

Determinare il dominio D della funzione

2)

Chiedersi se la funzione

è pari: $f(-x) = f(x)$

e quindi ha grafico simmetrico rispetto all'asse y

dispari: $f(-x) = -f(x)$

e quindi ha grafico simmetrico rispetto all'origine

oppure non è né pari né dispari.

Nel caso la funzione sia pari o dispari, nelle varie fasi dello studio potremo e dovremo tenere presente la simmetria riscontrata; potremmo addirittura decidere di studiare la funzione solo per $x \geq 0$ e poi completarne il grafico per simmetria (la convenienza di procedere in questo modo dipende dalle nostre preferenze, e dalla particolare funzione di volta in volta considerata).

Chiedersi se la funzione è periodica;

in caso affermativo, basterà studiarla su di un intervallo di ampiezza T (essendo T il periodo).

[Approfondimento 2, pag. 53]

AD ESEMPIO ...

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$$

Nel nostro esempio, la costruzione del grafico "per manipolazione di una funzione-base" non è, evidentemente, realizzabile

$$x \neq 0 \quad D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

La funzione del nostro esempio

- non è pari perché $f(-x) \neq f(x)$
- non è dispari perché $f(-x) \neq -f(x)$
- e non è periodica.

3)

Determinare le intersezioni con gli assi

Per l'eventuale intersezione con l'asse **verticale** si porrà $x = 0$

(se, beninteso, l'ascissa 0 appartiene al dominio!) e si ricaverà il corrispondente valore di y

Per le eventuali intersezioni con l'asse **orizzontale** si dovrà porre $y = 0$, ossia risolvere l'equazione $f(x) = 0$.

4)

Studiare il segno della funzione

mediante la disequazione $f(x) > 0$

5)

Calcolare i limiti ai confini del dominio

Così facendo si troveranno anche, se esistono, gli asintoti verticali ed orizzontali

6)

Ricercare gli eventuali asintoti obliqui

Osserviamo che, evidentemente, avrà senso ricercare un eventuale asintoto obliquo per una funzione $y = f(x)$ soltanto se si è constatato che la funzione tende a infinito quando x tende a infinito.

Ricordiamo il Teorema sul quale si basa il procedimento di ricerca degli eventuali asintoti obliqui.

Teorema:

la retta obliqua $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se e solo se

a) esiste finito e diverso da zero il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$

b) esiste finito il $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$

[Approfondimento 3, pag. 53]

Ricercare

le eventuali intersezioni del grafico con gli asintoti.

Nel nostro esempio, il grafico della funzione non interseca l'asse verticale: essendo $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ non si può infatti porre $x = 0$

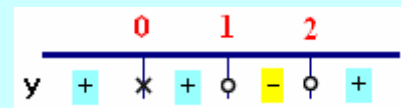
$$y = 0 \text{ quando } \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} = 0$$

$$x = 1 \vee x = 2$$

$$(1, 0) \quad (2, 0)$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x^2} > 0$$

$$x < 1 \text{ ma } x \neq 0, \quad x > 2$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1$$

Abbiamo dunque riconosciuto che la nostra funzione ha un asintoto orizzontale bilaterale (la retta $y = 1$) e ha un asintoto verticale (la retta di equazione $x = 0$, ossia l'asse y)

La funzione del nostro esempio non ha asintoti obliqui (ha invece, come abbiamo visto, un asintoto orizzontale bilaterale).

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$f(x)$ interseca il suo asintoto orizzontale $y = 1$ nel punto $(2/3, 1)$

7)

Calcolare la derivata prima $y' = f'(x)$.

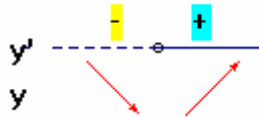
Risolvere l'equazione $f'(x) = 0$
per trovare i cosiddetti "punti stazionari"
(= punti in cui il grafico ha retta tangente orizzontale).

Studiare il segno della derivata prima

con la disequazione $f'(x) > 0$
stabilendo così gli intervalli in cui la funzione è
crescente o decrescente

$y' > 0 \rightarrow$ retta tang. in salita \rightarrow funz. crescente

$y' < 0 \rightarrow$ retta tang. in discesa \rightarrow funz. decrescente



e determinando i punti di massimo relativo
e minimo relativo interni al dominio, nonché
i punti di flesso orizzontale (ascendente o discendente).

Teniamo presente che
per l'analisi dei punti stazionari
esiste anche la risorsa del "metodo
della derivata seconda o delle derivate successive".

8)

Calcolare la derivata seconda $y'' = f''(x)$.

Risolvere l'equazione $f''(x) = 0$.
Quest'ultima fornisce, in generale,
le ascisse dei punti di flesso;

ricordiamo però che

non tutti i punti in cui si annulla la y''
risultano poi di flesso;

e, d'altra parte

(caso non frequentissimo, ma possibile:
basti pensare ai flessi verticali),

si possono avere pure dei flessi in cui
la y'' non si annulla.

Studiare il segno della derivata seconda,

mediante la disequazione $f''(x) > 0$.

Tale studio permetterà di stabilire gli intervalli
in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa:

$y'' > 0 \rightarrow y'$ crescente \rightarrow funzione convessa

$y'' < 0 \rightarrow y'$ decrescente \rightarrow funzione concava



Può talvolta essere conveniente,
per la ricerca dei flessi non orizzontali,
il "metodo delle derivate successive".

In corrispondenza dei punti di flesso
a tangente non orizzontale,
converrà calcolare il valore della derivata prima,
per avere il coefficiente angolare della tangente di flesso,
e disegnare nel grafico "un pezzetto"
di tale tangente di flesso, con l'inclinazione esatta,
segnando accanto ad essa
il valore del suo coefficiente angolare m .

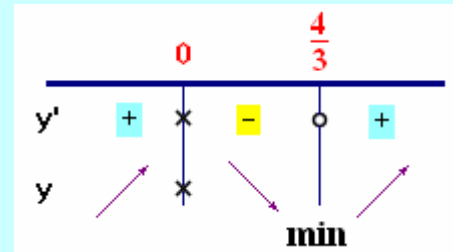
$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

$$y' = \frac{(2x - 3) \cdot x^2 - (x^2 - 3x + 2) \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{3x^2 - 4x}{x^4} = \frac{3x - 4}{x^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 4}{x^3} = 0 \quad x = \frac{4}{3}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 4}{x^3} > 0 \quad x < 0 \vee x > \frac{4}{3}$$



$$x = \frac{4}{3} \rightarrow y = \dots = -\frac{1}{8} \quad \min\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{8}\right)$$

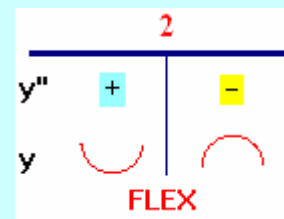
$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

$$y' = \frac{3x - 4}{x^3}$$

$$y'' = \frac{3 \cdot x^3 - (3x - 4) \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-6x^3 + 12x^2}{x^6} = \frac{-6x + 12}{x^4}$$

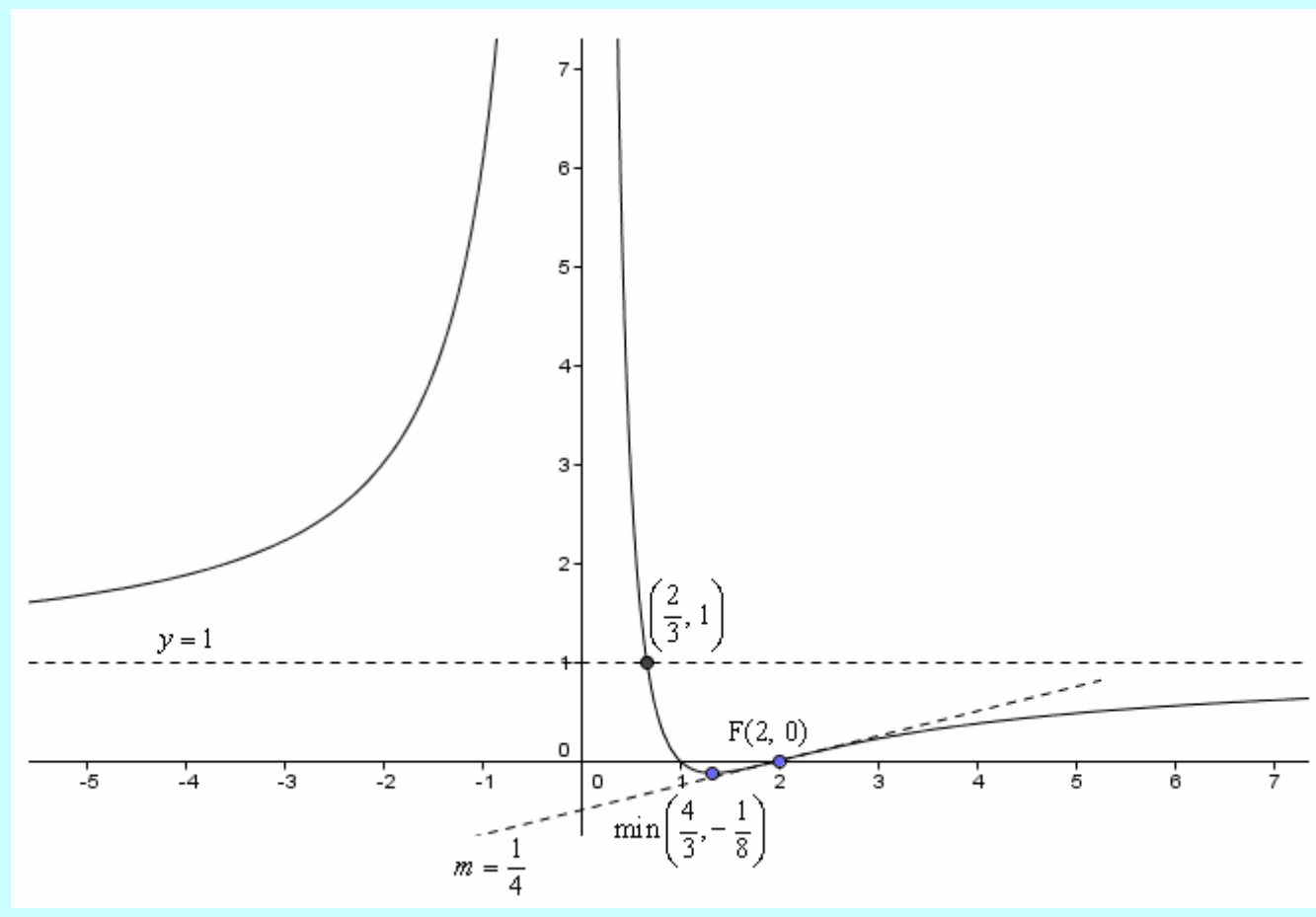
$$\frac{-6x + 12}{x^4} > 0 \quad x < 2$$



$$x = 2 \rightarrow y = 0 \quad F(2, 0)$$

$$y'(2) = \left[\frac{3x - 4}{x^3} \right]_{x=2} = \frac{6 - 4}{8} = \frac{1}{4}$$

Ed ecco il grafico!!!



Approfondimento 1

Sono facilmente costruibili per "manipolazione" i grafici di funzioni come le seguenti:

$$y = 2\ln(x-5); \quad y = \sqrt{\sin(3x)}; \quad y = \frac{1}{x^2-4}; \quad \dots$$

Approfondimento 2

Una funzione goniometrica è periodica.

Tieni presente che, se ad esempio si lavora sull'intervallo $[0; 2\pi]$,

sarà sempre conveniente, nei vari schemi,

andare anche "leggermente a sinistra di 0" e "leggermente a destra di 2π "

Approfondimento 3

Un esempio di funzione dotata di asintoto obliquo:

$$y = g(x) = \frac{x^2}{x-4}$$

Infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x-4} - 1 \cdot x \right] = 4 = q$$

La retta $y = x + 4$ è asintoto obliquo bilaterale per questa funzione

Studio di funzione - Esempi svolti

$$y = \frac{3}{10}x^5 - x^4 = f(x)$$

- ❑ **Dominio** = $(-\infty, +\infty)$
- ❑ **Né pari né dispari**
- ❑ **Intersezioni con l'asse y:** $x = 0 \rightarrow y = 0$

Intersezioni con l'asse x

$$y = 0 \quad \frac{3}{10}x^5 - x^4 = 0; \quad 3x^5 - 10x^4 = 0; \quad x^4(3x - 10) = 0; \quad x = 0 \vee x = \frac{10}{3}$$

- ❑ **Segno della funzione**

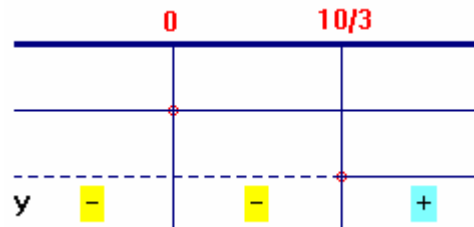
$$y > 0$$

$$\frac{3}{10}x^5 - x^4 > 0; \quad 3x^5 - 10x^4 > 0;$$

$$x^4(3x - 10) > 0;$$

$$x^4 > 0 \quad \text{con} \quad x \neq 0$$

$$3x - 10 > 0 \quad \text{con} \quad x > \frac{10}{3}$$



- ❑ **Limiti ai confini del dominio:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3}{10}x^5 - x^4 \right) = \pm\infty$
- ❑ **Asintoti obliqui:** non ce ne sono. Infatti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

- ❑ **Derivata prima**

$$y = \frac{3}{10}x^5 - x^4 \rightarrow y' = \frac{3}{10} \cdot 5x^4 - 4x^3 = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3$$

$$y' = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3$$

$$y' = 0 \quad \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 = 0; \quad 3x^4 - 8x^3 = 0; \quad x^3(3x - 8) = 0; \quad x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = \frac{8}{3} \rightarrow y = \frac{3}{10} \left(\frac{8}{3} \right)^5 - \left(\frac{8}{3} \right)^4 = \left(\frac{8}{3} \right)^4 \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{8}{3} - 1 \right) = \left(\frac{8}{3} \right)^4 \left(\frac{4}{5} - 1 \right) = -\frac{1}{5} \left(\frac{8}{3} \right)^4 \approx -10,11$$

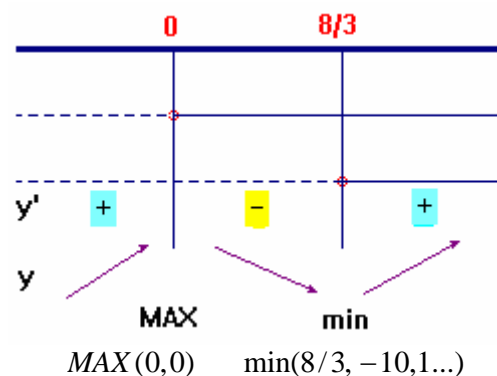
$$y' > 0$$

$$\frac{3}{2}x^4 - 4x^3 > 0; \quad 3x^4 - 8x^3 > 0;$$

$$x^3(3x - 8) > 0;$$

$$x^3 > 0 \quad \text{con} \quad x > 0$$

$$3x - 8 > 0 \quad \text{con} \quad x > \frac{8}{3}$$



□ **Derivata seconda** $y = \frac{3}{10}x^5 - x^4$ $y' = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 4x^3 - 12x^2 = 6x^3 - 12x^2$$

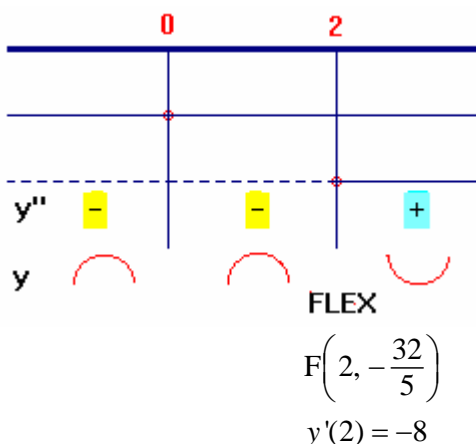
$$y'' = 6x^3 - 12x^2 = 6x^2(x-2)$$

$$y'' = 0 \quad 6x^2(x-2) = 0 \quad x = 0 \vee x = 2$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 2 \rightarrow y = \frac{3}{10} \cdot 32 - 16 = \frac{48}{5} - 16 = -\frac{32}{5} = -6,4$$

$$\begin{aligned} y'' &> 0 \\ 6x^2(x-2) &> 0 \\ x^2 &> 0 \quad \text{con } x \neq 0 \\ x-2 &> 0 \quad \text{con } x > 2 \end{aligned}$$



$x = 0$ è un punto di **concavità**, perché, sebbene sia $y''(0) = 0$, la y'' NON cambia di segno, ma al contrario si mantiene negativa, nell'attraversamento dell'ascissa 0.

Invece il punto di ascissa 2 segna il passaggio dalla concavità alla convessità ed è perciò un **flesso ascendente** ("ascendente" perché la curva passa dal di sotto al di sopra, rispetto alla retta tangente nel punto di ascissa 2).

Il coeff. angolare della tangente inflessionale è $m = y'(2) = \frac{3}{2} \cdot 16 - 4 \cdot 8 = 24 - 32 = -8$.

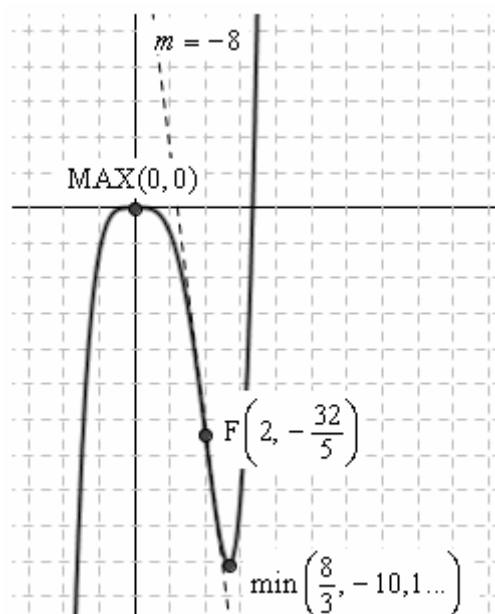
La tangente inflessionale è perciò in discesa piuttosto ripida. La sua equazione è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0); \quad y + \frac{32}{5} = -8 \cdot (x - 2); \quad y = -8x + \frac{48}{5}$$

Ed ecco il grafico della funzione!!!

$$y = \frac{3}{10}x^5 - x^4 = f(x)$$

$$\begin{aligned} &\text{MAX}(0,0) \\ &\text{min}\left(\frac{8}{3}, -10, 1\dots\right) \\ &F\left(2, -\frac{32}{5}\right) \\ &y'(2) = -8 \end{aligned}$$



$$y = \frac{3}{10}x^5 - x^3 = f(x)$$

□ **Dominio** = $(-\infty, +\infty)$

□ **La funzione è dispari:** $f(-x) = -f(x)$

□ **Intersezioni con l'asse y** $x = 0 \rightarrow y = 0$

Intersezioni con l'asse x $y = 0$ $\frac{3}{10}x^5 - x^3 = 0$; $3x^5 - 10x^3 = 0$; $x^3(3x^2 - 10) = 0$;

$$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}} \approx \pm 1,83$$

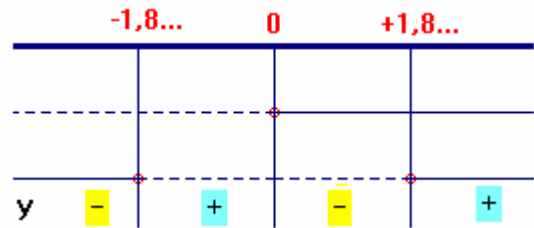
□ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{3}{10}x^5 - x^3 > 0; \quad 3x^5 - 10x^3 > 0;$$

$$x^3(3x^2 - 10) > 0;$$

$$x^3 > 0 \quad \text{con} \quad x > 0$$

$$3x^2 - 10 > 0 \quad \text{con} \quad x < -\sqrt{\frac{10}{3}} \vee x > \sqrt{\frac{10}{3}}$$



□ **Limiti ai confini del dominio** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3}{10}x^5 - x^3 \right) = \pm\infty$

□ **Asintoti obliqui:** Non ce ne sono. Infatti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

□ **Derivata prima**

$$y = \frac{3}{10}x^5 - x^3 \rightarrow y' = \frac{3}{10} \cdot 5x^4 - 3x^2 = \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$$

$$y' = \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$$

$$y' = 0 \quad \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 = 0; \quad 3x^4 - 6x^2 = 0; \quad 3x^2(x^2 - 2) = 0; \quad x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = \sqrt{2} \rightarrow y = \frac{3}{10}(\sqrt{2})^5 - (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^3 \left(\frac{3}{5} - 1 \right) = -\frac{2}{5}(\sqrt{2})^3 = -\frac{4}{5}\sqrt{2} \approx -1,13$$

$$x = -\sqrt{2} \rightarrow y = \frac{4}{5}\sqrt{2}$$

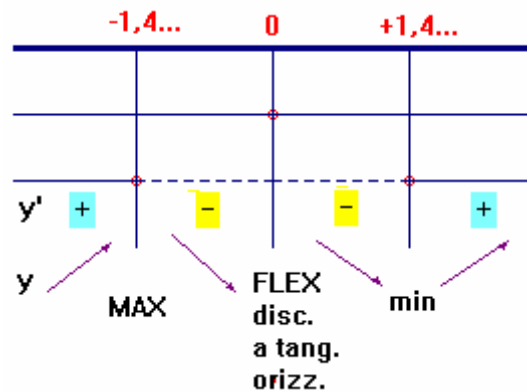
$$y' > 0$$

$$\frac{3}{2}x^4 - 3x^2 > 0; \quad 3x^4 - 6x^2 > 0;$$

$$3x^2(x^2 - 2) > 0;$$

$$x^2 > 0 \quad \text{con} \quad x \neq 0$$

$$x^2 - 2 > 0 \quad \text{con} \quad x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$$



$$\text{MAX} \left(-\sqrt{2}, \frac{4}{5}\sqrt{2} \right) \quad \text{F}(0,0) \quad \text{min} \left(\sqrt{2}, -\frac{4}{5}\sqrt{2} \right)$$

□ **Derivata seconda**

$$y = \frac{3}{10}x^5 - x^3$$

$$y' = \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 4x^3 - 6x = 6x^3 - 6x$$

$$y'' = 6x^3 - 6x = 6x(x^2 - 1)$$

$$y'' = 0 \quad 6x(x^2 - 1) = 0 \quad x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y = \frac{3}{10} - 1 = -\frac{7}{10}$$

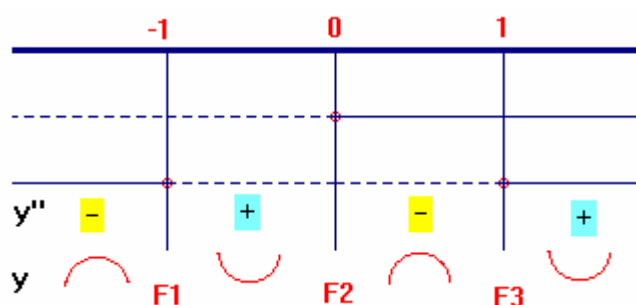
$$x = -1 \rightarrow y = \frac{7}{10}$$

$$y'' > 0$$

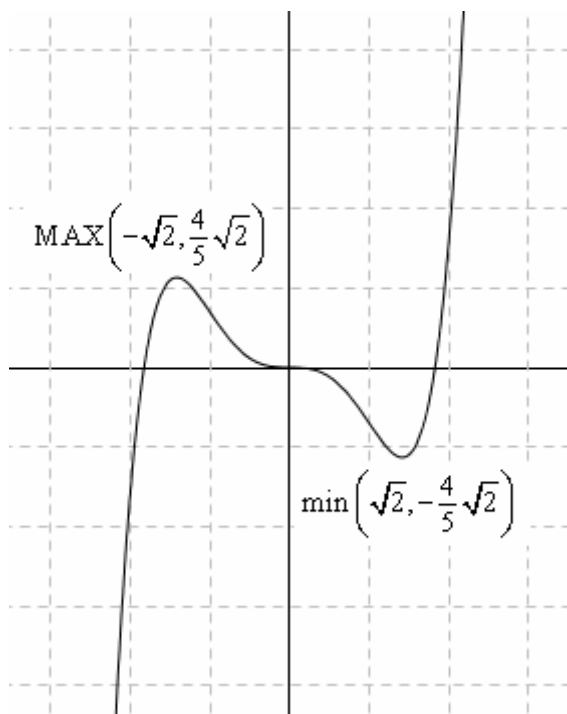
$$6x(x^2 - 1) > 0$$

$$6x > 0 \quad \text{con } x > 0$$

$$x^2 - 1 > 0 \quad \text{con } x < -1 \vee x > 1$$



$$F_1\left(-1, \frac{7}{10}\right) \quad y'(1) = -\frac{3}{2} \quad F_2(0,0) \quad y'(0) = 0 \quad F_3\left(1, \frac{7}{10}\right) \quad y'(1) = -\frac{3}{2}$$



Ed ecco il grafico!!!

$$y = \frac{3}{10}x^5 - x^3 = f(x)$$

$$\text{MAX}\left(-\sqrt{2}, \frac{4}{5}\sqrt{2}\right)$$

$$\text{min}\left(\sqrt{2}, -\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)$$

$$F_1\left(-1, \frac{7}{10}\right) \quad y'(1) = -\frac{3}{2}$$

$$F_2(0,0) \quad y'(0) = 0$$

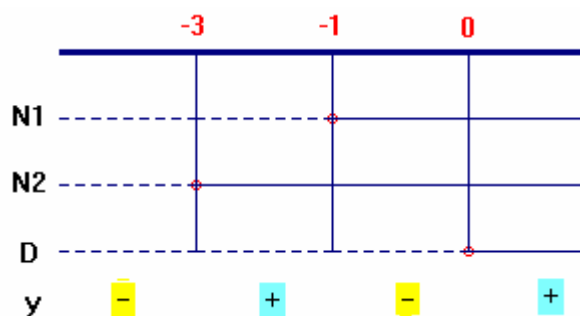
$$F_3\left(1, \frac{7}{10}\right) \quad y'(1) = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{x} = f(x)$$

- ❑ **Dominio** = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- ❑ **La funzione non è né pari, né dispari**
- ❑ **Intersezioni con l'asse y:** non ce ne sono (con $x = 0$ la funzione non è definita)
Intersezioni con l'asse x $y = 0 \quad x = -1 \vee x = -3$
- ❑ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{\overbrace{(x+1)}^{N1} \overbrace{(x+3)}^{N2}}{\underbrace{x}_{D}} > 0$$

$N1 > 0 \quad \text{con } x > -1$
 $N2 > 0 \quad \text{con } x > -3$
 $D > 0 \quad \text{con } x > 0$



- ❑ **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)(x+3)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{(x+1)(x+3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \pm\infty$$

- ❑ **Eventuali asintoti obliqui**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)(x+3)}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x + 3}{x} = 4 = q$$

La retta $y = x + 4$ è perciò **asintoto obliquo bilaterale**.

Si può verificare che la curva non ha NESSUNA INTERSEZIONE CON L'ASINTOTO:

l'equazione $\frac{x^2 + 4x + 3}{x} = x + 4$ è infatti impossibile.

- ❑ **Derivata prima**

$$y' = \frac{d}{dx} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \frac{(2x+4) \cdot x - (x^2 + 4x + 3) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

$$y' = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

$$y' = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow y = \frac{3 + 4\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}} = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} + 12}{3} = 2\sqrt{3} + 4 \approx 7,47$$

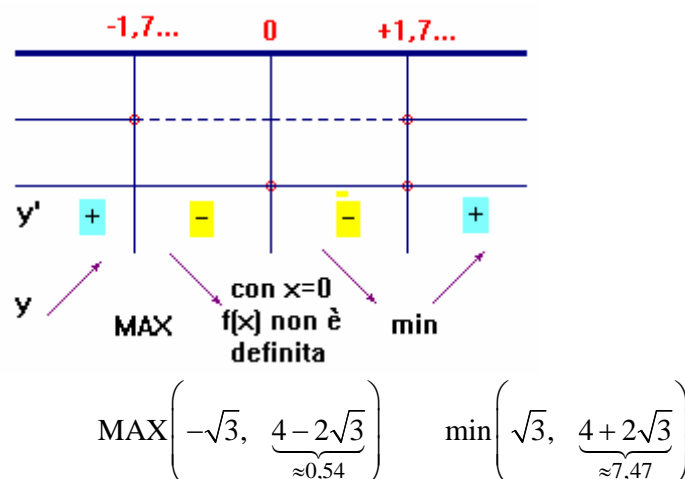
$$x = -\sqrt{3} \rightarrow y = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$$

$$y' > 0$$

$$\frac{x^2 - 3}{x^2} > 0$$

$$N > 0 \quad \text{con} \quad x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$$

$$D > 0 \quad \text{con} \quad x \neq 0$$



□ Derivata seconda

$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{x} \quad y' = \frac{x^2 - 3}{x^2} \quad y'' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 3) \cdot 2x}{x^4} = \frac{6x}{x^4} = \frac{6}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^3}$$

Dunque la y''

- non può mai annullarsi;
- è negativa con x negativo, positiva con x positivo.

Quindi la funzione è

concava con x negativo, convessa con x positivo.

Non si hanno flessi.

Ed ecco il grafico!!!

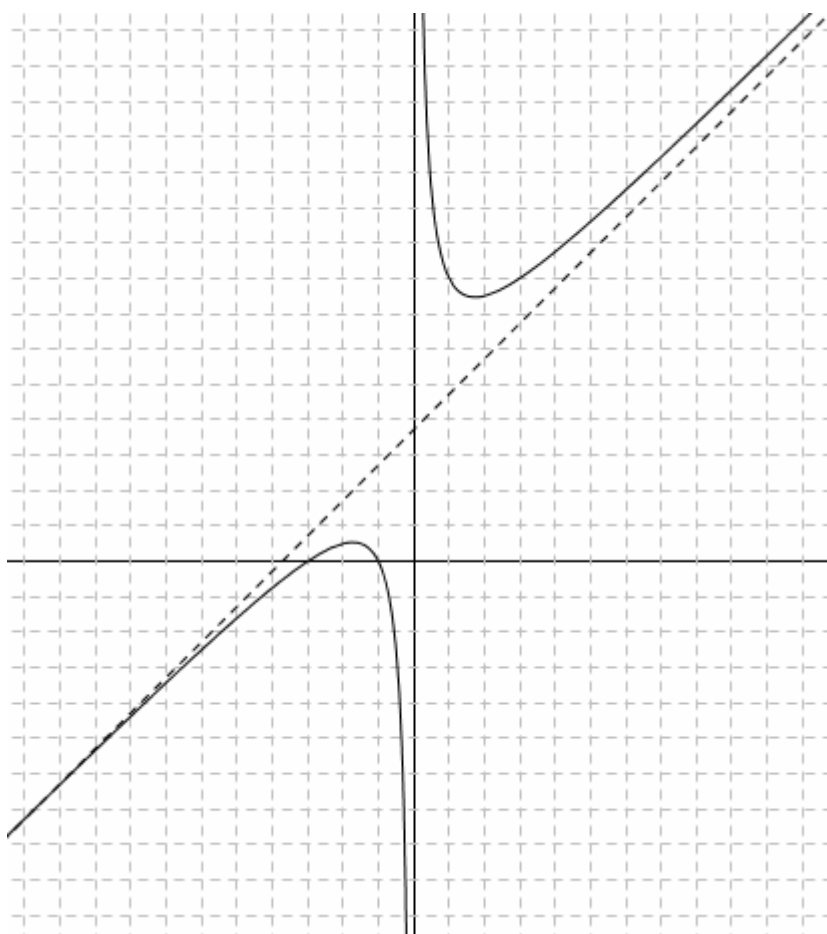
Osserviamo che la curva di equazione $y = \frac{(x+1)(x+3)}{x}$ è un'iperbole. Infatti

$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - xy + 4x + 3 = 0$$

... e quest'ultima equazione è della forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ quindi rappresenta una conica. Essendo poi $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = +1 > 0$, la conica è di tipo iperbolico.



$$y = \frac{x}{\underbrace{x^2 - 3x + 2}_{(x-1)(x-2)}} = f(x)$$

- **Domínio:** $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ $(x-1)(x-2) \neq 0$ $x \neq 1 \wedge x \neq 2$
 $D = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

- **La funzione non è né pari, né dispari**

- **Intersezioni con l'asse y** $x = 0 \rightarrow y = 0$

Intersezioni con l'asse x $y = 0$ con $x = 0$

Perciò, in definitiva, l'unica intersezione con gli assi è l'origine.

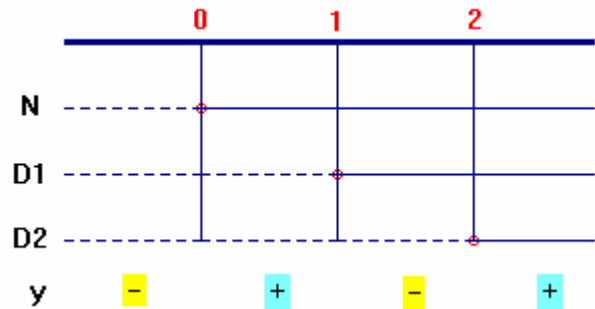
- **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{\overset{N}{x}}{\underbrace{(x-1)(x-2)}_{\substack{D1 \quad D2}}} > 0$$

$N > 0$ con $x > 0$

$D_1 > 0$ con $x > 1$

$D_2 > 0$ con $x > 2$



- **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \mp\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \pm\infty$$

- **Derivata prima**

$$y' = \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1 \cdot (x^2 - 3x + 2) - x \cdot (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$y' = \frac{2 - x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad y' = 0 \quad \text{con} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2 - 3\sqrt{2} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 6}{16 - 18} = -(2\sqrt{2} + 3) \approx -5,83$$

$$x = -\sqrt{2} \rightarrow y = \dots = 2\sqrt{2} - 3 \approx -0,17$$

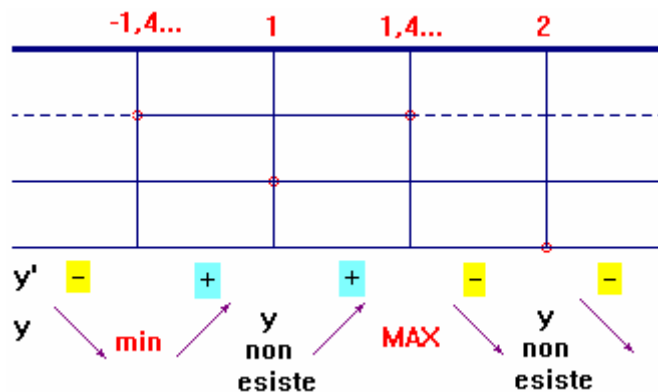
$$y' > 0$$

$$\frac{\overset{N}{2 - x^2}}{\underbrace{(x-1)^2(x-2)^2}_{\substack{D1 \quad D2}}} > 0$$

$N > 0$ con $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$D_1 > 0$ con $x \neq 1$

$D_2 > 0$ con $x \neq 2$



$$\min \left(-\sqrt{2}, \underbrace{2\sqrt{2} - 3}_{-0,17} \right) \quad \text{MAX} \left(\sqrt{2}, \underbrace{-(2\sqrt{2} + 3)}_{-5,83} \right)$$

Derivata seconda

$$y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \quad y' = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x \cdot (x^2 - 3x + 2)^2 - (-x^2 + 2) \cdot 2(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 3x + 2) \left[-2x(x^2 - 3x + 2) - 2(2 - x^2)(2x - 3) \right]}{(x^2 - 3x + 2)^4} =$$

$$= \frac{-2x^3 + 6x^2 - 4x - 8x + 12 + 4x^3 - 6x^2}{(x^2 - 3x + 2)^3} = \frac{2x^3 - 12x + 12}{(x^2 - 3x + 2)^3} = \frac{2(x^3 - 6x + 6)}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

$$y'' = \frac{2(x^3 - 6x + 6)}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

Dunque $y'' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x + 6 = 0$.

L'equazione $x^3 - 6x + 6 = 0$ è un'equazione algebrica di terzo grado.

Ogni tentativo di risolverla per scomposizione in fattori col metodo di Ruffini fallisce in quanto, fra i divisori del termine noto +6, nessuno risulta essere uno zero del polinomio a primo membro.

Ciò significa che **l'equazione in questione non ha soluzioni razionali**;

potrebbe però averne di irrazionali (anzi, che ne abbia almeno una è certo,

perché **qualsiasi equazione algebrica di grado dispari a coefficienti reali ammette sempre almeno una soluzione reale**).

E' noto che **esistono formule risolutive per le equazioni algebriche fino al 4° grado** (invece, come dimostrò il norvegese Abel nel 1824, **per le equazioni algebriche di grado maggiore o uguale a 5 non può esistere alcuna formula risolutiva**).

Se, tuttavia, non abbiamo a disposizione la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado, o, comunque, se vogliamo farne a meno, potremo pur sempre approssimare le soluzioni dell'equazione considerata, utilizzando il **metodo grafico**.

A tale scopo, scriviamo

$$x^3 - 6x + 6 = 0$$

sotto la forma equivalente

$$x^3 = 6x - 6.$$

Tracciamo poi

su di uno stesso riferimento cartesiano

i grafici delle due funzioni

$$g_1(x) = x^3 \quad \text{e} \quad g_2(x) = 6x - 6,$$

con l'obiettivo di localizzare

le ascisse dei loro punti di intersezione.

Si ha senz'altro una intersezione nell'intervallo $(-3, -2)$.

Le due curve, però, appaiono molto vicine anche fra l'ascissa 1 e l'ascissa 2; si intersecheranno anche in quell'intervallo oppure no?



Ovviamente, utilizzando un computer, basterebbe fare uno “zoom” del grafico nella zona considerata. E se invece avessimo a disposizione solo carta e matita ...? ... In questo caso, potremmo procedere nel modo seguente.

Determiniamo l'equazione della retta t , che è tangente al grafico della curva

$$\lambda: y = x^3$$

in un punto di ascissa positiva, ed è parallela alla nostra retta $r: y = 6x - 6$.

L'equazione di t sarà della forma: $y = 6x + q$.

L'obiettivo sarà di stabilire come è disposta tale tangente t , rispetto alla r .

- Se t sta al di sopra di r ($q > -6$), allora non si ha nessuna intersezione di ascissa positiva fra r e la curva λ .
- Se t coincide con r ($q = -6$), allora r è tangente a λ : una, e una sola, intersezione di ascissa positiva.
- Se t sta al di sotto di r ($q < -6$), due intersezioni di ascissa positiva fra r e λ .

La derivata della funzione $y = x^3$ è $y' = 3x^2$.

Tale derivata vale 6 se e solo se $3x^2 = 6$ ossia con $x = \pm\sqrt{2}$.

Il punto di tangenza che ci interessa è $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

La retta tangente cercata è dunque

$$t: y - 2\sqrt{2} = 6(x - \sqrt{2}); \quad y = 6x - \underbrace{4\sqrt{2}}_q.$$

Essendo ora $q = -4\sqrt{2} = -5,656854... > -6$,

la tangente t sta al di sopra della retta r :

nessuna intersezione, dunque, fra r e λ .

Un altro modo di risolvere la questione se la curva $\lambda: y = x^3$

intersecasse o meno la retta $r: y = 6x - 6$ in un punto di ascissa $x > 0$ avrebbe potuto essere il seguente.

La figura che riporta i grafici approssimativi delle due funzioni

$g_1(x) = x^3$ e $g_2(x) = 6x - 6$, mostra che la funzione differenza

$g(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$ deve toccare un minimo relativo in un punto di ascissa positiva.

Bene:

- se tale minimo relativo è < 0 , allora vuol dire che i grafici di g_1 e g_2 si intersecano, con $x > 0$, in due punti;
- se invece il minimo relativo in questione è nullo, allora le due curve si toccano, con $x > 0$, in un punto solo;
- se, infine, tale minimo relativo è > 0 , allora le due curve non si intersecano affatto con $x > 0$.

Si tratta perciò di effettuare un brevissimo studio della funzione $g(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$,

per determinare il segno dell'ordinata del punto di ascissa positiva, in cui essa tocca un minimo relativo.

Ora, è:

$$g'(x) = 3x^2 - 6;$$

$$g'(x) = 0 \text{ con } x = \pm\sqrt{2};$$

$$g(+\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + 6 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 6 = 6 - 4\sqrt{2}.$$

Ma è $6 - 4\sqrt{2} \approx 6 - 5,656854... > 0$. Nessuna intersezione di ascissa positiva, dunque!

Ormai siamo certi che l'equazione $x^3 - 6x + 6 = 0$ ha una sola soluzione, compresa fra -3 e -2 .

Tale soluzione potrebbe essere approssimata con la precisione desiderata, utilizzando un "metodo numerico", ad esempio il metodo di bisezione.

Si troverebbe così, accontentandosi di 2 cifre decimali esatte, il valore approssimato $-2,84$.

Torniamo allo studio della nostra funzione. Ricapitoliamo i risultati acquisiti.

$$y = \frac{x}{(x-1)(x-2)} \quad y' = \frac{2-x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad y'' = \frac{2(x^3-6x+6)}{(x-1)^3(x-2)^3} \quad y'' = 0 \text{ con } x = \bar{x} \approx -2,84.$$

Gli elementi già a nostra conoscenza (segno, limiti, y')

sono ampiamente sufficienti per consentirci di dedurre che in $\bar{x} \approx -2,84$ si ha un **flesso ascendente**.

Tuttavia, solo ed esclusivamente per esercizio, andremo a studiare anche il segno della y'' .

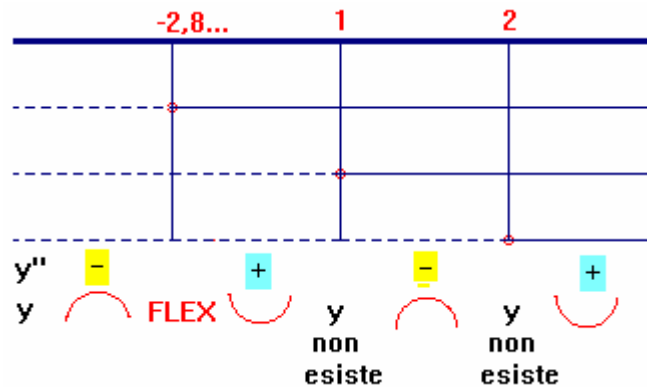
Tale studio comporta l'analisi del segno del polinomio di terzo grado $x^3 - 6x + 6$,

che può essere effettuata semplicemente osservando la figura nella quale sono state tracciate, in uno stesso riferimento cartesiano, le due funzioni $y = x^3$ e $y = 6x - 6$.

La prima funzione sta al di sopra della seconda a destra dell'ascissa $\bar{x} \approx -2,84$;

quindi la differenza $x^3 - 6x + 6$ è positiva con $x > \bar{x}$. Dunque avremo:

$$y'' = \frac{2(x^3 - 6x + 6)}{(x-1)^3(x-2)^3} > 0$$



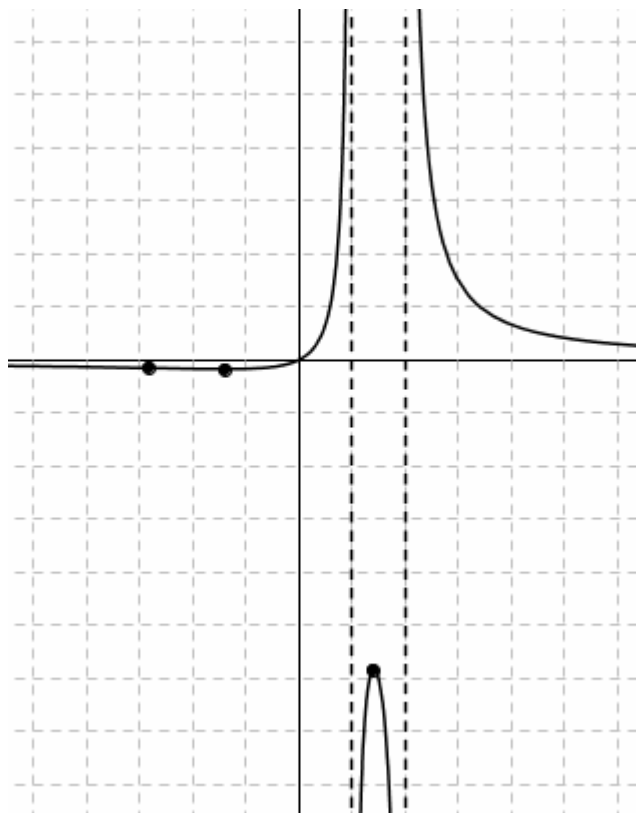
Ed ecco, finalmente, il grafico!!!

$$y = \frac{x}{\underbrace{x^2 - 3x + 2}_{(x-1)(x-2)}} = f(x)$$

$$\min \left(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}-3}{\approx -0,17} \right)$$

$$\text{MAX} \left(\sqrt{2}, \frac{-(2\sqrt{2}+3)}{\approx -5,83} \right)$$

$x_F \approx -2,84$



$$y = \frac{x}{x^3 - 1} = f(x)$$

- ❑ **Dominio:** $x^3 - 1 \neq 0$ $x^3 \neq 1$ $x \neq 1$
 $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

- ❑ **La funzione non è né pari, né dispari**

- ❑ **Intersezioni con l'asse y:** $x = 0 \rightarrow y = 0$

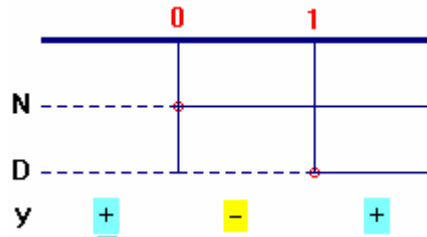
Intersezioni con l'asse x: $y = 0$ con $x = 0$

Perciò, in definitiva, l'unica intersezione con gli assi è l'origine.

- ❑ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{\overset{N}{x}}{\underbrace{x^3 - 1}_D} > 0$$

$N > 0$ con $x > 0$
 $D > 0$ con $x > 1$



- ❑ **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^3 - 1} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1 \pm} \frac{x}{x^3 - 1} = \pm\infty$$

- ❑ **Derivata prima**

$$y' = \frac{d}{dx} \frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1 \cdot (x^3 - 1) - x \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-2x^3 - 1}{(x^3 - 1)^2} = -\frac{2x^3 + 1}{(x^3 - 1)^2}$$

$$y' = -\frac{2x^3 + 1}{(x^3 - 1)^2} \quad y' = 0 \text{ con } x^3 = -\frac{1}{2}; \quad x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0,79$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \approx 0,53$$

$$y' > 0$$

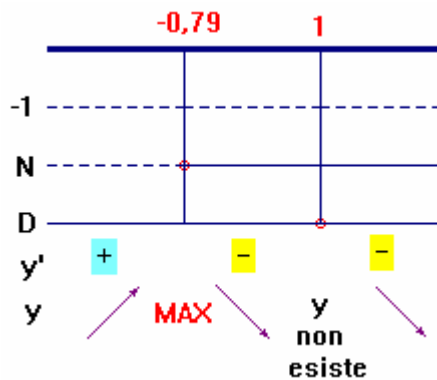
$$-\frac{2x^3 + 1}{(x^3 - 1)^2} > 0$$

Occorre tener conto del segno – che precede la frazione (equivalente ad un fattore -1).

Poi:

$$N > 0 \quad x^3 > -\frac{1}{2}; \quad x > -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$D > 0 \quad (x^3 - 1)^2 > 0; \quad x^3 - 1 \neq 0; \quad x \neq 1$$



$$\text{MAX}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\right)$$

□ **Derivata seconda**

$$y = \frac{x}{x^3 - 1}$$

$$y' = -\frac{2x^3 + 1}{(x^3 - 1)^2}$$

$$y'' = -\frac{6x^2(x^3 - 1)^2 - (2x^3 + 1) \cdot 2(x^3 - 1) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^4} = -\frac{6x^2(x^3 - 1)[x^3 - 1 - 2x^3 - 1]}{(x^3 - 1)^4}$$

$$= -\frac{6x^2(-x^3 - 2)}{(x^3 - 1)^3} = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}$$

$$y'' = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}$$

$$y'' = 0 \quad \text{con} \quad x = 0 \vee x = -\sqrt[3]{2} \approx -1,26$$

$$f(0) = 0; \quad f(-\sqrt[3]{2}) = \frac{-\sqrt[3]{2}}{-2-1} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \approx 0,42$$

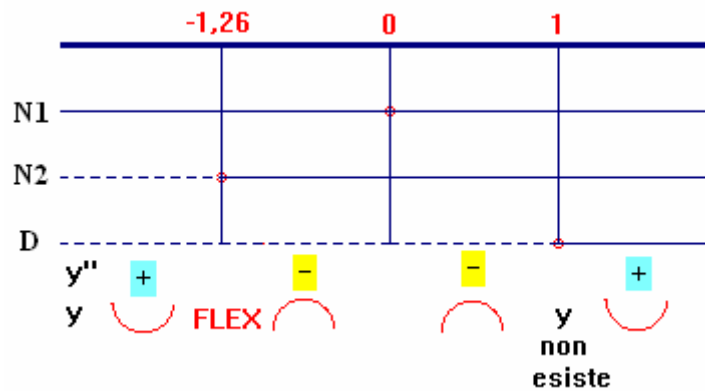
$$y'' > 0$$

$$\frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3} > 0$$

$$N1 > 0 \quad x \neq 0$$

$$N2 > 0 \quad x > -\sqrt[3]{2}$$

$$D > 0 \quad x > 1$$



Il punto $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1,26$ segna il passaggio dalla convessità alla concavità ed è perciò un flesso discendente.

Diciamo “discendente”, per il fatto che si passa dal di sopra al di sotto, rispetto alla retta tangente nel punto.

$$\text{Questa ha coefficiente angolare } m = y'(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2 \cdot (-2) + 1}{(-2 - 1)^2} = -\frac{-3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Diversa è la situazione nel punto $x = 0$.

In esso la derivata seconda si annulla; tuttavia, nell'attraversamento dell'ascissa $x = 0$

la y'' non cambia di segno, ma al contrario si mantiene negativa.

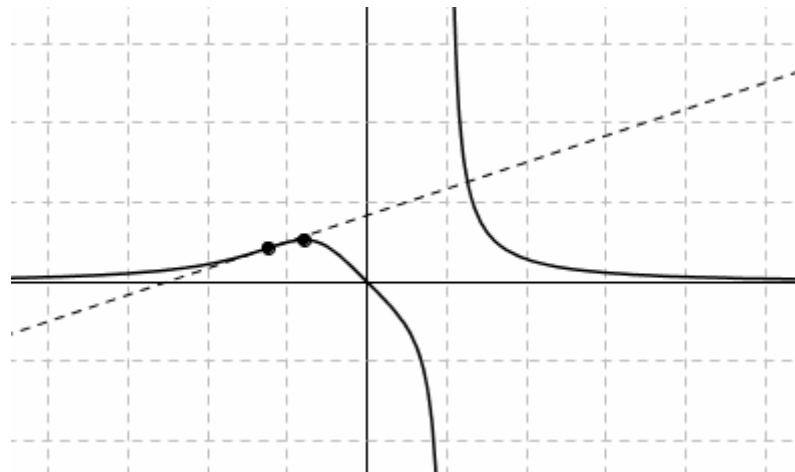
Pertanto il punto $x = 0$ non è un flesso, bensì un punto in cui la funzione è concava. Il coefficiente angolare della retta tangente, nel punto di ascissa 0, è $m = y'(0) = -1$

Ed ecco il grafico!!!

$$y = \frac{x}{x^3 - 1} = f(x)$$

$$\text{MAX} \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \right)$$

$$\text{F} \left(-\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \right)$$



$$y = \frac{\overbrace{x^2(x-2)}^{x^2(x-2)}}{x^2+x+1} = f(x)$$

❑ **Dominio:** $x^2 + x + 1 \neq 0$ condizione verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ (perché $\Delta < 0$). $D = (-\infty, +\infty)$

❑ **La funzione non è né pari, né dispari**

❑ **Intersezioni con l'asse y:** $x = 0 \rightarrow y = 0$

Intersezioni con l'asse x: $y = 0$ con $x = 0 \vee x = 2$

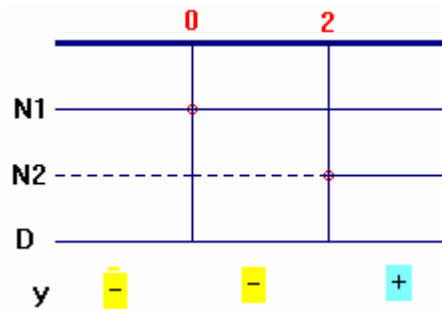
❑ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{\overbrace{x^2}^{N1} \overbrace{(x-2)}^{N2}}{\underbrace{x^2+x+1}_D} > 0$$

$$N1 > 0 \text{ con } x \neq 0$$

$$N2 > 0 \text{ con } x > 2$$

$$D > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



❑ **Limiti ai confini del dominio** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x + 1} = \pm\infty$

❑ **Eventuali asintoti obliqui**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 + x^2 + x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2 - x}{x^2 + x + 1} = -3 = q$$

La retta $y = x - 3$ è perciò **asintoto obliquo bilaterale**.

$$\text{Intersezioni con l'asintoto: } \begin{cases} y = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x + 1} \\ y = x - 3 \end{cases} \quad \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x + 1} = x - 3; \dots \quad x = -\frac{3}{2} \quad \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right)$$

❑ **Derivata prima**

$$y' = \frac{d}{dx} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{(3x^2 - 4x) \cdot (x^2 + x + 1) - (x^3 - 2x^2)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 2x^4 - x^3 + 4x^3 + 2x^2}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x(x^3 + 2x^2 + x - 4)}{(x^2 + x + 1)^2} \stackrel{\text{RUFFINI}}{=} \frac{x(x-1)(x^2 + 3x + 4)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$y' = 0 \text{ con } x = 0, x = 1 \quad f(0) = 0, f(1) = -1/3$$

$$y' > 0$$

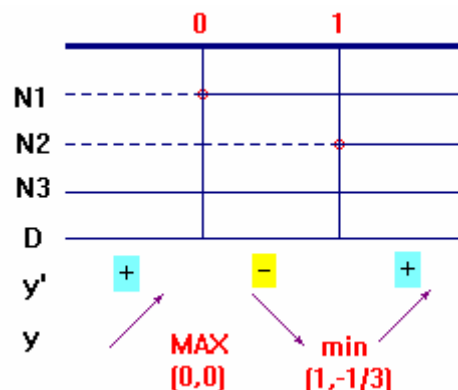
$$\frac{\overbrace{x}^{N1} \overbrace{(x-1)}^{N2} \overbrace{(x^2+3x+4)}^{N3}}{\underbrace{(x^2+x+1)^2}_D} > 0$$

$$N1 > 0 \quad x > 0$$

$$N2 > 0 \quad x > 1$$

I due trinomi N3, D

sono sempre strettamente positivi, $\forall x \in \mathbb{R}$, perché il loro discriminante (Δ) è negativo.



□ **Derivata seconda** $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x + 1}$ $y' = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x}{(x^2 + x + 1)^2}$

$$y'' = \frac{(4x^3 + 6x^2 + 2x - 4)(x^2 + x + 1)^2 - (x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x) \cdot 2(x^2 + x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2 + x + 1)[(2x^3 + 3x^2 + x - 2)(x^2 + x + 1) - (x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x)(2x + 1)]}{(x^2 + x + 1)^4} =$$

$$= \frac{2[2x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 2x^3 + 3x^2 + x - 2 - 2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x]}{(x^2 + x + 1)^3} =$$

$$= \frac{2(2x^3 + 9x^2 + 3x - 2)}{(x^2 + x + 1)^3}$$

y'' si annulla quando si annulla il quadrinomio di terzo grado $2x^3 + 9x^2 + 3x - 2$.

Non avendo questo quadrinomio zeri razionali,

non riusciamo a scomporlo col metodo di Ruffini;

approssimeremo allora le soluzioni dell'equazione $2x^3 + 9x^2 + 3x - 2 = 0$ col metodo grafico, dopo averla portata sotto la forma equivalente $2x^3 = -9x^2 - 3x + 2$; anzi, per evitare di dover operare con ordinate troppo grandi, divideremo ambo i membri per 18 ottenendo

$$\frac{x^3}{9} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} + \frac{1}{9}.$$

Dalla figura qui a fianco riportata si vede che l'equazione considerata ha 3 soluzioni,

$$-5 < \alpha < -4, \quad -1 < \beta < 0, \quad 0 < \gamma < 1$$

Il polinomio di terzo grado

$$2x^3 + 9x^2 + 3x - 2$$

ammette perciò α, β, γ come zeri e potrebbe quindi essere scomposto in

$$2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

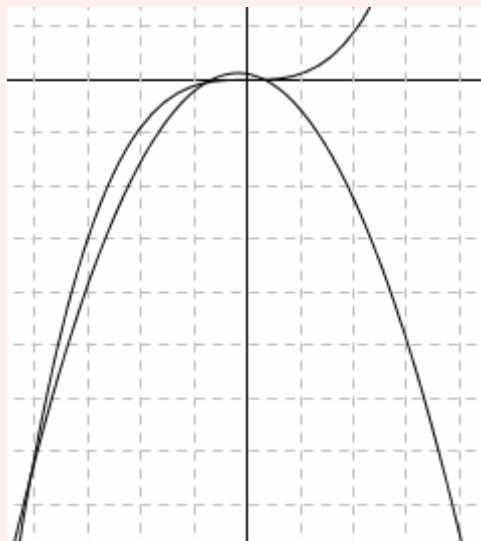
Il segno del polinomio determina il segno della derivata seconda, che pertanto si annulla

$$\text{con } x = \alpha, \quad x = \beta, \quad x = \gamma$$

e cambia di segno ogniqualvolta si attraversa una delle tre ascisse α, β, γ .

Tutto ciò ci garantisce che α, β, γ sono **ascisse di flesso per la funzione considerata**.

Rinunciamo al calcolo delle rispettive ordinate.



Ed ecco il grafico!!!

$$y = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x + 1} = f(x)$$

MAX(0,0)

min $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$

Tre flessi:

$$-5 < \alpha < -4$$

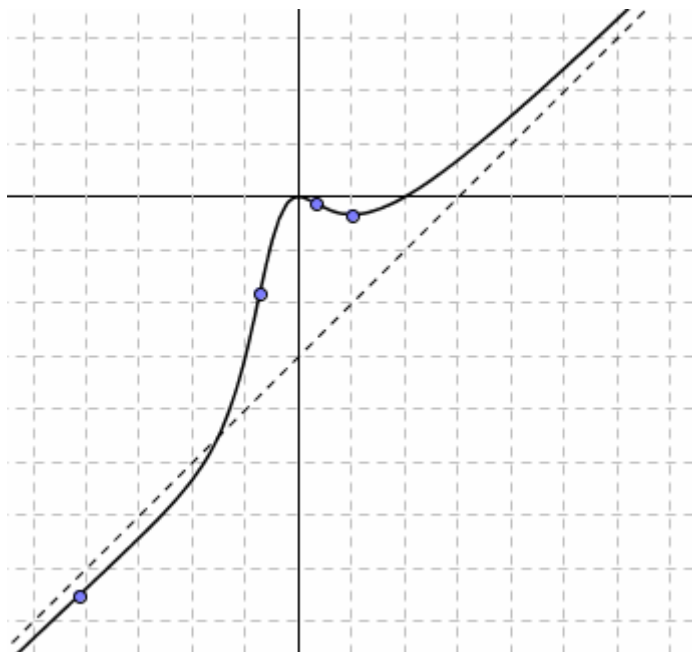
$$-1 < \beta < 0$$

$$0 < \gamma < 1$$

Asintoto

obliquo:

$$y = x - 3$$



$$y = \sqrt{x+5} - x - 3 = f(x)$$

- ❑ **Dominio** = $[-5, +\infty)$
- ❑ **Né pari né dispari**
- ❑ **Intersezioni con gli assi.**

Con l'asse y : $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{5} - 3 \approx 2,236 - 3 = -0,764$

Intersezioni con l'asse x

$$y = 0$$

$$\sqrt{x+5} - x - 3 = 0;$$

$$\sqrt{x+5} = x + 3;$$

$$\begin{cases} x+5 = (x+3)^2; \\ x \geq -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+5 = x^2 + 6x + 9; \\ x \geq -3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0; \\ x \geq -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -4 \vee x = -1 \\ \text{NON ACC.} \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$(-1, 0)$$

FINESTRA SULLA TEORIA

Un'equazione irrazionale della forma

$$\sqrt{A(x)} = B(x)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} A(x) = [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$

- ❑ **Segno della funzione**

$$y > 0$$

$$\sqrt{x+5} - x - 3 > 0;$$

$$\sqrt{x+5} > x + 3;$$

$$\begin{cases} x+3 < 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+5 > (x+3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x \geq -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 5x + 4 < 0; \end{cases} \quad -4 < x < -1$$

$$-5 \leq x < -3 \vee -3 \leq x < -1$$

$$\text{ossia: } -5 \leq x < -1$$

FINESTRA SULLA TEORIA

Una disequazione irrazionale della forma

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

I due sistemi sono legati da un **VEL**
(\vee)

logico:

perciò, trovati gli insiemi delle soluzioni di ciascuno, occorrerà farne l'unione insiemistica (\cup)

Ricapitolando: $y > 0$ con $-5 \leq x < -1$
e la situazione del segno della funzione è quella illustrata nello **schema** seguente.

Importante osservare che **le categorie sono 4**:

1. positività
2. negatività
3. annullamento
4. NON ESISTENZA



Simbologia in uno schema di analisi del segno:

Linea continua ————— indica **POSITIVITA'** per l'espressione considerata

Linea tratteggiata - - - - - indica **NEGATIVITA'** per l'espressione considerata

Pallino vuoto ○ indica **ANNULLAMENTO** per l'espressione considerata

□ **Limiti ai confini del dominio:**

Hai per caso scritto $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = 5 - 3 = 2$? Sìiii?

Beh, non hai sbagliato, ma, più semplicemente, avresti potuto scrivere $f(-5) = 2$ in quanto, per $x = -5$, la funzione ESISTE! (ed è CONTINUA VERSO DESTRA, quindi il valore del limite coincide sicuramente col valore della funzione).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\sqrt{x+5}}{x} - 1 - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \cdot \left(\underbrace{\frac{\sqrt{x+5}}{x^2}}_{\downarrow 0} - 1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\downarrow 0} \right) = -\infty$$

Osserviamo che troppo spesso, di fronte a Forme di Indecisione che coinvolgono radicali, si è portati “per istinto” a razionalizzare: spesso, invece, non è assolutamente necessario, come mostra, appunto, il limite precedente.

□ **Eventuale asintoto obliquo destro:**

Ricerca di m $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5} - x - 3}{x}$.

Per risolvere questo limite non è necessario razionalizzare il numeratore.

Basta invece spezzare la frazione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5} - x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+5}}{x} - 1 - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{\sqrt{x+5}}{x^2}}_{\downarrow 0} - 1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\downarrow 0} \right) = -1 = m$$

Ricerca di q $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x+5} - x - 3 + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x+5} - 3] = +\infty$

Quindi, per $x \rightarrow +\infty$, **non si ha un asintoto ma solo la “direzione asintotica” $m = -1$.**

$$\square \text{ Derivata prima } y = \sqrt{x+5} - x - 3 \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5}}$$

$$1 - 2\sqrt{x+5} = 0;$$

$$y' = 0 \quad 2\sqrt{x+5} = 1;$$

$$4x + 20 = 1 \quad (\text{qui il secondo membro è positivo indipendentemente da } x)$$

$$x = -19/4$$

$$x = -19/4 \rightarrow y = \sqrt{-\frac{19}{4} + 5} + \frac{19}{4} - 3 = \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{7}{4} = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4} \quad \left(-\frac{19}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

Il dominio D' della $f'(x)$ è più ristretto del dominio D della $f(x)$:

poiché, con la derivazione, l'espressione $\sqrt{x+5}$ è passata a denominatore,

per $x = -5$ la funzione esiste, ma non è derivabile: $D' = (-5, +\infty) \subset D = [-5, +\infty)$

$$\text{Calcoliamo allora il } \lim_{x \rightarrow -5^+} y' = \lim_{x \rightarrow -5^+} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}} - 1 \right) = +\infty.$$

Ma allora (vedi anche il paragrafo sul "Criterio di Derivabilità"),

la funzione "parte dal punto di ascissa -5 verticalmente, con salita infinita".

$$y' > 0$$

$$\frac{1 - 2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5}} > 0$$

$$N > 0 \quad 1 - 2\sqrt{x+5} > 0;$$

$$2\sqrt{x+5} < 1$$

$$\begin{cases} 4x + 20 < 1 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -19/4 \\ x \geq -5 \end{cases}$$

$$-5 \leq x < -19/4$$

$$D > 0 \quad 2\sqrt{x+5} > 0 \quad x > -5$$

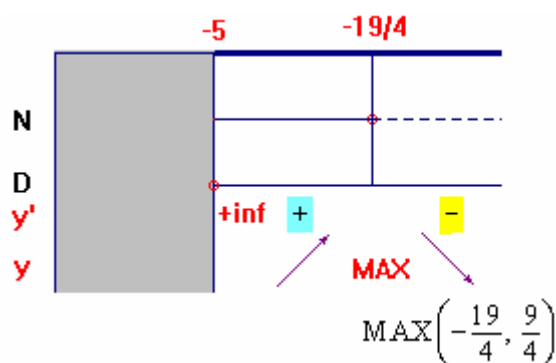
FINESTRA SULLA TEORIA

Una disequazione irrazionale della forma

$$\sqrt{A(x)} < B(x)$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$



□ **Derivata seconda**

$$y = \sqrt{x+5} - x - 3 \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5}}$$

$$y'' = D\left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}} - 1\right) \stackrel{\text{NOTA}}{=} \\ = -\frac{D(2\sqrt{x+5})}{(2\sqrt{x+5})^2} = -\frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+5}}}{4(x+5)} = -\frac{1}{4(x+5)\sqrt{x+5}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4(x+5)\sqrt{x+5}}$$

NOTA

Applichiamo qui la formula per la derivazione del reciproco di una funzione:

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{Df(x)}{[f(x)]^2}$$

o, se si preferisce, $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

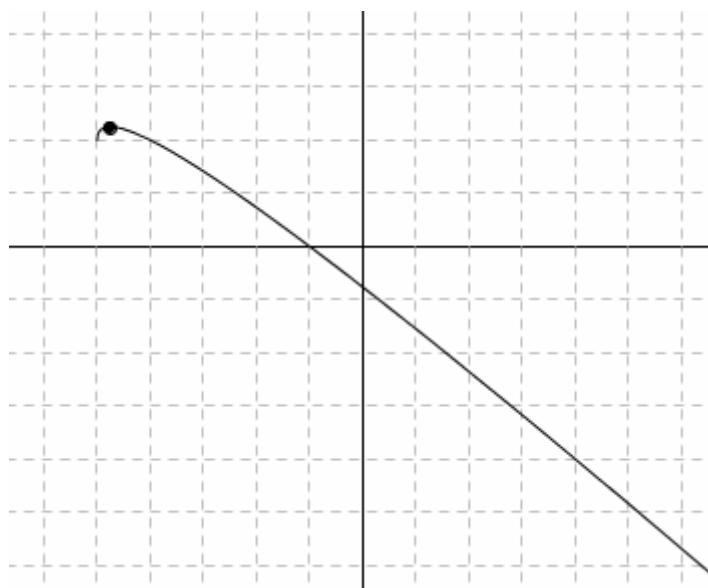
Dunque la derivata seconda non può mai annullarsi, e anzi, laddove esiste ($x > -5$) è sempre strettamente negativa. Pertanto **la funzione è concava su tutto il suo dominio.**

Ed ecco
il grafico!!!

$$y = \sqrt{x+5} - x - 3$$

$$\text{MAX}\left(-\frac{19}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

“Direzione asintotica” $m = -1$.



$$y = 2x - \sqrt{x^2 + x}$$

❑ **Dominio:** $x^2 + x \geq 0$; $x(x+1) \geq 0$; $x \leq -1 \vee x \geq 0$ $D = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

❑ **Né pari né dispari**

❑ **Intersezioni con gli assi**

Con l'asse y: $x = 0 \rightarrow y = 0$

Intersezioni con l'asse x

$$y = 0$$

$$2x - \sqrt{x^2 + x} = 0;$$

$$\sqrt{x^2 + x} = 2x;$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 4x^2 \\ 2x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x^2 - x = 0 \\ x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee x = 1/3 \text{ entrambe accettabili} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

❑ **Segno della funzione**

$$y > 0$$

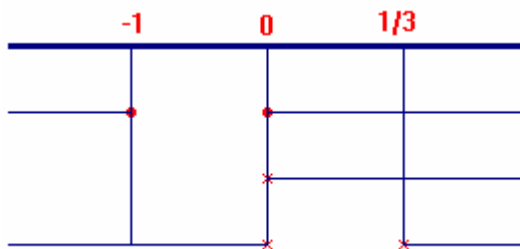
$$2x - \sqrt{x^2 + x} > 0$$

$$\sqrt{x^2 + x} < 2x$$

$$\begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ 2x > 0 \\ x^2 + x < 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x^2 - x}{x(3x-1)} > 0; & x < 0 \vee x > 1/3 \end{cases}$$



Simbologia in uno schema di sistema:

Condizione verificata

Linea continua

oppure pallino pieno •

Condizione NON verificata

Nessuna linea

oppure crocetta di esclusione ×

FINESTRA SULLA TEORIA

Un'equazione irrazionale della forma

$$\sqrt{A(x)} = B(x)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} A(x) = [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$(0; 0) \quad (1/3; 0)$$

FINESTRA SULLA TEORIA

Una disequazione irrazionale della forma

$$\sqrt{A(x)} < B(x)$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

Invece una disequazione irrazionale della forma

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

I due sistemi sono legati da un VEL

(\vee)

logico:

perciò, trovati gli insiemi delle soluzioni di ciascuno, occorrerà farne l'unione insiemistica

(\cup)

Ricapitolando: $y > 0$ con $x > 1/3$

e la situazione del segno della funzione è quella illustrata nello **schema** seguente.

Importante osservare che **le categorie sono 4:**

1. positività 2. negatività 3. annullamento 4. NON ESISTENZA



Simbologia in uno schema di analisi del segno:

Linea continua ————— indica **POSITIVITA'** per l'espressione considerata

Linea tratteggiata - - - - - indica **NEGATIVITA'** per l'espressione considerata

Pallino vuoto ○ indica **ANNULLAMENTO** per l'espressione considerata

□ Limiti ai confini del dominio:

Hai per caso scritto $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2$?

Sìiii?

Beh, non hai sbagliato, ma, più semplicemente, avresti potuto scrivere

$$f(-1) = -2$$

in quanto, per $x = -1$, la funzione **ESISTE!** (ed è **CONTINUA VERSO SINISTRA**, quindi il valore del limite coincide sicuramente col valore della funzione)

Analogamente si ha $f(0) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2 + x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{x}_{+\infty} \left(2 - \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}_{\downarrow 1} \right) \right) = +\infty \end{aligned}$$

Osserviamo che troppo spesso, di fronte a Forme di Indecisione che coinvolgono radicali, si è portati “per istinto” a razionalizzare: spesso, invece, non è assolutamente necessario, come mostra, appunto, il limite precedente.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{2x}_{-\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2 + x}}_{-\infty} \right) = -\infty$$

Il limite appena calcolato era di risoluzione **IMMEDIATA**: non si trattava, infatti, di una Forma di Indecisione.

□ **Eventuali asintoti obliqui**

VERSO DESTRA

Ricerca di m

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x}}{x}$$

Per risolvere questo limite non è necessario razionalizzare il numeratore. E' sufficiente spezzare la frazione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \underbrace{\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}}}_{1} \right) = 1 = m.$$

Ricerca di q

Ora andiamo a calcolare il

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - \sqrt{x^2 + x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \sqrt{x^2 + x}] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \cdot \underbrace{\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}_0 = [\infty \cdot 0] \quad \text{PURTROPPO!} \end{aligned}$$



Questa volta il raccoglimento non ha consentito di sciogliere l'indecisione. Procediamo dunque per razionalizzazione del numeratore.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \sqrt{x^2 + x}] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\underbrace{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}_2} = -\frac{1}{2} = q \end{aligned}$$

Abbiamo così stabilito che

la retta $y = x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo destro per la nostra funzione.

Eventuale asintoto obliquo VERSO SINISTRA.**Ricerca di m**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x}}{x}$$

Per risolvere questo limite non è necessario razionalizzare il numeratore: basterà spezzare la frazione.

Ci sarà però, nei passaggi, una difficoltà, dovuta alla negatività di x .

Teniamo presente che

un fattore esterno si può portare sotto il segno di radice quadrata (elevandolo, ovviamente, al quadrato)

soltanto se è positivo!

Vediamo allora come procedere:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-|x|} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{\sqrt{x^2 + x}}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \sqrt{\frac{x^2 + x}{|x|^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} \right) = 3 = m \end{aligned}$$

Ricerca di q

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x - \sqrt{x^2 + x} - 3x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x - \sqrt{x^2 + x}] = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + x \right] \stackrel{\text{NOTA 1}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x \right] = \\ &\stackrel{\text{NOTA 2}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x}_{-\infty} \cdot \left(\underbrace{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}_0 \right) = [\infty \cdot 0] \quad \text{SIGH!!!} \end{aligned}$$

NOTA 1 Importantissimo tenere presente che identità come

$$\sqrt{x^2} = x, \quad \sqrt{x^2 y} = x \sqrt{y}$$

valgono **SOLTANTO A CONDIZIONE CHE x SIA POSITIVO!!!**

Se x è negativo, oppure se il segno di x non è noto o è variabile, bisognerà invece far comparire un valore assoluto, scrivendo

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{x^2 y} = |x| \sqrt{y}$$

NOTA 2 Poiché nel nostro caso x tende a $-\infty$, quindi è negativo, avremo $|x| = -x$.

$$\text{Infatti } |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Comunque, anche in questo caso il procedere per raccoglimenti non ci ha permesso di sciogliere l'indecisione. Razionalizziamo, dunque, ottenendo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} - x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}_2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Resta stabilito che **la retta $y = 3x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo sinistro per la nostra funzione.**

□ **Derivata prima**

$$y = 2x - \sqrt{x^2 + x} \rightarrow y' = 2 - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

Il dominio D' della $f'(x)$ è più ristretto del dominio D della $f(x)$:

la derivazione ha fatto passare a denominatore l'espressione $\sqrt{x^2+x}$,
cosicché nei punti in cui tale espressione si annulla ($x = -1, x = 0$),
la funzione esiste, ma non è derivabile.

$$\text{Calcoliamo allora il } \lim_{x \rightarrow -1^-} y' = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(2 - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \right) = +\infty$$

Perciò **la funzione “arriva al punto di ascissa -1 verticalmente, con salita infinita”.**

$$\text{Si ha poi: } \lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \right) = -\infty$$

e ciò significa che **la funzione “parte dal punto di ascissa 0 con discesa infinita”.**

$$y' = 0 \quad \frac{4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$4\sqrt{x^2+x} = 2x+1 \quad (x \neq 0, x \neq -1)$$

$$\begin{cases} 16x^2 + 16x = 4x^2 + 4x + 1 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x^2 + 12x - 1 = 0 \\ x \geq -1/2 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \frac{-6+4\sqrt{3}}{12} \approx 0,077 \\ \frac{-6-4\sqrt{3}}{12} \approx -1,077 \text{ NON ACC.} \end{cases}$$

$$x = \frac{-6+4\sqrt{3}}{12} \approx 0,077 \rightarrow y = \dots \approx -0,134$$

$$y' > 0 \quad \frac{4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}} > 0$$

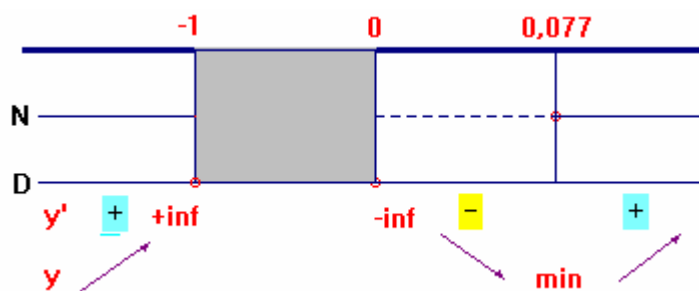
Essendo il denominatore positivo
su tutto il dominio $D' = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ della derivata prima,
basterà chiedersi quali sono i valori di x che rendono positivo il numeratore.
Dunque:

$$4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1 > 0; \quad 4\sqrt{x^2+x} > 2x+1$$

$$\begin{cases} 2x+1 < 0 \\ x^2+x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 16x^2+16x > 4x^2+4x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1/2 \\ x \leq -1 \vee x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1/2 \\ x < \frac{-6-4\sqrt{3}}{12} \vee x > \frac{-6+4\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

$$x \leq -1 \quad \vee \quad x > \frac{-6+4\sqrt{3}}{12} \approx 0,077$$



□ Derivata seconda

$$y = 2x - \sqrt{x^2 + x}; \quad y' = 2 - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

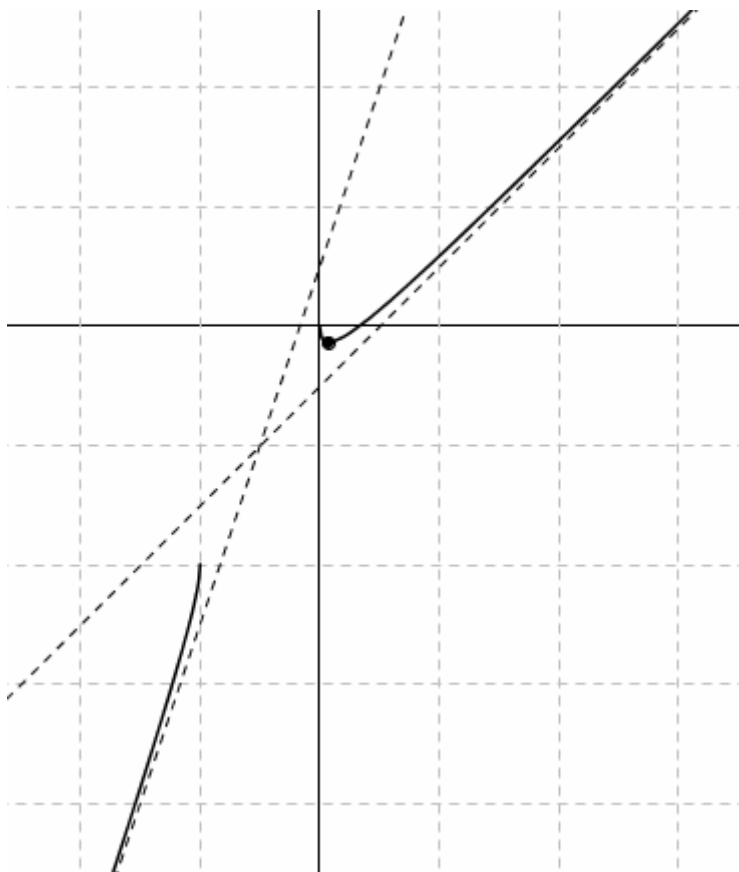
$$y'' = D\left(2 - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\right) = -\frac{2 \cdot 2\sqrt{x^2+x} - (2x+1) \cdot 2 \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{4(x^2+x)} =$$

$$= -\frac{4(x^2+x) - (2x+1)^2}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} = \dots = \frac{1}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}$$

Dunque la derivata seconda non può mai annullarsi;
essa, laddove esiste ($x < -1 \vee x > 0$) è sempre > 0 .
Pertanto la funzione è convessa su tutto il suo dominio.

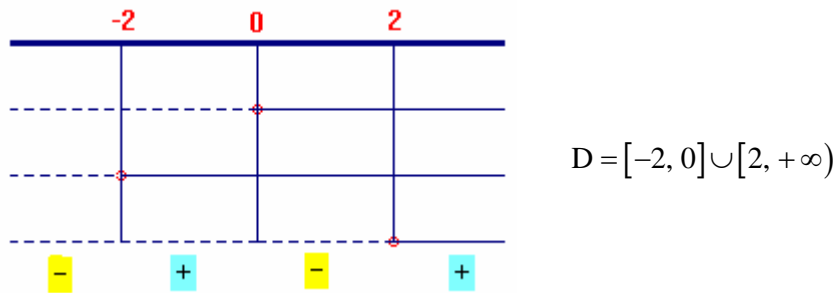
Ed ecco il grafico !!! $y = 2x - \sqrt{x^2 + x}$

Asintoto obl. destro: $y = x - \frac{1}{2}$. Asintoto obl. sinistro: $y = 3x + \frac{1}{2}$. $\min\left(\frac{-6+4\sqrt{3}}{12}; \approx -0,134\right)$



$$y = \sqrt{x^3 - 4x} = f(x)$$

- **Domínio:** $x^3 - 4x \geq 0$; $x(x+2)(x-2) \geq 0$;



- $f(x)$ non è né pari, né dispari

- **Intersezioni con gli assi**

Con l'asse y: $x = 0 \rightarrow y = 0$ Con l'asse x: $y = 0 \leftrightarrow x = 0, x = \pm 2$

- **Segno della funzione**

La y è espressa da una radice quadrata;

e **il risultato di un'estrazione di radice quadrata, quando esiste, è sempre ≥ 0 .**

Ricordiamo che, **ad esempio, il simbolo $\sqrt{9}$**

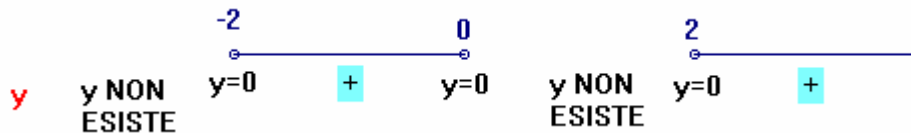
NON sta ad indicare

“uno qualsiasi fra i numeri che elevati al quadrato danno 9” (-3 e $+3$),

bensì indica quel numero NON NEGATIVO il cui quadrato DA' 9

(ossia, il $+3$)

Perciò la nostra funzione, laddove esiste, è sempre positiva (o nulla), e avremo:



- **Limiti e valori ai confini del dominio:**

$$f(-2) = 0 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - 4x} = +\infty$$

Tu avevi per caso scritto $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$?

Beh, questo non è affatto sbagliato,

ma è molto più “logico” scrivere semplicemente $f(-2) = 0$

in quanto, per $x = -2$, la funzione ESISTE, ed è CONTINUA VERSO DESTRA, quindi il valore del limite coincide sicuramente col valore della funzione.

E' quindi preferibile pensare ad un VALORE, piuttosto che ad un LIMITE (il limite, qualora venisse calcolato, coinciderebbe col valore).

Il discorso è analogo, evidentemente, per gli altri confini finiti del dominio.

- **Non si hanno asintoti obliqui, perché**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x^2}} = +\infty$$

- **Derivata prima** $y = \sqrt{x^3 - 4x} \rightarrow y' = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}}$

Il dominio D' della $f'(x)$ è più ristretto del dominio D della $f(x)$:

la derivazione ha fatto passare A DENOMINATORE l'espressione $\sqrt{x^3 - 4x}$,
cosicché nei punti in cui tale espressione si annulla ($x = 0, x = \pm 2$)

la funzione ESISTE, MA NON È DERIVABILE.

$D' = D - \{-2, 0, 2\}$ essendo $D = \text{dominio di } f$; $D' = \text{dominio di } f'$

Sarà allora opportuno andare a vedere qual è il comportamento della y' ,
quando x si avvicina a queste particolari ascisse $x = -2, x = 0, x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} y' = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\overbrace{3x^2 - 4}^8}{\underbrace{2\sqrt{x^3 - 4x}}_{0+}} = +\infty$$

... quindi la curva grafico della funzione
"parte dal punto di ascissa -2
con salita infinita"



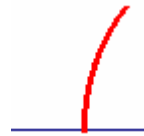
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{3x^2 - 4}^{-4}}{\underbrace{2\sqrt{x^3 - 4x}}_{0+}} = -\infty$$

... quindi la curva grafico della funzione
"arriva al punto di ascissa 0
in discesa infinita"



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y' = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overbrace{3x^2 - 4}^8}{\underbrace{2\sqrt{x^3 - 4x}}_{0+}} = +\infty$$

... quindi la curva grafico della funzione
"parte dal punto di ascissa 2
con salita infinita"

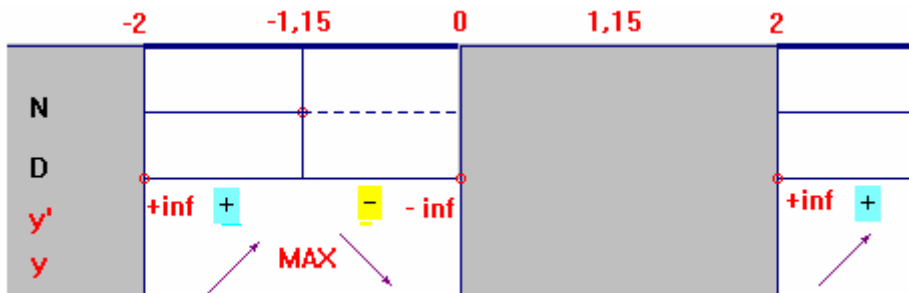


$$y' = 0 \quad \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}} = 0 \quad 3x^2 - 4 = 0 \quad (\text{sempre con } -2 < x < 0 \vee x > 2)$$

$$x^2 = \frac{4}{3} \quad x = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{3}} & \text{non accettabile} \\ -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx -1,15 \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left[\sqrt{x^3 - 4x}\right]_{x = -2\sqrt{3}/3} = \sqrt{-\frac{8 \cdot 3\sqrt{3}}{27} + 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{-\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{16\sqrt{3}}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 1,75$$

$$y' > 0 \quad \frac{\overbrace{3x^2 - 4}^N}{\underbrace{2\sqrt{x^3 - 4x}}_D} > 0 \quad \begin{matrix} N > 0 & x < -2/\sqrt{3} \vee x > 2/\sqrt{3} \\ D > 0 & x^3 - 4x > 0 \text{ quindi } -2 < x < 0 \vee x > 2 \end{matrix}$$



$$\text{MAX} \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3} \right)$$

□ **Derivata seconda**

$$y = \sqrt{x^3 - 4x};$$

$$y' = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}}$$

$$\begin{aligned} y'' &= D\left(\frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}}\right) = \frac{6x \cdot 2\sqrt{x^3 - 4x} - (3x^2 - 4) \cdot 2 \cdot \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}}}{4(x^3 - 4x)} = \\ &= \frac{12x\sqrt{x^3 - 4x} - (3x^2 - 4)^2}{4(x^3 - 4x)} = \frac{12x(x^3 - 4x) - (3x^2 - 4)^2}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}} = \\ &= \frac{12x^4 - 48x^2 - 9x^4 + 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}} = \frac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}} \end{aligned}$$

Dunque è $y'' = \frac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}}$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 24x^2 - 16 = 0 \\ x^3 - 4x > 0 \quad (-2 < x < 0 \vee x > 2) \end{cases}$$

Risolvendo la biquadratica $3x^4 - 24x^2 - 16 = 0$ si trova:

$$(x^2)_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 48}}{3} = \frac{12 \pm \sqrt{192}}{3} = \frac{12 \pm 8\sqrt{3}}{3} = \frac{4(3 \pm 2\sqrt{3})}{3} \approx \begin{cases} -0,618 < 0, & \text{non acc.} \\ 8,6188 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{4(3 + 2\sqrt{3})}{3} \approx 8,6188 \rightarrow x \approx \pm\sqrt{8,6188} \approx \pm 2,936 \begin{cases} -2,936 & \text{non accettabile} \\ 2,936 \end{cases}$$

In definitiva, l'unico valore per cui si annulla y'' è $x = +\sqrt{\frac{4(3 + 2\sqrt{3})}{3}} \approx 2,936$.

Questa ascissa $x = \sqrt{\frac{4(3 + 2\sqrt{3})}{3}} \approx 2,936$ non si può classificare "tout-court" come un flesso;

per trarre, eventualmente, questa conclusione, occorrerà accertarsi che nell'attraversamento dell'ascissa in esame, la y'' cambi di segno.

In effetti così accade, perché il trinomio biquadratico $3x^4 - 24x^2 - 16$ può scomporsi in

$$3 \left[x^2 - \underbrace{\frac{4(3 - 2\sqrt{3})}{3}}_{<0} \right] \left[x^2 - \frac{4(3 + 2\sqrt{3})}{3} \right]$$

Il primo fattore è sempre positivo;

il fattore $\left[x^2 - \frac{4(3 + 2\sqrt{3})}{3} \right]$ è invece scomponibile nel prodotto

$$\left(x + \sqrt{\frac{4(3 + 2\sqrt{3})}{3}} \right) \left(x - \sqrt{\frac{4(3 + 2\sqrt{3})}{3}} \right).$$

Pertanto, se andiamo a porre l'espressione analitica della y'' sotto una forma che presenti esclusivamente fattori di 1° grado, uno e un solo di questi fattori risulterà cambiare di segno

nell'attraversamento dell'ascissa $x = \sqrt{\frac{4(3 + 2\sqrt{3})}{3}} \approx 2,936$

e ciò comporta che la y'' cambi di segno nel passaggio dalla sinistra alla destra di tale ascissa.

Questa, dunque, è effettivamente di flesso per la $f(x)$.

$$F(\approx 2,936; \approx 3,683), m_F \approx 2,968$$

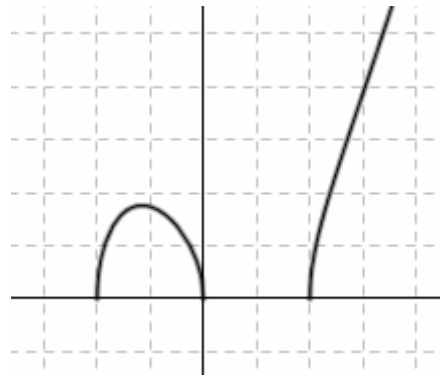
Ed ecco il grafico della funzione!!!

$$y = \sqrt{x^3 - 4x} = f(x)$$

$$\text{MAX} \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3} \right)$$

$$F(\approx 2,936; \approx 3,683)$$

$$m_F \approx 2,968$$



Nell'affrontare lo studio di questa funzione

$$y = \sqrt{x^3 - 4x} = f(x)$$

avremmo anche potuto procedere tracciando prima il grafico di $y = g(x) = x^3 - 4x$ e poi “manipolandolo” in modo da ottenere un abbozzo della curva $y = f(x)$.

In questo modo, avremmo già potuto ottenere un grafico “provvisorio” della f , abbastanza soddisfacente.

Dopodiché, il calcolo di $f'(x)$ e $f''(x)$ ci avrebbe consentito di determinare con precisione il massimo relativo e il “probabile” flesso, di cui il grafico “provvisorio” rivela (nel caso del massimo) o suggerisce (nel caso del flesso), la presenza.

Osserviamo che nel passaggio dalla funzione “madre” $g(x)$ alla “figlia” $f(x) = \sqrt{g(x)}$,

- i punti con $y = 1$ e con $y = 0$ vengono “riconfermati”;
- ogni punto con $y > 1$ “genera” un punto “figlio”, avente la stessa ascissa ma ordinata inferiore;
- ogni punto con $0 < y < 1$ “genera” un punto “figlio”, avente la stessa ascissa ma ordinata leggermente superiore (ancora compresa, però, fra 0 e 1);
- ogni punto (x, y) con $y < 0$ rimane “sterile”, nel senso che la curva “figlia” non avrà nessun punto con QUELL'ascissa x .

La figura qui a fianco rappresenta la curva di equazione $y = g(x) = x^3 - 4x$.

Per esercizio, puoi ricavare da questa un grafico approssimativo della

$$y = \sqrt{x^3 - 4x} = f(x),$$

constatandone la buona aderenza al grafico preciso, riportato sopra.



$$y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x}$$

Osserviamo subito che l'espressione analitica della $f(x)$ si può portare sotto diverse forme alternative:

$$y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x} = x \cdot \sqrt[3]{x(x+1)} = \sqrt[3]{x^4(x+1)} = \sqrt[3]{x^5 + x^4} = (x^5 + x^4)^{1/3}$$

Di volta in volta ci serviremo, a seconda dell'opportunità, dell'una o dell'altra fra queste espressioni equivalenti.

❑ **Dominio** = $(-\infty, +\infty)$ (un radicale con indice DISPARI esiste qualunque sia il segno del radicando)

❑ $f(-x) = -x \cdot \sqrt[3]{x^2 - x} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$ per cui f non è **né pari, né dispari**

❑ **Intersezioni con l'asse y** : $x = 0 \rightarrow y = 0$ quindi $O(0,0)$

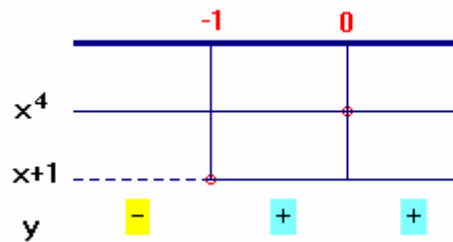
Intersezioni con l'asse x : $y = 0 \leftrightarrow x \cdot \sqrt[3]{x(x+1)} = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$ $O(0,0)$; $A(-1,0)$

❑ **Segno della funzione:**

$$y > 0 \leftrightarrow \sqrt[3]{x^4(x+1)} > 0 \leftrightarrow x^4(x+1) > 0$$

$$x^4 > 0 \quad \text{con} \quad x \neq 0$$

$$x+1 > 0 \quad \text{con} \quad x > -1$$



❑ **Limiti ai confini del dominio:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^5 + x^4} = \pm\infty$

❑ **La funzione non possiede asintoti obliqui:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

❑ **Derivata prima:**

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx} (x^5 + x^4)^{1/3} = \frac{1}{3} (x^5 + x^4)^{-2/3} (5x^4 + 4x^3) = \\ &= \frac{5x^4 + 4x^3}{3\sqrt[3]{(x^5 + x^4)^2}} = \frac{x^3(5x+4)}{3\sqrt[3]{x^8(x+1)^2}} = \frac{x^3(5x+4)}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \frac{x(5x+4)}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

La condizione $x \neq 0$ posta all'atto di semplificare per x^2 ci potrebbe indurre a ritenere che la derivata prima non esista con $x = 0$.

Andiamo tuttavia a determinare il limite della $f'(x)$, quando x tende a 0: ci attende una sorpresa.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(5x+4)}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3(5x+4)^3}{x^2(x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}} = 0$$

Il teorema che abbiamo chiamato "Criterio di Derivabilità" ci assicura perciò che: $\exists f'(0) = 0$

In effetti, calcolando direttamente la derivata in 0 come limite del rapporto incrementale, si avrebbe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^5 + h^4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \sqrt[3]{h^2 + h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{h^2 + h} = 0$$

Tutto ciò è particolarmente interessante.

Dall'espressione generale della y' sembrava che la $y'(0)$ non esistesse, invece abbiamo poi scoperto che esiste (e vale 0).

Come mai, allora, l'espressione della y' aveva un denominatore che si annullava con $x = 0$, così da far ritenere in un primo tempo che $y'(0)$ non fosse definita?

La spiegazione sta nel fatto che la formula di derivazione per la funzione $t^{1/3}$, vale a dire:

$$D(t^{1/3}) = \frac{1}{3}t^{-2/3},$$

è applicabile soltanto a condizione che sia $t \neq 0$.

Pertanto, data una funzione della forma $[g(x)]^{1/3}$,

non possiamo pretendere di poter utilizzare tale formula anche nei punti in cui $t = g(x)$ si annulla.

Ma la non applicabilità della formula di derivazione $D(t^{1/3}) = \frac{1}{3}t^{-2/3}$

non comporta necessariamente la non derivabilità della funzione $y = [g(x)]^{1/3}$ nei punti in cui $g(x) = 0$: la questione se la y sia derivabile o meno in tali punti, resta aperta.

$$\text{L'espressione analitica } y' = \frac{x(5x+4)}{3 \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}$$

che abbiamo trovato per la derivata prima, perde inoltre significato con $x = -1$.

Calcolando il $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$ avremo:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(5x+4)}{3 \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}} = +\infty$$

Perciò, per il Criterio di Derivabilità, $f'(-1) = +\infty$,

nel senso che il rapporto incrementale centrato nell'ascissa -1 tende, al tendere a zero dell'incremento, all'infinito positivo (= il grafico della funzione attraversa l'ascissa -1 "in salita verticale").

Andiamo a controllare ulteriormente la correttezza di questo risultato, determinando la derivata in -1 come limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(-1+h)^5 + (-1+h)^4} - \sqrt[3]{-1+1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(-1+h)^4(-1+h+1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{h(-1+h)^4}{h^3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{(h-1)^4}{h^2}} = +\infty \end{aligned}$$

Ora possiamo ricapitolare e proseguire:

$$y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x} = x \cdot \sqrt[3]{x(x+1)} = \sqrt[3]{x^4(x+1)} = \sqrt[3]{x^5 + x^4} = (x^5 + x^4)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{x(5x+4)}{3 \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}} \quad (x \neq 0, x \neq -1)$$

$$f'(0) = 0, f'(-1) = +\infty \quad D' = D - \{-1\}$$

$$y' = 0 \quad \text{con} \quad x = 0 \vee x = -\frac{4}{5} \quad f(0) = 0; \quad f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{4}{5} \sqrt[3]{\frac{16}{25} - \frac{4}{5}} = -\frac{4}{5} \sqrt[3]{-\frac{4}{25}} \approx 0,43; \quad f(-1) = 0$$

$$y' > 0$$

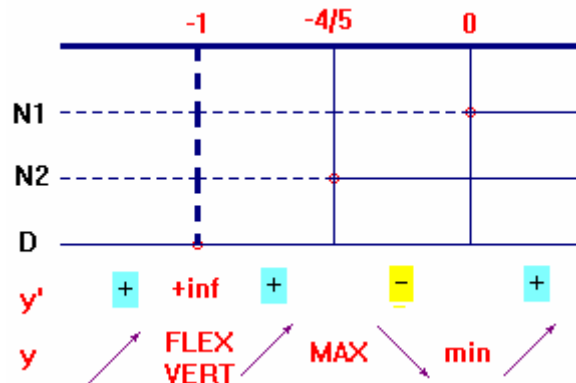
$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}} > 0$$

$$\frac{\overbrace{x(5x+4)^3}^{N1 \cdot N2}}{\underbrace{(x+1)^2}_{D}} > 0$$

$$N1 > 0 \quad x > 0$$

$$N2 > 0 \quad x > -4/5$$

$$D > 0 \quad x \neq -1$$



$F(-1,0)$ flesso verticale $MAX(-4/5; \approx 0,43)$ $min(0,0)$

□ **Derivata seconda:**

$$y'' = D \left\{ \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}} \right\} = D \left(\frac{1}{3} \left\{ \frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2} \right\}^{1/3} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2} \right\}^{-2/3} \cdot D \left[\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2} \right] = \frac{1}{9} \cdot \frac{D \left[\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2} \right]}{\sqrt[3]{\left\{ \frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2} \right\}^2}}$$

Calcoliamo a parte il numeratore della frazione:

$$\begin{aligned} D \left[\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2} \right] &= \frac{\{1 \cdot (5x+4)^3 + x \cdot 3(5x+4)^2 \cdot 5\} \cdot (x+1)^2 - x(5x+4)^3 \cdot 2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{\{5x+4\}^3 + 15x\{5x+4\}^2 \cdot (x+1)^2 - 2x(5x+4)^3(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(5x+4)^2 \overbrace{(5x+4+15x)}^{4(5x+1)} (x+1)^2 - 2x(5x+4)^3(x+1)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{2(5x+4)^2(x+1)\{2(5x+1)(x+1) - x(5x+4)\}}{(x+1)^4} = \frac{2(5x+4)^2(x+1)(10x^2+10x+2x+2-5x^2-4x)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{2(5x+4)^2(x+1)(5x^2+8x+2)}{(x+1)^4} = \frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{(x+1)^3} \\ \boxed{y''} &= \frac{1}{9} \frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{(x+1)^3} = \frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{9(x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{\left\{ \frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2} \right\}^2}} = \frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^9 \cdot x^2 \cdot (5x+4)^6}} = \\ &= \frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^5 \cdot x^2 \cdot (5x+4)^6}} = \frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{9(x+1)(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \frac{2(5x^2+8x+2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} \quad \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq -4/5 \end{array} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(5x^2+8x+2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = +\infty$	<p>La natura del punto di ascissa 0 era già nota dalle considerazioni precedenti: si tratta di un punto stazionario ($y'(0) = 0$), di minimo relativo. Nell'intorno dell'ascissa 0 il grafico della funzione sta tutto al di sopra della retta tangente in (0,0): perciò si tratta di un punto di convessità per la funzione, sebbene in tale punto non esista la y'' (che "diventa infinita").</p>
$\lim_{x \rightarrow -1\pm} f''(x) =$ $= \lim_{x \rightarrow -1\mp} \frac{2(5x^2+8x+2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \mp\infty$ <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{c} \uparrow -1 \\ \frac{2(5x^2+8x+2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0\pm \quad 1 \quad 0+ \end{array}$ </div>	<p>La natura del punto di ascissa -1 era già nota dalle considerazioni precedenti: $x = -1$ è punto di flesso verticale. Nell'attraversamento dell'ascissa -1, la y'' da positiva diventa negativa; tuttavia, nell'ascissa -1 la y'' non esiste (in $x = -1$ non esisteva neppure la y'!). Insomma, si tratta di un caso in cui la y'' cambia di segno senza annullarsi.</p>
$\lim_{x \rightarrow -4/5} f''(x) = \lim_{x \rightarrow -4/5} \frac{2(5x^2+8x+2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \dots$ $= -\frac{10}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ <p>e quindi, per il Criterio di Derivabilità (applicato alla y'' vista come derivata della y'),</p> $\exists f''\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{10}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$	<p>Nel punto $x = -4/5$, la funzione ammette regolarmente tanto la derivata prima quanto la derivata seconda. Essendo $y''(-4/5) < 0$, il punto in esame è di concavità per la funzione. Già sapevamo trattarsi di un massimo relativo.</p>

Ricapitolando:

$$y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x} = x \cdot \sqrt[3]{x(x+1)} = \sqrt[3]{x^4(x+1)} = \sqrt[3]{x^5 + x^4} = (x^5 + x^4)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{x(5x+4)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}} \quad (x \neq 0, \quad x \neq -1)$$

$$f'(0) = 0, \quad f'(-1) = +\infty \quad D' = D - \{-1\}$$

$$f''(x) = \frac{2(5x^2 + 8x + 2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} \quad x \neq 0, \quad x \neq -1, \quad x \neq 4/5$$

$$f''(0) = +\infty, \quad f''\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{10}{3} \sqrt[3]{\frac{5}{2}};$$

in $x = -1$ non è definita la y' quindi non ha senso parlare della y'' ;

tuttavia, si osserva che $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} y'' = \mp \infty$

$$D'' = D' - \{0\}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(5x^2 + 8x + 2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = 0$$

$$x = \begin{cases} \frac{-4 - \sqrt{6}}{5} \approx -1,29 \\ \frac{-4 + \sqrt{6}}{5} \approx -0,31 \end{cases}$$

Lo studio del segno della y'' è banale e dall'esito ampiamente prevedibile: le due ascisse appena trovate risultano essere di flesso.

Ed ecco il grafico!!!

$$y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x}$$

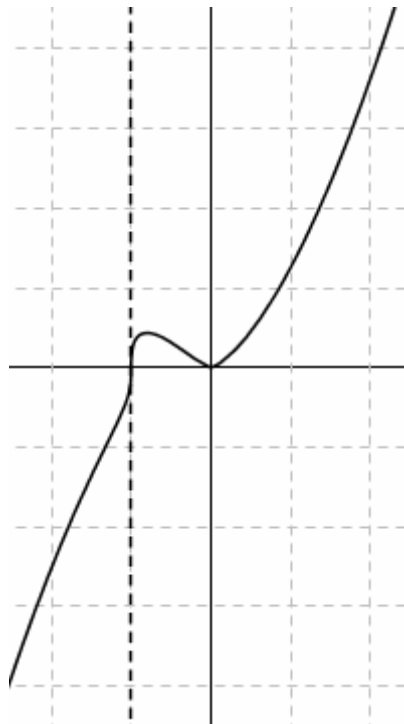
$F(-1,0)$ flesso verticale

MAX $(-4/5; \approx 0,43)$

min $(0,0)$

Flessi obliqui nelle ascisse:

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{-4 - \sqrt{6}}{5} \approx -1,29 \\ \frac{-4 + \sqrt{6}}{5} \approx -0,31 \end{cases}$$



$$y = x - \sqrt[5]{x^4} = f(x)$$

□ **Dominio** = $[-\infty, +\infty)$

□ **Né pari né dispari**

□ **Intersezioni con gli assi**

Con l'asse y : $x = 0 \rightarrow y = 0$

Con l'asse x :

$$y = 0$$

$$x = \sqrt[5]{x^4};$$

$$x^5 = x^4;$$

$$x^5 - x^4 = 0;$$

$$x^4(x-1) = 0;$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

FINESTRA SULLA TEORIA

Le equazioni e le disequazioni irrazionali diventano di semplicissima risoluzione quando l'indice del radicale è **dispari**.

Infatti

l'elevamento ad esponente dispari di un'equazione o disequazione è sempre lecito senza che vada posta alcuna condizione complementare

□ **Segno della funzione**

$$y > 0$$

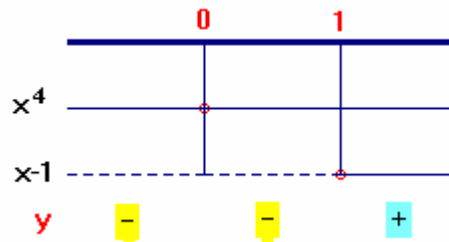
$$x - \sqrt[5]{x^4} > 0;$$

$$x > \sqrt[5]{x^4};$$

$$x^5 > x^4;$$

$$x^5 - x^4 > 0;$$

$$x^4(x-1) > 0$$



□ **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ -\infty \end{array} - \underbrace{\sqrt[5]{x^4}}_{-\infty} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ +\infty \end{array} - \underbrace{\sqrt[5]{x^4}}_{-\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt[5]{x^4}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt[5]{\frac{x^4}{x^5}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \underbrace{\sqrt[5]{\frac{1}{x}}}_{0} \right) = +\infty$$

□ **Eventuali asintoti obliqui**

Ricerca di m $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[5]{x^4}}{x} = \dots = 1 = m.$

Ricerca di q $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[5]{x^4} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt[5]{x^4}) = -\infty$

Quindi, per $x \rightarrow \pm\infty$,

non si hanno asintoti obliqui

ma solo la "direzione asintotica" $m = 1$.

Derivata prima

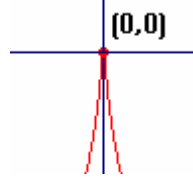
$$y' = \frac{d}{dx}(x - \sqrt[5]{x^4}) = \frac{d}{dx}(x - x^{4/5}) = 1 - \frac{4}{5}x^{-1/5} = 1 - \frac{4}{5x^{1/5}} = 1 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} = \frac{5\sqrt[5]{x} - 4}{5\sqrt[5]{x}}$$

Il dominio D' della f'(x) è più ristretto del dominio D della f(x):
 con $x = 0$ la funzione esiste, ma non è derivabile.

Calcoliamo allora i due limiti della y' , per x che tende a 0 da sinistra e da destra:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right) = -\infty$$

Si ha pertanto
 $y'_-(0) = +\infty$
 $y'_+(0) = -\infty$
 e il punto $x = 0$
 è una **CUSPIDE**



$$y' = 0 \quad 5\sqrt[5]{x} - 4 = 0; \quad \sqrt[5]{x} = \frac{4}{5}; \quad x = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 0,32768$$

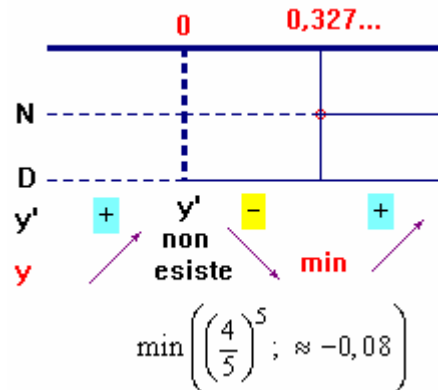
$$f\left(\left(\frac{4}{5}\right)^5\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \sqrt[5]{\left[\left(\frac{4}{5}\right)^5\right]^4} = \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5} - 1\right) = -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = -0,08192$$

$$y' > 0$$

$$\frac{5\sqrt[5]{x} - 4}{5\sqrt[5]{x}} > 0$$

$$N > 0 \quad 5\sqrt[5]{x} - 4 > 0; \quad \sqrt[5]{x} > \frac{4}{5}; \quad x > \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$D > 0 \quad 5\sqrt[5]{x} > 0; \quad x > 0$$



Derivata seconda

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{4}{5}x^{-1/5}\right) = -\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)x^{-6/5} = \frac{4}{25}x^{-6/5} = \frac{4}{25\sqrt[5]{x^6}} = \frac{4}{25x \cdot \sqrt[5]{x}}$$

Dunque y'' non può mai annullarsi, e anzi è sempre positiva, $\forall x \neq 0$.

Con $x = 0$, naturalmente, y'' non esiste (non esisteva neppure la derivata prima!).

La nostra funzione è sempre convessa.

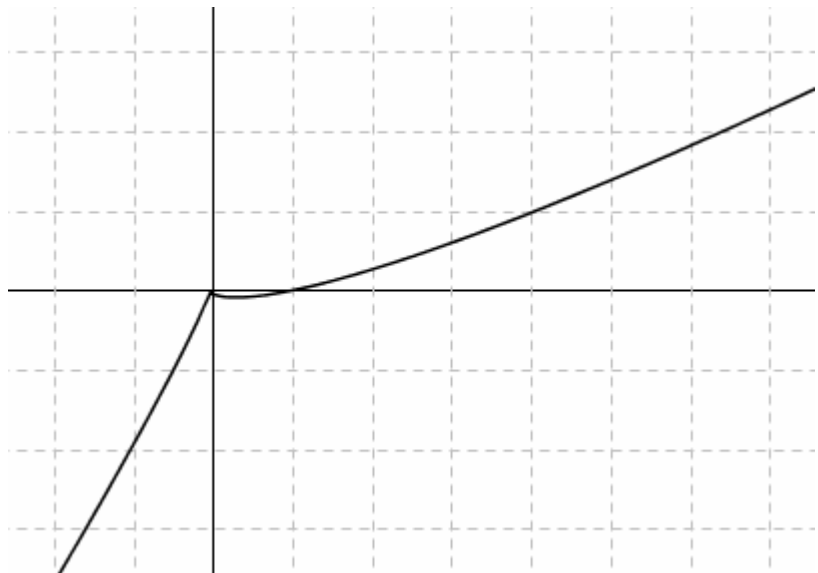
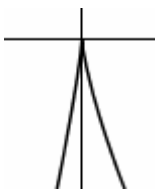
Ed ecco il grafico !!!

$$y = x - \sqrt[5]{x^4} = f(x)$$

cuspidè in (0,0)

$$\min\left(\left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0,33; \approx -0,08\right)$$

Qui sotto è rappresentata
 (con GeoGebra) la cuspidè



$$y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = f(x)$$

❑ **Dominio:** $x \neq 0$ $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

❑ **Né pari né dispari**

❑ **Intersezioni con gli assi**

- Poiché la funzione non è definita con $x = 0$, non si hanno intersezioni con l'asse y .
- Ricerchiamo ora le eventuali intersezioni con l'asse x .

$y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ se e solo se $e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Ma quest'ultima equazione è impossibile! Infatti...

... IMPORTANTISSIMO!

Un'esponenziale, ossia una funzione della forma a^t , con $a > 0$, non si annulla mai, per nessun valore dell'esponente t , anzi: è **STRETTAMENTE POSITIVA per ogni valore dell'esponente**. In altre parole, elevando una costante positiva ad un qualsivoglia esponente (positivo, negativo o nullo; intero, razionale o irrazionale), il risultato che si ottiene è sempre strettamente positivo.

Quindi, in definitiva, LA CURVA GRAFICO DELLA NOSTRA FUNZIONE NON HA NESSUNA INTERSEZIONE CON GLI ASSI.

❑ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} > 0$$

Abbiamo già osservato che il numeratore è >0 per ogni x (diverso da 0, ovviamente);

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{con } x > 0 \\ \text{perciò si ha: } f(x) &< 0 \quad \text{con } x < 0 \\ f(x) &= 0 \quad \text{mai} \end{aligned}$$

❑ **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0}^1}{\underbrace{x}_{-\infty}} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0}^1}{\underbrace{x}_{+\infty}} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty}^{+\infty}}{\underbrace{x}_{0^-}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow -\infty}^{0^+}}{\underbrace{x}_{0^+}} = F.I.$$

L'ultimo fra i quattro limiti presenta una Forma di Indecisione, che tenteremo di sciogliere con la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(+\frac{1}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(+\frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3} = \dots$$



Vediamo purtroppo che l'applicazione (reiterata) di De l'Hospital non scioglie l'indecisione, bensì la ripropone continuamente (con un denominatore, anzi, di grado via via sempre più elevato).

Ciò è dovuto al fatto che derivando l'esponenziale $e^{-\frac{1}{x}}$ si genera, per derivazione dell'esponente, il fattore $+\frac{1}{x^2}$, il quale va a vanificare l' "abbattimento di un grado", per derivazione, del monomio che si aveva a denominatore.

Un tentativo di superare l' impasse potrebbe consistere nell'effettuare una sostituzione che porti l'esponenziale ad assumere una forma più "addomesticata", tale che attraverso la derivazione si mantenga sostanzialmente "stabile".

Poniamo allora $\frac{1}{x} = t$. Avremo $x = \frac{1}{t}$ e con $x \rightarrow 0^+$ sarà $t \rightarrow +\infty$.

$$\text{Il nostro limite diventerà: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0^+$$

Evviva!!! Possiamo finalmente concludere che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0^+$

NOTA

Avremmo anche potuto evitare di ricorrere ad una sostituzione, procedendo nel modo seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\rightarrow +\infty}} = 0^+$$

□ **Derivata prima**

$$y = f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

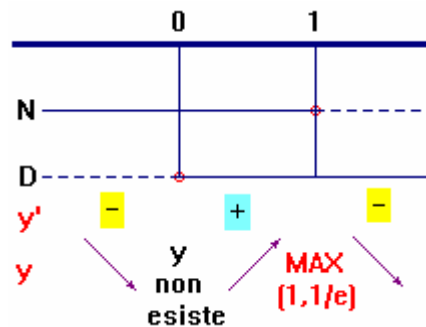
$$y' = \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(+\frac{1}{x^2}\right) \cdot x - e^{-\frac{1}{x}} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x}}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x^3}$$

$$y' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x^3} \quad y' = 0 \text{ con } x = 1. \quad y(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2,718} \approx 0,368$$

$$y' > 0$$

$$e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x^3} > 0$$

$N > 0 \quad x < 1$
 $D > 0 \quad x > 0$



Prima di procedere col calcolo della derivata seconda,

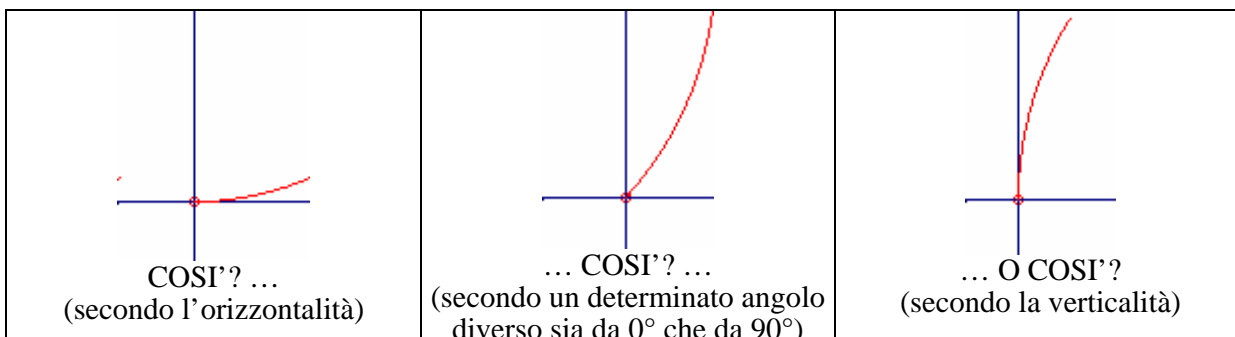
dobbiamo “domandare ancora qualche cosa” alla y' .

La nostra funzione $f(x)$ ha un comportamento molto particolare in prossimità dell'ascissa 0:

infatti si ha $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+$

Dunque, quando $x \rightarrow 0^+$, y tende a 0:

ma CON QUALE PENDENZA la curva $y = f(x)$ si “tuffa”, da destra, nel punto (0,0)?



Risponderemo calcolando il $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{0^+} \cdot \underbrace{\frac{1-x}}{x^3}}_{+\infty}$.

Anche questo limite è “brutto”: presenta infatti una Forma di Indecisione $[0 \cdot \infty]$.

Seppure l'esperienza induca a “scommettere” in favore dell'esponenziale

(e, quindi, a pronosticare che il limite valga 0),

sorge l'esigenza di sciogliere l'indecisione con un procedimento rigoroso.

Purtroppo portando la funzione sotto una delle due forme

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{1-x}{x^3}}{\frac{1}{e^x}}$$

si va incontro, oltre che a calcoli pesanti, allo stesso fallimento che abbiamo sperimentato con la Forma di Indecisione precedente.

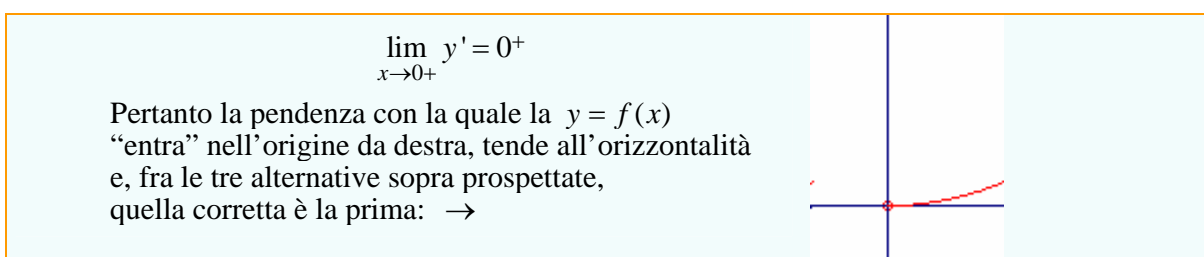
Siamo allora portati a effettuare ancora la sostituzione

$$\frac{1}{x} = t \quad (\text{da cui } x = \frac{1}{t})$$

per ottenere

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{t^3 - t^2}^{+\infty}}{\underbrace{e^t}_{+\infty}} =$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t^2 - 2t}{e^t} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t - 2}{e^t} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^t} = 0^+$$



□ **Derivata seconda** $y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ $y' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x^3}$

$$y'' = \left[e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(+\frac{1}{x^2} \right) \right] \cdot \frac{1-x}{x^3} + e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1 \cdot x^3 - (1-x) \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1-x}{x^5} + \frac{2x^3 - 3x^2}{x^6} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1-x}{x^5} + \frac{2x^2 - 3x}{x^5} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^5}$$

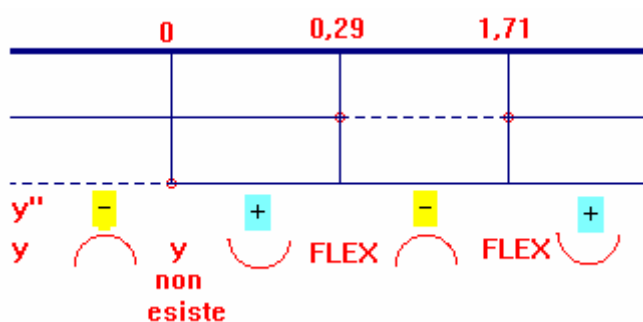
$$y'' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^5} \quad y'' = 0 \quad \text{con} \quad 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29 \\ \frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1,71 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \quad \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^5}}_{\substack{N \\ D}} > 0$$

$$N > 0 \quad x < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$D > 0 \quad x > 0$$



Con $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$ si ha $\frac{1}{x} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} = 2+\sqrt{2} \approx 3,41$

Perciò

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right]_{x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = (2+\sqrt{2}) \cdot e^{-(2+\sqrt{2})} \approx 3,41 \cdot e^{-3,41} \approx 0,11$$

$$f'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \left[e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x^3} \right]_{x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \dots \approx 0,92 \quad F_1(\approx 0,29; \approx 0,11) \quad m_1 \approx 0,92$$

... mentre affidiamo al lettore volenteroso gli analoghi calcoli

per quanto riguarda l'altro flessio. Si trova: $F_2(\approx 1,71; \approx 0,33)$, $m_2 \approx -0,08$

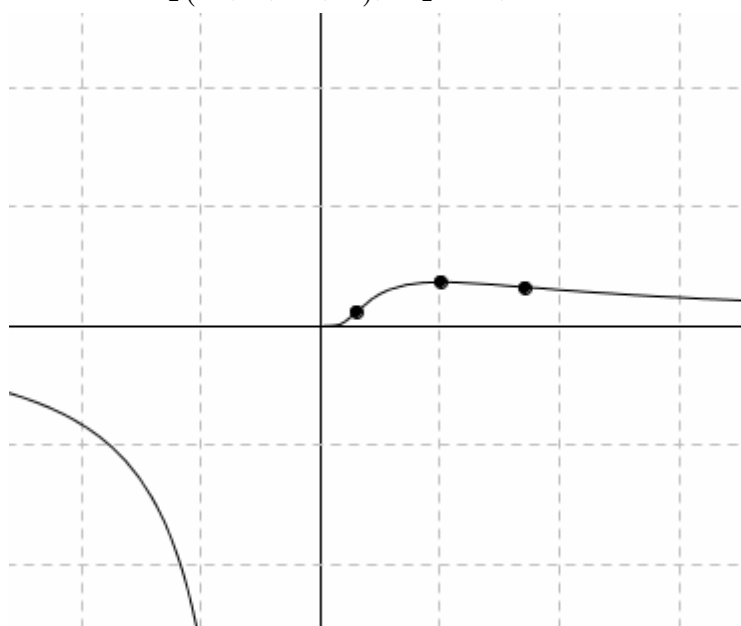
Ed ecco il grafico della funzione!!!

$$y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = f(x)$$

$$\text{MAX}\left(1, \frac{1}{e}\right)$$

$$F_1(\approx 0,29; \approx 0,11) \quad m_1 \approx 0,92$$

$$F_2(\approx 1,71; \approx 0,33), \quad m_2 \approx -0,08$$



$$y = \frac{e^x - x^2}{x+1} = f(x)$$

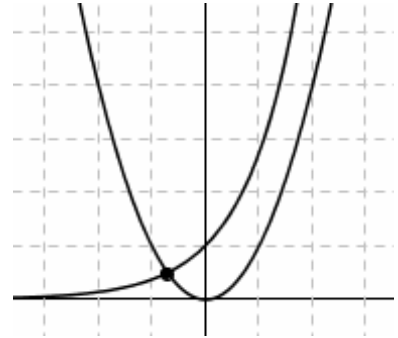
- ❑ **Dominio:** $x \neq -1$ $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
- ❑ **Né pari né dispari**
- ❑ **Intersezioni con gli assi.**

Con l'asse y: $x = 0 \rightarrow y = \frac{1-0}{0+1} = 1$ (0,1)

Con l'asse x: $\frac{e^x - x^2}{x+1} = 0 \quad e^x = x^2 \quad (x \neq -1)$

Dell'equazione $e^x = x^2$ si possono localizzare le soluzioni col metodo grafico, poi, in un secondo tempo, approssimarle meglio con una procedura numerica, ad esempio il metodo di bisezione.

Si vede che l'equazione ha una sola radice, compresa fra -1 e 0 . Una sua approssimazione ulteriore porterebbe a stabilire che tale soluzione vale circa $-0,70$.

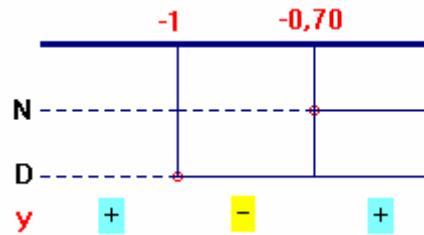


Quindi si ha una sola intersezione con l'asse x: $(\approx -0,70; 0)$

- ❑ **Segno della funzione**

$y > 0$

$$\frac{e^x - x^2}{x+1} > 0$$



- ❑ **Limiti ai confini del dominio:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x^2}{x+1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 2x}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x - x^2}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x - x^2}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right)}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Il rapporto e^x/x^2 tende a $+\infty$, come dovrebbe essere noto e come in ogni caso si può facilissimamente dimostrare applicando de l'Hospital.

Più in generale, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty, \quad \forall a > 0$$

- ❑ **Eventuali asintoti obliqui.**
Verso destra:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2} - 1}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Quindi, non c'è asintoto obliquo verso destra.

Verso sinistra:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x^2}{x^2 + x} \stackrel{\text{NOTA 1}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \stackrel{\text{NOTA 2}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2} - 1}{1 + \frac{1}{x}} = -1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x^2}{x+1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{x+1} \stackrel{\text{NOTA 3}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{1} = 1 = q$$

NOTA 1. - Abbiamo scelto di procedere per raccoglimenti, ma in alternativa avremmo potuto benissimo anche applicare la regola di De l'Hospital

NOTA 2. - $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x / x^2 = 0$

NOTA 3. - Qui abbiamo applicato la regola di De l'Hospital, ma avremmo potuto benissimo sciogliere l'indecisione raccogliendo x sia a numeratore che a denominatore.

Perciò la retta $y = -x + 1$ è **asintoto obliquo sinistro** per la nostra funzione.

□ **Derivata prima** $y = f(x) = \frac{e^x - x^2}{x+1}$

$$y' = \frac{(e^x - 2x)(x+1) - (e^x - x^2) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x + e^x - 2x^2 - 2x - e^x + x^2}{(x+1)^2} = \frac{xe^x - x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(e^x - x - 2)}{(x+1)^2}$$

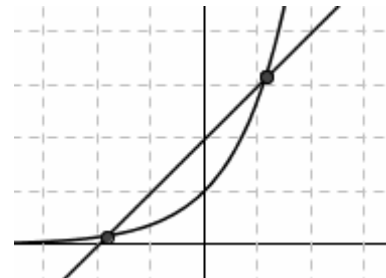
$y' = \frac{x(e^x - x - 2)}{(x+1)^2}$

 $y' = 0 \text{ con } x = 0 \vee e^x - x - 2 = 0$

L'equazione $e^x - x - 2 = 0$ può essere affrontata col metodo grafico ($e^x = x + 2$) per poi eventualmente approssimare meglio le soluzioni con una procedura numerica.

Si trovano due soluzioni, $-2 < \alpha < -1$ e $1 < \beta < 2$.

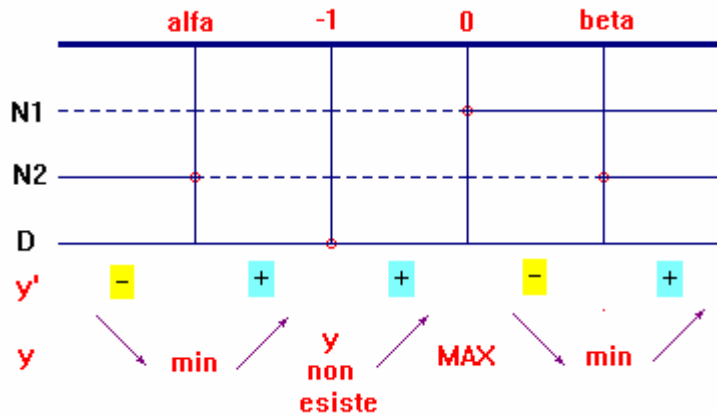
Approssimandole meglio, ad es. con bisezione, si vede che $\alpha \approx -1,84$; $\beta \approx 1,15$



Poiché $e^x > x + 2$ con $x < \alpha \vee x > \beta$, è anche $e^x - x - 2 > 0$ con $x < \alpha \vee x > \beta$. Quindi avremo:

$$y' > 0 \iff \frac{\overbrace{x}^{N1} \overbrace{(e^x - x - 2)}^{N2}}{D} > 0$$

$\min(\approx -1,84; \approx 3,84)$
 $\text{MAX}(0; 1)$
 $\min(\approx 1,15; \approx 0,85)$



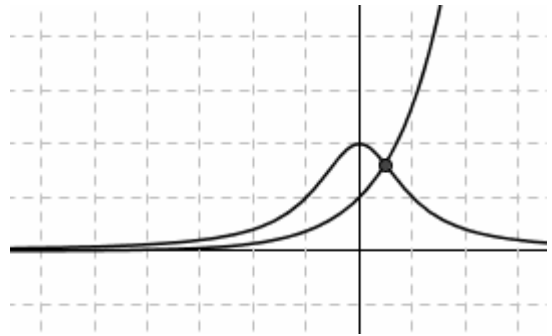
□ **Derivata seconda** $y = \frac{e^x - x^2}{x+1}$ $y' = \frac{x(e^x - x - 2)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x - x^2 - 2x}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{[(e^x + xe^x) - 2x - 2](x+1)^2 - (xe^x - x^2 - 2x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \\
 &= \frac{[e^x(x+1) - 2(x+1)](x+1)^2 - 2(x+1)(xe^x - x^2 - 2x)}{(x+1)^4} = \\
 &= \frac{(x+1)\{e^x(x+1)^2 - 2(x+1)^2 - 2(xe^x - x^2 - 2x)\}}{(x+1)^4} = \\
 &= \frac{(x+1)(x^2e^x + 2xe^x + e^x - 2x^2 - 4x - 2 - 2xe^x + 2x^2 + 4x)}{(x+1)^4} = \\
 &= \frac{x^2e^x + e^x - 2}{(x+1)^3} = \frac{(x^2+1)e^x - 2}{(x+1)^3}
 \end{aligned}$$

$$y'' = \frac{(x^2+1)e^x - 2}{(x+1)^3}$$

$$y'' = 0 \quad \frac{(x^2+1) \cdot e^x - 2}{(x+1)^3} = 0 \quad e^x = \frac{2}{x^2+1}$$

Una sola soluzione $0 < \gamma < 1$:
 con un metodo numerico si trova $\gamma \approx 0,48$
 Semplici considerazioni complementari
 assicurano che y'' cambia di segno
 nell'attraversamento
 di questa ascissa $\gamma \approx 0,48$.
 Pertanto essa è punto di flesso per la $f(x)$.
 $F(\approx 0,48; \approx 0,94)$; $m_F \approx -0,19$



Ed ecco il grafico !!!

$$y = \frac{e^x - x^2}{x+1} = f(x)$$

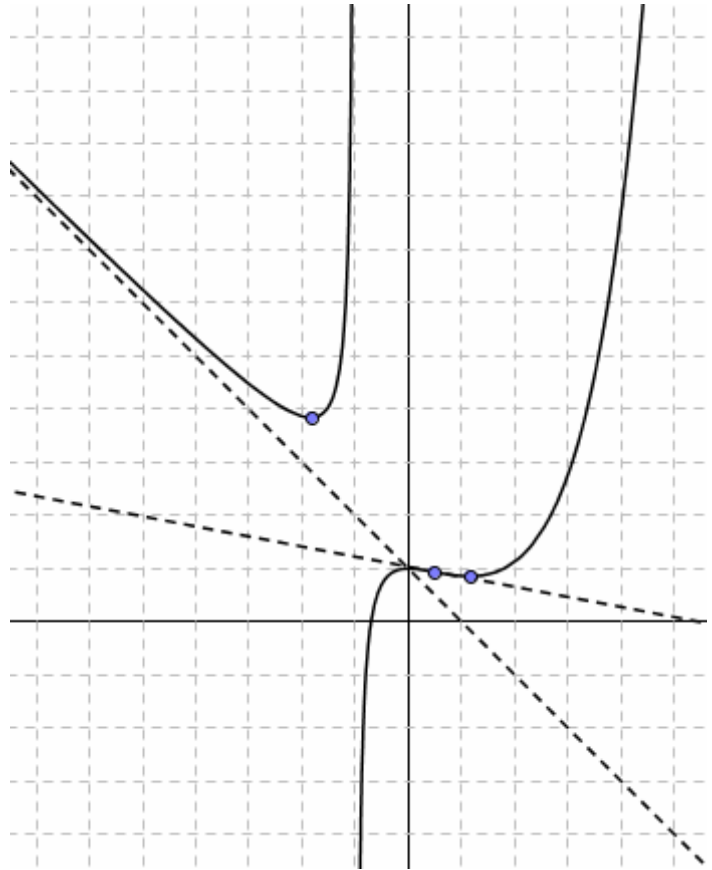
$\min(\approx -1,84; \approx 3,84)$

$\text{MAX}(0; 1)$

$\min(\approx 1,15; \approx 0,85)$

$F(\approx 0,48; \approx 0,94); m_F \approx -0,19$

Asintoto obliquo sinistro $y = -x + 1$



$$y = \frac{\ln^3 x}{9} - \ln x = f(x)$$

Ricordiamo che $\ln^3 x$ è un modo compatto per scrivere $(\ln x)^3$

❑ **Dominio:** $x > 0$ (condizione di esistenza del logaritmo). $D = (0, +\infty)$

❑ **La funzione non è né pari né dispari**

❑ **Intersezioni con gli assi**

- La funzione non è definita con $x = 0$. Quindi non si hanno intersezioni con l'asse y .
- Ricerchiamo ora le eventuali intersezioni con l'asse x .

$$\frac{\ln^3 x}{9} - \ln x = 0; \quad \ln^3 x - 9 \ln x = 0; \quad \ln x \cdot (\ln^2 x - 9) = 0; \quad \ln x = 0 \vee \ln x = \pm 3$$

$$x = 1 \vee x = e^{\pm 3} = \begin{cases} e^{-3} = \frac{1}{e^3} \approx \frac{1}{2,718^3} \approx \frac{1}{20,08} \approx 0,05 \\ e^3 \approx 20,08 \end{cases}$$

Perciò: $y = 0$ con $x = \frac{1}{e^3}$, $x = 1$, $x = e^3$

❑ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{\ln^3 x}{9} - \ln x > 0 \quad \ln^3 x - 9 \ln x > 0 \quad \ln x \cdot (\ln^2 x - 9) > 0$$

$$\ln x = t$$

$$t(t^2 - 9) > 0$$

$$-3 < t < 0 \vee t > 3$$

$$-3 < \ln x < 0 \vee \ln x > 3$$

$$\frac{1}{e^3} < x < 1 \vee x > e^3$$

❑ **Limiti ai confini del dominio:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\overbrace{\ln^3 x}^{-\infty}}{9} - \overbrace{\ln x}^{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^3 x - 9 \ln x}{9} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{-\infty} \cdot \overbrace{(\ln^2 x - 9)}^{+\infty}}{9} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\overbrace{\ln^3 x}^{+\infty}}{9} - \overbrace{\ln x}^{-\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{+\infty} \cdot \overbrace{(\ln^2 x - 9)}^{+\infty}}{9} = +\infty$$

❑ **Asintoti obliqui:** non ce ne sono, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

❑ **Derivata prima** $y = f(x) = \frac{\ln^3 x}{9} - \ln x$

$$y' = D \left(\frac{1}{9} (\ln x)^3 - \ln x \right) = \frac{1}{9} \cdot 3 (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\ln^2 x}{3x} - \frac{1}{x} = \frac{\ln^2 x - 3}{3x}$$

$$y' = 0 \text{ con } \ln^2 x = 3; \ln x = \pm\sqrt{3}; x = e^{\pm\sqrt{3}} = \begin{cases} e^{-\sqrt{3}} \approx \frac{1}{(2,718)^{1,732}} \approx \frac{1}{5,651} \approx 0,177 \\ e^{\sqrt{3}} \approx 5,651 \end{cases}$$

$$x = e^{-\sqrt{3}} \rightarrow y = \frac{[\ln(e^{-\sqrt{3}})]^3}{9} - \ln(e^{-\sqrt{3}}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{9} - (-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$y' = 0 \text{ con } \ln^2 x = 3; \ln x = \pm\sqrt{3}; y = e^{\pm\sqrt{3}} = \begin{cases} e^{-\sqrt{3}} \approx \frac{1}{(2,718)^{1,732}} \approx \frac{1}{5,65} \approx 0,177 \\ e^{\sqrt{3}} \approx 5,65 \end{cases}$$

$$x = e^{-\sqrt{3}} \rightarrow y = \frac{[\ln(e^{-\sqrt{3}})]^3}{9} - \ln(e^{-\sqrt{3}}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{9} - (-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$x = e^{\sqrt{3}} \rightarrow y = \frac{[\ln(e^{\sqrt{3}})]^3}{9} - \ln(e^{\sqrt{3}}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{9} - \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{9} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

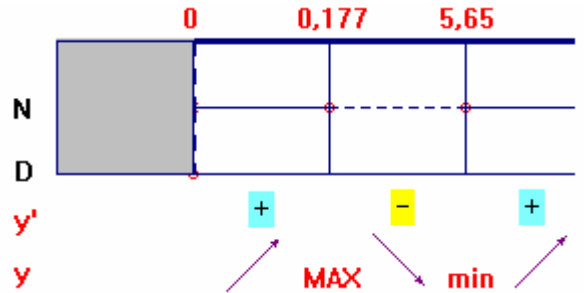
$$y' > 0 \quad \frac{\ln^2 x - 3}{3x} > 0$$

$$N > 0 \quad \ln^2 x > 3; \quad \ln x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad \ln x > \sqrt{3}$$

$$0 < x < e^{-\sqrt{3}} \quad \vee \quad x > e^{\sqrt{3}}$$

$$D > 0 \quad x > 0$$

$$\text{MAX}\left(e^{-\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right); \quad \text{min}\left(e^{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$



□ **Derivata seconda** $y = f(x) = \frac{\ln^3 x}{9} - \ln x \quad y' = \frac{\ln^2 x - 3}{3x}$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln^2 x - 3}{3x} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln^2 x - 3}{x} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(2\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot x - (\ln^2 x - 3) \cdot 1}{x^2} = \frac{2\ln x - \ln^2 x + 3}{3x^2} = \frac{-\ln^2 x - 2\ln x - 3}{3x^2}$$

$$y'' = 0 \text{ con } \ln^2 x - 2\ln x - 3 = 0; \quad (\ln x)_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

$$\ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2,718} \approx 0,368; \quad \ln x = 3 \rightarrow x = e^3 \approx 20,08$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = f(e^{-1}) = \frac{-1}{9} + 1 = \frac{8}{9}, \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = f'(e^{-1}) = \frac{+1-3}{3e^{-1}} = -\frac{2}{3}e \approx -1,812$$

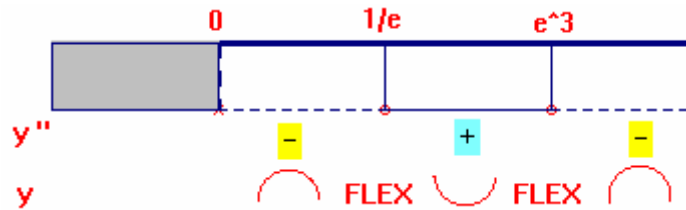
$$f(e^3) = \frac{27}{9} - 3 = 0, \quad f'(e^3) = \frac{9-3}{3e^3} = \frac{6}{3e^3} = \frac{2}{e^3} \approx 0,1$$

$$y'' > 0 \text{ quando}$$

$$\ln^2 x - 2\ln x - 3 < 0;$$

$$-1 < \ln x < 3;$$

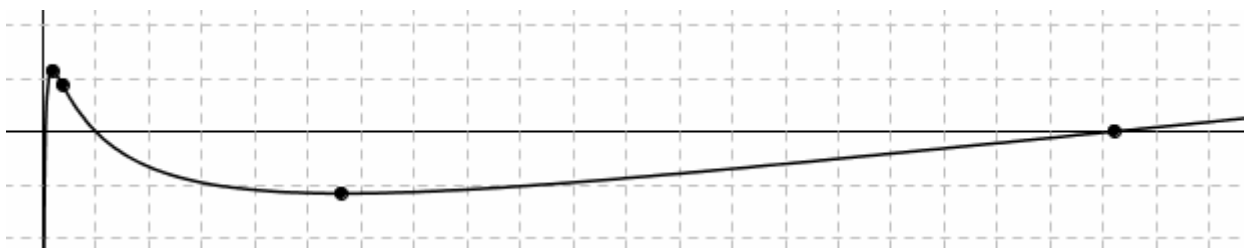
$$\frac{1}{e} < x < e^3$$



Ed ecco il grafico della funzione!!!

$$y = \frac{\ln^3 x}{9} - \ln x = f(x)$$

$$\text{MAX}\left(e^{-\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right); \quad \text{min}\left(e^{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right); \quad F_1\left(\frac{1}{e}, \frac{8}{9}\right); \quad F_2(e^3, 0)$$



$$y = \frac{x}{\ln x} + 2x = f(x)$$

❑ **Dominio:** $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0; x \neq 1 \end{cases}$ $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

❑ **La funzione non è né pari né dispari**

❑ **Intersezioni con gli assi**

- La funzione non è definita con $x = 0$. Quindi il grafico non interseca l'asse y .
- Cerchiamo le eventuali intersezioni con l'asse x .

$$\frac{x}{\ln x} + 2x = 0; \quad \frac{x + 2x \ln x}{\ln x} = 0; \quad \frac{x(1 + 2 \ln x)}{\ln x} = 0; \quad \ln x = -\frac{1}{2}; \quad x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx \frac{1}{\sqrt{2,718}} \approx \frac{1}{1,65} \approx 0,6$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0 \right)$$

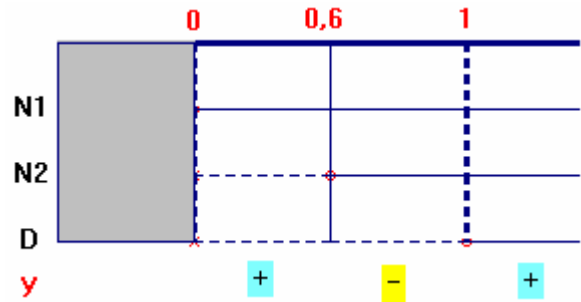
❑ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{x}{\ln x} + 2x > 0; \quad \frac{\overbrace{x}^{N1} \overbrace{(1 + 2 \ln x)}^{N2}}{\underbrace{\ln x}_D} > 0;$$

$$N_1 > 0 \quad x > 0$$

$$N_2 > 0 \quad \ln x > -\frac{1}{2}; \quad x > e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$D > 0 \quad \ln x > 0; \quad x > 1$$



❑ **Limiti ai confini del dominio:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{\ln(x)} + 2x \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^{\mp}} \left[\frac{x}{\ln(x)} + 2x \right] = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{\ln(x)} + 2x \right] \overset{NOTA}{=} +\infty$$

NOTA (IMPORTANTE)

De l'Hospital consente di dimostrare facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty, \quad \forall \alpha > 0$$

❑ **Eventuali asintoti obliqui:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + 2 \ln x)}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{1 + 2 \ln x}^{+\infty}}{\underbrace{\ln x}_{+\infty}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \left(\frac{1}{\ln x} + 2 \right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} + 2 \right) = 2 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} + 2x - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

Quindi **non si ha nessun asintoto obliquo destro, ma solo una "direzione asintotica" ($m = 2$) verso destra.**

In altre parole, la pendenza del grafico, al tendere di x all'infinito positivo, tende ad identificarsi con quella di una retta di coefficiente angolare 2, senza però che ci sia un asintoto obliquo destro.

❑ **Derivata prima** $y' = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} + 2 = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} + 2$

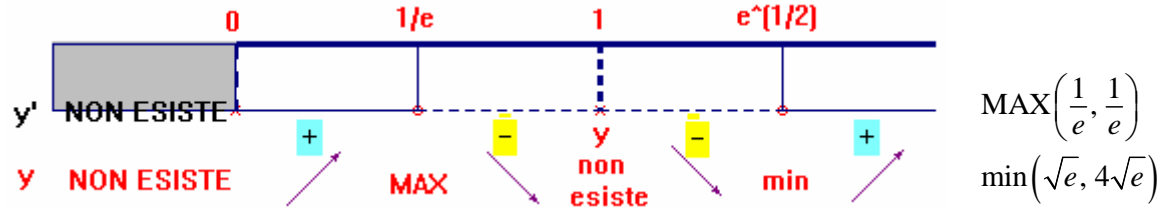
$$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} + 2 = \frac{2 \ln^2 x + \ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$y' = 0 \text{ con } \frac{2\ln^2 x + \ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \quad (\ln x)_{1,2} = \begin{cases} -1 & \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2,718} \approx 0,368 \\ \frac{1}{2} & \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e} \approx 1,65 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1/e}{\ln(1/e)} + 2(1/e) = \frac{1/e}{-1} + \frac{2}{e} = \frac{1}{e} \approx 0,368; \quad f(\sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{1/2} + 2\sqrt{e} = 4\sqrt{e} \approx 6,6$$

$$y' > 0 \text{ con } \frac{2\ln^2 x + \ln x - 1}{\ln^2 x} > 0. \text{ Poniamo } \ln x = t: \text{ otteniamo } \frac{2t^2 + t - 1}{t^2} > 0, \quad \frac{(2t-1)(t+1)}{t^2} > 0,$$

$$t < -1 \vee t > 1/2, \text{ ossia } \ln x < -1 \vee \ln x > 1/2, \quad 0 < x < e^{-1} = \frac{1}{e} \vee x > e^{1/2} = \sqrt{e}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln^2 x + \ln x - 1}{\ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 + \frac{0}{\frac{1}{\ln x}} - \frac{0}{\frac{1}{\ln^2 x}} \right) = 2$$

□ **Derivata seconda** $y = f(x) = \frac{x}{\ln x} + 2x \quad y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} + 2 = \frac{2 \ln^2 x + \ln x - 1}{\ln^2 x}$

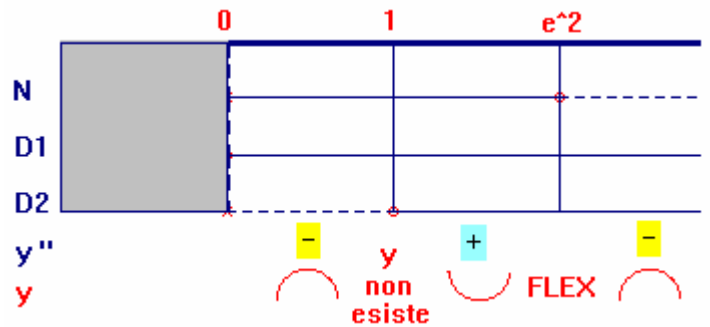
$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} + 2 \right) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln^2 x - 2 \ln^2 x + 2 \ln x}{x \ln^4 x} = \frac{-\ln^2 x + 2 \ln x}{x \ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

$$y'' = 0 \text{ con } 2 - \ln x = 0; \ln x = 2; x = e^2 \approx 7,4$$

$$f(e^2) = \frac{e^2}{\ln e^2} + 2e^2 = \frac{e^2}{2} + 2e^2 = \frac{5}{2}e^2 \approx 18,5 \quad f'(e^2) = \frac{2-1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$y'' > 0$ quando $\frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} > 0;$
 $N > 0 \quad 2 - \ln x > 0; \ln x < 2; 0 < x < e^2$
 $D_1 > 0 \quad x > 0$
 $D_2 > 0 \quad \ln^3 x > 0; \ln x > 0; x > 1$

$$F\left(e^2, \frac{5}{2}e^2\right); m_F = \frac{9}{4}$$



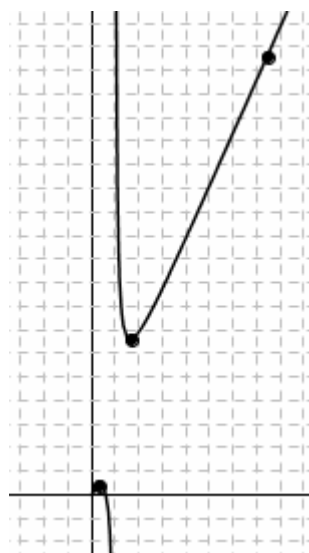
Ed ecco il grafico della funzione!!!

$$y = \frac{x}{\ln x} + 2x = f(x)$$

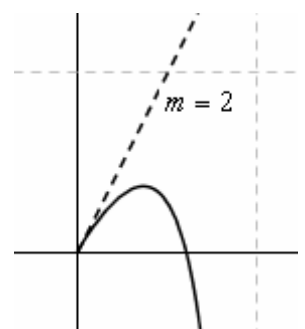
$$\text{MAX}\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$$

$$\text{min}(\sqrt{e}, 4\sqrt{e})$$

$$F\left(e^2, \frac{5}{2}e^2\right); m_F = \frac{9}{4}$$



Particolare:



$$y = \frac{\text{sen } 2x + \cos x}{\text{sen } x} = f(x)$$

Osserviamo innanzitutto che è $y = \frac{\text{sen } 2x + \cos x}{\text{sen } x} = \frac{2 \text{sen } x \cos x + \cos x}{\text{sen } x} = \frac{\cos x(2 \text{sen } x + 1)}{\text{sen } x}$

$f(x)$ è periodica di periodo 2π ;
 la studieremo sull'intervallo $[0, 2\pi]$

- ❑ **Dominio:** $\text{sen } x \neq 0$
 $x \neq 0, x \neq \pi, x \neq 2\pi$
- ❑ **La funzione non è né pari, né dispari**
- ❑ **Intersezioni con l'asse y:**
 non ce ne sono
 (con $x = 0$ la funzione non è definita)

Intersezioni con l'asse x

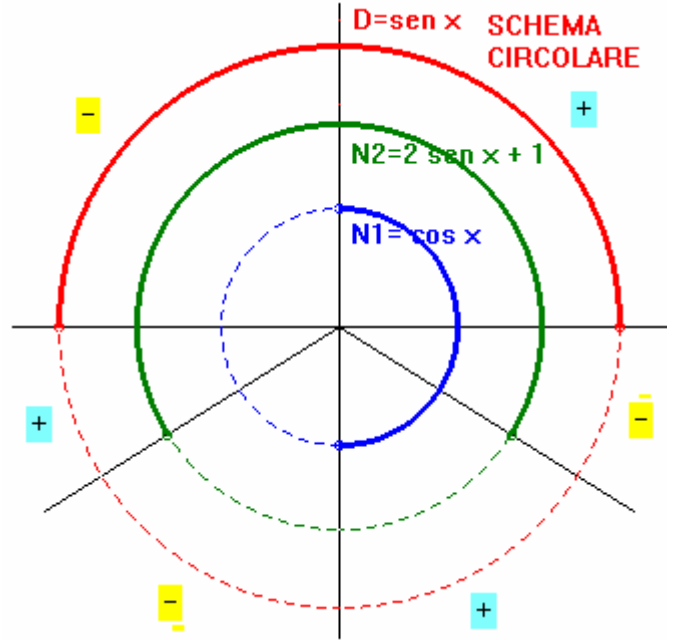
$$y = 0$$

$$\cos x = 0 \vee 2 \text{sen } x + 1 = 0 \quad (\text{sen } x = -1/2)$$

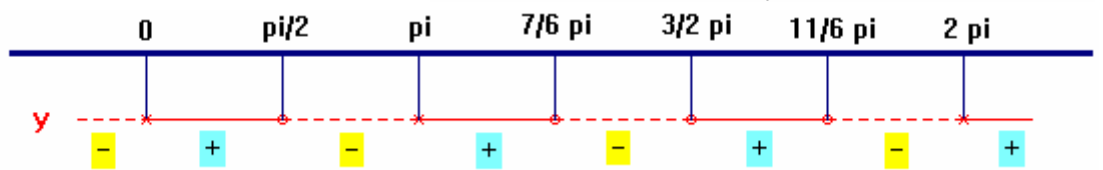
$$x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3}{2}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi$$

- ❑ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{\overbrace{\cos x}^{N1} \overbrace{(2 \text{sen } x + 1)}^{N2}}{\underbrace{\text{sen } x}_D} > 0$$



SCHEMA LINEARE



- ❑ **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\cos x}^1 \overbrace{(2 \text{sen } x + 1)}^1}{\underbrace{\text{sen } x}_{0^+}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\overbrace{\cos x}^{-1} \overbrace{(2 \text{sen } x + 1)}^1}{\underbrace{\text{sen } x}_{0^+}} = \mp\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{\overbrace{\cos x}^1 \overbrace{(2 \text{sen } x + 1)}^1}{\underbrace{\text{sen } x}_{0^-}} = -\infty$$

- ❑ **Derivata prima** $y = \frac{\text{sen } 2x + \cos x}{\text{sen } x} = \frac{2 \text{sen } x \cos x + \cos x}{\text{sen } x} = \frac{\cos x(2 \text{sen } x + 1)}{\text{sen } x}$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen } 2x + \cos x}{\text{sen } x} \right) = \frac{(2 \cos 2x - \text{sen } x) \cdot \text{sen } x - (\text{sen } 2x + \cos x) \cdot \cos x}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{2 \cos 2x \text{sen } x - \text{sen}^2 x - \text{sen } 2x \cos x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{2 \cdot (2 \cos^2 x - 1) \text{sen } x - 2 \text{sen } x \cos x \cdot \cos x - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{2 \text{sen } x (2 \cos^2 x - 1 - \cos^2 x) - 1}{\text{sen}^2 x} = \frac{2 \text{sen } x (\cos^2 x - 1) - 1}{\text{sen}^2 x} = \frac{2 \text{sen } x (-\text{sen}^2 x) - 1}{\text{sen}^2 x} = \frac{2 \text{sen}^3 x + 1}{\text{sen}^2 x}$$

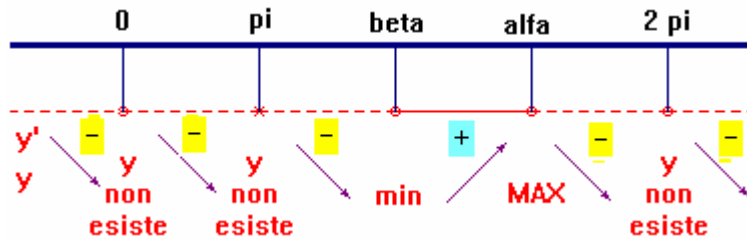
$$y' = 0 \text{ con } \text{sen } x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow$$

$$x = \begin{cases} 2\pi - \text{arc sen } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 2\pi - \text{arc sen}(0,79) \approx 6,283 - 0,917 \approx 5,37 \text{ radianti} = \alpha \\ \pi + \text{arc sen } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 4,06 \text{ radianti} = \beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow \text{cos } \alpha &= \overset{\substack{\alpha \text{ è nel } 4^\circ \\ \text{quadrante}}}{+} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = +\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \\ f(\alpha) &= \frac{+\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \cdot \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) + 1\right)}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = -\sqrt[3]{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \cdot (-\sqrt[3]{4} + 1) = \\ &= \sqrt[3]{2} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}}} \cdot (\sqrt[3]{4}-1) = \sqrt{\sqrt[3]{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}}} \cdot (\sqrt[3]{4}-1) = (\sqrt[3]{4}-1) \sqrt{(\sqrt[3]{4}-1)} = \sqrt{(\sqrt[3]{4}-1)^3} \approx 0,45 \end{aligned}$$

$$\text{sen } \beta = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow \text{cos } \beta = \overset{\substack{3^\circ \\ \text{quadrante}}}{-} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \rightarrow f(\beta) \approx -0,45$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow -\frac{2\text{sen}^3 x + 1}{\text{sen}^2 x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\text{sen}^3 x + 1}{\text{sen}^2 x} < 0 \Leftrightarrow \text{sen } x < -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \beta < x < \alpha$$



min($\beta \approx 4,06; \approx -0,45$)
MAX($\alpha \approx 5,37; \approx 0,45$)

Derivata seconda

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(2 \cdot 3\text{sen}^2 x \cos x) \cdot \text{sen}^2 x - (2\text{sen}^3 x + 1) \cdot 2\text{sen } x \cos x}{\text{sen}^4 x} = \frac{6\text{sen}^4 x \cos x - 4\text{sen}^4 x \cos x - 2\text{sen } x \cos x}{\text{sen}^4 x} = \\ &= \frac{2\text{sen}^4 x \cos x - 2\text{sen } x \cos x}{\text{sen}^4 x} = \frac{2\text{sen } x \cos x (\text{sen}^3 x - 1)}{\text{sen}^4 x} = \frac{2\cos x (\text{sen}^3 x - 1)}{\text{sen}^3 x} \end{aligned}$$

$$y'' = 0 \quad \text{cos } x = 0 \left(x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3}{2}\pi \right); \quad \text{sen } x = 1 \left(x = \frac{\pi}{2} \right)$$

Poiché la y'' cambia di segno attraversando ciascuna delle due ascisse $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

(puoi verificarlo con uno schema circolare!), i punti $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi$ sono di flesso per $f(x)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left[\frac{\cos x (2\text{sen } x + 1)}{\text{sen } x} \right]_{x=\pi/2} = 0, \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left[-\frac{2\text{sen}^3 x + 1}{\text{sen}^2 x} \right]_{x=\pi/2} = -\frac{2+1}{1} = -3 \\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \left[\frac{\cos x (2\text{sen } x + 1)}{\text{sen } x} \right]_{x=3\pi/2} = 0, \\ f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \left[-\frac{2\text{sen}^3 x + 1}{\text{sen}^2 x} \right]_{x=3\pi/2} = -\frac{-2+1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Ed ecco qui a destra il grafico!!!

$$y = \frac{\text{sen } 2x + \cos x}{\text{sen } x} = f(x)$$

min($\approx 4,06; \approx -0,45$)
MAX($\alpha \approx 5,37; \approx 0,45$)
Flessi: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi$



$$y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + 1}$$

È periodica di periodo 2π ; la studieremo sull'intervallo $[0, 2\pi]$

- ❑ **Dominio**: $\operatorname{sen} x \neq -1 \quad x \neq \frac{3}{2}\pi$
- ❑ **La funzione non è né pari, né dispari**
- ❑ **Intersezioni con l'asse y**: $x = 0 \rightarrow y = 1$
Intersezioni con l'asse x

$$y = 0 \quad \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + 1} = 0$$

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \quad (\operatorname{sen} x \neq -1)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} = 0 \quad (\cos x \neq 0, \text{ vedi NOTA}) \quad \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi.$$

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0; \operatorname{tg} x = -1$$

$$x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi$$

NOTA: la divisione per $\cos x$ è possibile solo supponendo $\cos x \neq 0$; ciò significa escludere quei valori dell'arco x che rendono nullo il coseno, ossia:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi.$$

D'altra parte, tali valori di x

NON sono soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$, come è immediato verificare per sostituzione diretta.

- ❑ **Segno della funzione**

$$y > 0 \quad \frac{\overbrace{\operatorname{sen} x + \cos x}^N}{\underbrace{\operatorname{sen} x + 1}_D} > 0$$

$$N > 0$$

$$\operatorname{sen} x + \cos x > 0; \text{ vedi NOTA}$$

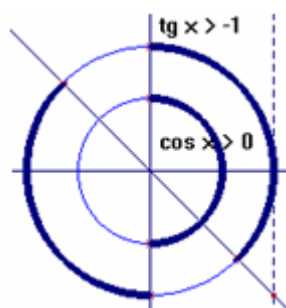
$$\underbrace{\begin{cases} \cos x > 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} > 0, \operatorname{tg} x > -1 \end{cases}}_{\text{SISTEMA 1}} \vee \underbrace{\begin{cases} \cos x < 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} < 0, \operatorname{tg} x < -1 \end{cases}}_{\text{SISTEMA 2}} \vee \underbrace{\begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x > 0 \end{cases}}_{\text{SISTEMA 3}}$$

NOTA

La disequazione $\operatorname{sen} x + \cos x > 0$ può essere risolta in diversi modi; ad esempio, portandola sotto la forma $\operatorname{sen} x > -\cos x$ e tracciando i grafici delle due funzioni $y = \operatorname{sen} x$, $y = -\cos x$ su di uno stesso riferimento cartesiano.

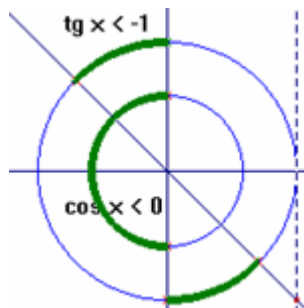
Se invece si desidera risolverla allo stesso modo dell'equazione, ossia tramite divisione per $\cos x$, qui si ha una difficoltà in più: infatti, in una DISequazione, non è lecito dividere ambo i membri per una stessa quantità, se non a condizione che questa sia >0 . Quando invece i due membri vengono divisi per una stessa quantità negativa, occorre cambiare il verso della disequazione.

Dovremo perciò distinguere TRE casi: $\cos x > 0$, $\cos x < 0$, $\cos x = 0$. Da cui i tre sistemi.



Il primo sistema è verificato con

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$$



Il secondo sistema è verificato con

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{2}\pi \\ \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi + \cos \frac{3}{2}\pi > 0 \end{cases}$$

VERA FALSA

Il terzo sistema è verificato con

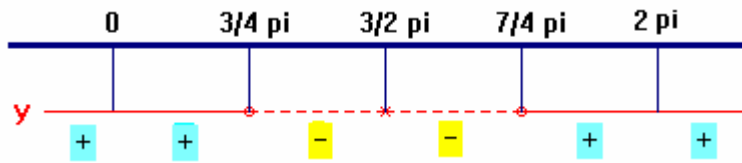
$$x = \frac{\pi}{2}$$

La disequazione $N > 0$ ($\operatorname{sen} x + \cos x > 0$), equivalente alla disgiunzione logica dei tre sistemi, è pertanto verificata con $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$

$$D > 0 \quad \text{sen } x + 1 > 0; \text{sen } x > -1; x \neq \frac{3}{2}\pi$$

Ricapitoliamo: $N > 0$ con $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$, $D > 0$ con $x \neq \frac{3}{2}\pi$

... e il seguente schema lineare descrive il segno della frazione $f(x) = N/D$:



□ **Limiti ai confini del dominio:**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi \pm} \frac{\overbrace{\text{sen } x + \cos x}^{-1}}{\underbrace{\text{sen } x + 1}_{0+}} = -\infty$$

□ **Derivata prima** $y = \frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x + 1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x - \text{sen } x) \cdot (\text{sen } x + 1) - (\text{sen } x + \cos x) \cdot \cos x}{(\text{sen } x + 1)^2} = \\ &= \frac{\text{sen } x \cos x + \cos x - \text{sen}^2 x - \text{sen } x - \text{sen } x \cos x - \cos^2 x}{(\text{sen } x + 1)^2} = \\ &= \frac{\cos x - \text{sen } x - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\text{sen } x + 1)^2} = \frac{\cos x - \text{sen } x - 1}{(\text{sen } x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$y' = 0 \quad \cos x - \text{sen } x - 1 = 0 \quad \left(\text{sen } x + 1 \neq 0, x \neq \frac{3}{2}\pi \right)$$

Si tratta di **un'equazione lineare in seno e coseno**, per la quale esistono diversi metodi di risoluzione:

- il metodo delle equazioni parametriche
- il metodo del sistema con la Prima Relazione Fondamentale
- il metodo dell'angolo ausiliario
- il metodo grafico "classico"
- il metodo grafico circonferenza-retta

Utilizzando, ad esempio, le formule parametriche $\text{sen } x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, essendo $t = \text{tg } \frac{x}{2}$, avremo:

$$\cos x - \text{sen } x - 1 = 0 \quad \left(\text{sen } x + 1 \neq 0, x \neq \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} - 1 = 0; \quad 1-t^2 - 2t - 1 - t^2 = 0; \quad -2t^2 - 2t = 0; \quad t(t+1) = 0; \quad t = 0 \vee t = -1$$

$$t = 0; \quad \text{tg } \frac{x}{2} = 0; \quad \frac{x}{2} = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad x = 2k\pi \text{ e quindi, in } [0; 2\pi], \quad x = 0 \vee x = 2\pi$$

$$t = -1; \quad \text{tg } \frac{x}{2} = -1; \quad \frac{x}{2} = \frac{3}{4}\pi + k\pi; \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ e quindi, in } [0; 2\pi], \quad x = \frac{3}{2}\pi \text{ NON ACC.}$$

Abbiamo perciò trovato le soluzioni $x = 0$; $x = 2\pi$.

C'è però da considerare che le formule parametriche,

di cui ci siamo serviti per il procedimento risolutivo, contengono $\text{tg } \frac{x}{2}$

e quindi non hanno significato per quei valori di x , per quali $\text{tg } \frac{x}{2}$ non esiste.

Utilizzare le formule parametriche comporta perciò di supporre

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad \text{cioè } x \neq \pi + 2k\pi \quad (\text{in } [0, 2\pi], x \neq \pi)$$

D'altra parte, l'arco $x = \pi$ POTREBBE BENISSIMO essere soluzione dell'equazione considerata: occorrerà perciò completare la risoluzione andando a controllare, per sostituzione diretta, se lo è oppure no.

Ci chiediamo dunque: l'uguaglianza $\cos x - \sin x - 1 = 0$ è verificata con $x = \pi$?

La risposta è negativa: $\cos \pi - \sin \pi - 1 = -1 - 0 - 1 = -2 \neq 0$

Perciò $x = \pi$ non è soluzione; rimangono soltanto le soluzioni trovate prima, $x = 0$; $x = 2\pi$.

$$y' > 0 \quad \frac{\cos x - \sin x - 1}{(\sin x + 1)^2} > 0$$

Essendo il denominatore sempre positivo

(tranne che con $x = \frac{3}{2}\pi$, valore per cui si annulla, e l'espressione non esiste)

il segno della frazione è determinato dal segno del numeratore.

$$\text{Sarà perciò } y' > 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x - 1 > 0 \quad \left(\text{con } x \neq \frac{3}{2}\pi \right).$$

Per risolvere la disequazione $\cos x - \sin x - 1 > 0$ potremmo utilizzare diversi metodi, fra cui quello che sfrutta le formule parametriche;

in questo caso direi che il procedimento più comodo è senz'altro quello grafico "classico",

consistente nel portare l'equazione sotto la forma equivalente $\cos x > \sin x + 1$

e nel rappresentare le due curve $y = \cos x$, $y = \sin x + 1$ su di uno stesso riferimento cartesiano,

allo scopo di determinare per quali valori di x la prima curva sta al di sopra della seconda

(osserviamo che, avendo noi già risolto l'equazione $\cos x - \sin x - 1 = 0$,

equivalente a $\cos x = \sin x + 1$, sappiamo già quali sono le ascisse dei loro punti di intersezione).

Tracciare i grafici "a mano" è particolarmente semplice

(anche se la figura riportata qui a fianco

è stata realizzata col software GeoGebra):

l'andamento della funzione $y = \cos x$ è ben noto,

e la curva $y = \sin x + 1$ (tratteggiata, in figura)

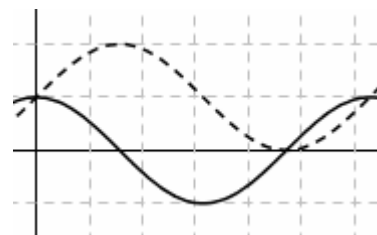
si può ottenere trasladando verso l'alto di un'unità

la sinusoide $y = \sin x$.

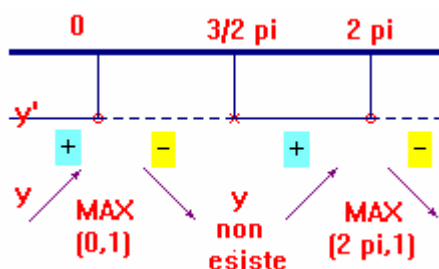
Dai grafici sovrapposti emerge chiaramente

che le soluzioni della disequazione $\cos x > \sin x + 1$ sono:

$$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi.$$



Perciò:



Lo schema sopra riportato ci fornisce un'ottima occasione per ribadire un suggerimento importante.

In uno schema lineare relativo ad una funzione goniometrica, funzione che di norma viene studiata soltanto sull'intervallo $[0, 2\pi]$ per via della sua periodicità, è sempre opportuno andare anche "un pochettino a sinistra dello 0" e "un pochettino a destra di 2π ".

In questo modo, infatti, sarà molto più facile riconoscere alcune caratteristiche della funzione, la quale, sebbene venga analizzata su $[0, 2\pi]$, ha però poi un grafico che dev'essere pensato come frutto di un "copia e incolla" che replica su tutto \mathbb{R} l'andamento che si aveva tra 0 e 2π . Nel caso della funzione da noi considerata, questa estensione dello schema ci permette di riconoscere molto chiaramente le situazioni di massimo, che invece non sarebbero risultate altrettanto evidenti se lo schema fosse stato limitato rigorosamente alle sole ascisse tra 0 e 2π .

□ **Derivata seconda**

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + 1} & y' &= \frac{\cos x - \operatorname{sen} x - 1}{(\operatorname{sen} x + 1)^2} \\
 y'' &= \frac{(-\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot (\operatorname{sen} x + 1)^2 - (\cos x - \operatorname{sen} x - 1) \cdot 2(\operatorname{sen} x + 1) \cdot \cos x}{(\operatorname{sen} x + 1)^4} = \\
 &= \frac{-(\operatorname{sen} x + 1)[(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x + 1) + 2\cos x(\cos x - \operatorname{sen} x - 1)]}{(\operatorname{sen} x + 1)^4} = \\
 &= \frac{(\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x + \cos x + 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x - 2\cos x)}{(\operatorname{sen} x + 1)^4} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x - \cos x}{(\operatorname{sen} x + 1)^3} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x - \cos x}{(\operatorname{sen} x + 1)^3} = \\
 &= \frac{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x - \cos x}{(\operatorname{sen} x + 1)^3} = \frac{1 + \operatorname{sen} x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x - \cos x}{(\operatorname{sen} x + 1)^3} = \\
 &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) + (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \cos x \cdot (\operatorname{sen} x + 1)}{(\operatorname{sen} x + 1)^3} = \\
 &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) + (1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x) - \cos x(1 + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + 1)^3} = \\
 &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x)(1 + 1 - \operatorname{sen} x - \cos x)}{(\operatorname{sen} x + 1)^3} = \frac{2 - \operatorname{sen} x - \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= -\frac{2 - \operatorname{sen} x - \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = \\
 &= -\frac{2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}
 \end{aligned}$$

Osserviamo che, per aversi $y'' = 0$, dovrebbe essere $2 - \operatorname{sen} x - \cos x = 0$ cioè $\operatorname{sen} x + \cos x = 2$, equazione priva di soluzioni in quanto, per ogni valore di x , è sempre $\operatorname{sen} x \leq 1$, $\cos x \leq 1$, quindi l'uguaglianza $\operatorname{sen} x + \cos x = 2$ richiederebbe che, per uno stesso x , sia contemporaneamente $\begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$, il che è palesemente impossibile.

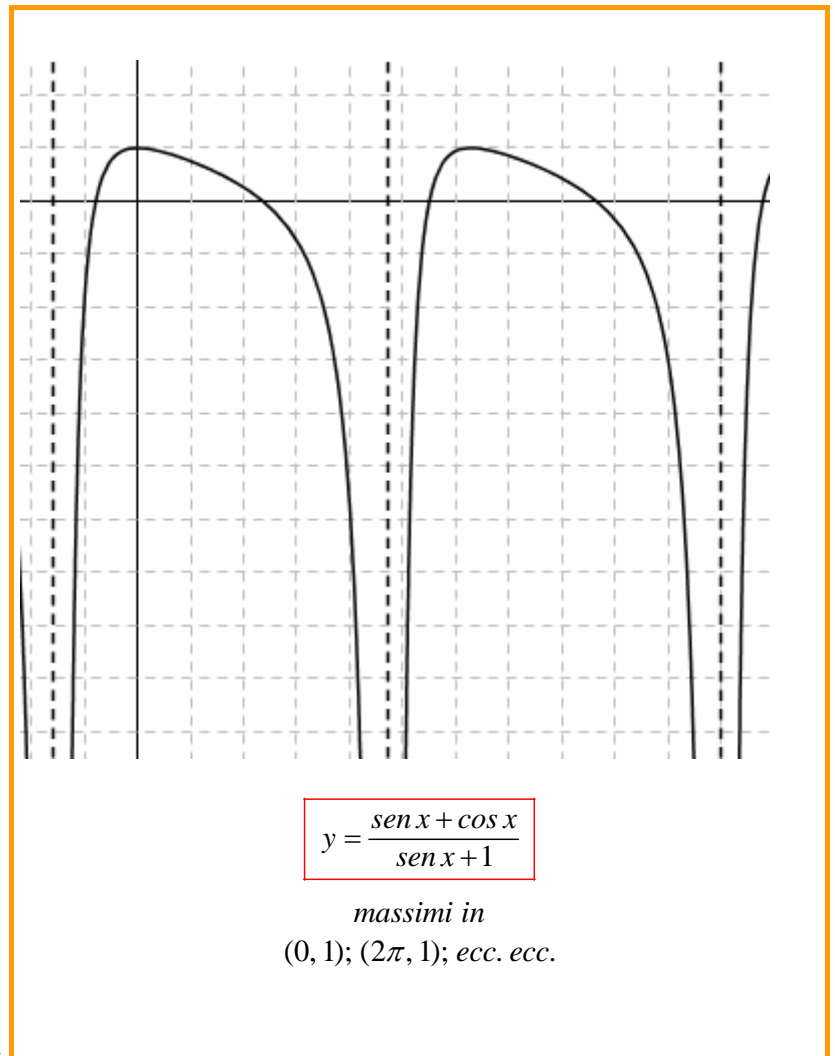
Perciò **la y'' non può mai annullarsi.**

Anzi, la y'' è, per ogni x del dominio, **strettamente negativa:**

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} x + \cos x &< 2 \quad \forall x \\
 \downarrow \\
 2 - (\operatorname{sen} x + \cos x) &> 0 \quad \forall x \\
 \downarrow \\
 -\frac{2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} &< 0 \quad \forall x \neq \frac{3}{2}\pi
 \end{aligned}$$

La funzione è perciò priva di flessi, e sempre concava.

Il grafico è riportato qui a fianco.



$$y = x(|x-2|-1)^2 = f(x)$$

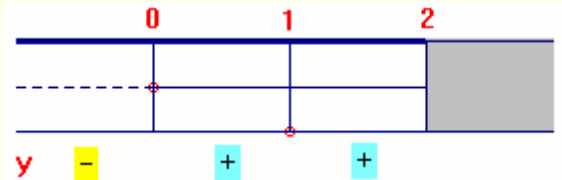
$$f(x) = \begin{cases} \text{con } x \leq 2: & x(2-x-1)^2 = x(1-x)^2 = x(x-1)^2 \\ \text{con } x \geq 2: & x(x-2-1)^2 = x(x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y = x(x-1)^2 \end{cases}$$

Dominio: $(-\infty, 2]$

$$x=0 \rightarrow y=0; \quad y=0 \text{ con } x=0 \vee x=1$$

$$y > 0$$



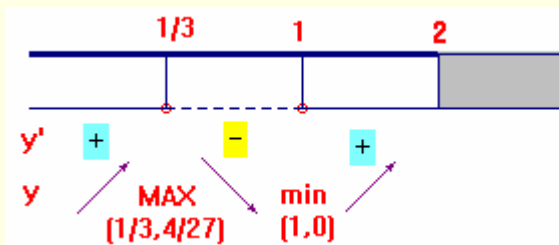
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x-1)^2 = -\infty; \quad f(2) = 2(2-1)^2 = 2$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(x(x-1)^2) = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x) = \\ &= 3x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 3x - x + 1 = \\ &= 3x(x-1) - (x-1) = (3x-1)(x-1) \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ con } x = 1/3 \vee x = 1$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}; \quad f(1) = 0$$

$$y' > 0 \text{ con } x < 1/3 \vee x > 1 (\wedge x \leq 2)$$



$$\text{Derivata sinistra in } x=2: y'_{-}(2) = [(3x-1)(x-1)]_{x=2} = 5$$

$$y'' = 6x - 4 \quad y'' = 0 \text{ con } x = 2/3$$

$y'' > 0$ con $x > 2/3$ (f convessa)
mentre con $x < 2/3$ f è concava

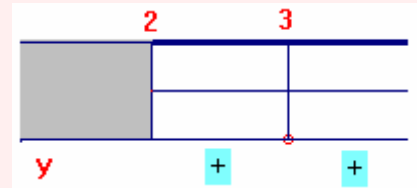
$$\text{FLESSO}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right); \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y = x(x-3)^2 \end{cases}$$

Dominio: $[2, +\infty)$

$$y=0 \text{ con } \begin{cases} x=0 \text{ NON ACCETTABILE} \\ x=3 \end{cases}$$

$$y > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-3)^2 = +\infty; \quad f(2) = 2(2-3)^2 = 2$$

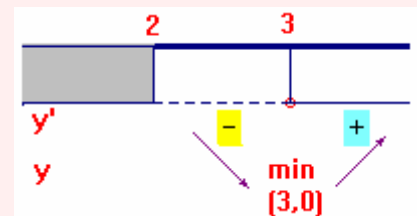
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(x(x-3)^2) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \\ &= 3x^2 - 12x + 9 = \dots = 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$y' = 0 \text{ con } \begin{cases} x=1 \text{ NON ACCETTABILE} \\ x=3 \end{cases}$$

$$f(3) = 0$$

$$y' > 0 \text{ con } x > 3$$



Derivata destra in $x=2$:

$$y'_{+}(2) = [3(x-1)(x-3)]_{x=2} = -3$$

$$y'' = 6x - 12$$

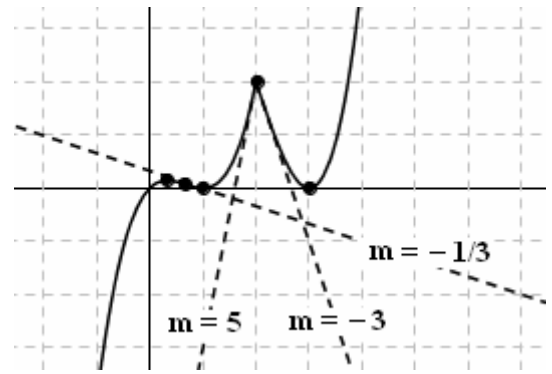
$$y'' = 0 \text{ con } x = 2$$

$$y'' > 0 \text{ con } x > 2 \text{ (} f \text{ concava)}$$

Nel punto "di saldatura" $x=2$
derivata sinistra e destra sono distinte:
 $y'_{-}(2) = 5, \quad y'_{+}(2) = -3$
Si tratta perciò di un "punto angoloso"

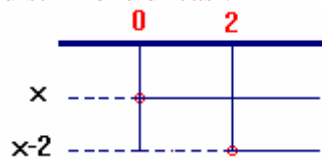
Ed ecco il grafico !!!

$$y = x(|x-2|-1)^2 = f(x)$$



$$y = \frac{4x \cdot (|x| - 2)}{|x - 2| \cdot (x + 2)^2} = f(x)$$

Schema per la distinzione di casi:



3 casi, dunque!

$$\begin{cases} x \leq 0, & x \neq -2 \\ y = \frac{4x}{(x-2)(x+2)} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{con } x \leq 0: & \frac{4x(-x-2)}{(2-x)(x+2)^2} = \frac{4x(x+2)}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{4x}{(x-2)(x+2)} & (x \neq -2) \\ \text{con } 0 \leq x < 2: & \frac{4x(x-2)}{(2-x)(x+2)^2} = \frac{4x(x-2)}{-(x-2)(x+2)^2} = -\frac{4x}{(x+2)^2} & (x \neq 2) \\ \text{con } x \geq 2: & \frac{4x(x-2)}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{4x}{(x+2)^2} & (x \neq 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ y = -\frac{4x}{(x+2)^2} \end{cases}$$

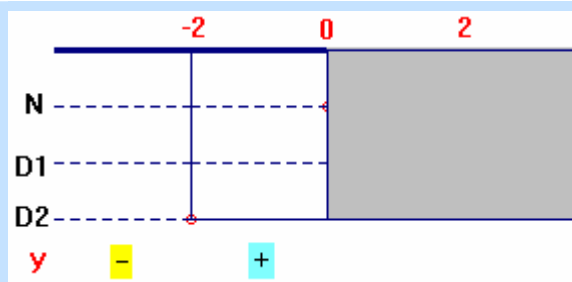
$$\begin{cases} x > 2 \\ y = \frac{4x}{(x+2)^2} \end{cases}$$

Primo intervallo: $\begin{cases} x \leq 0, & x \neq -2 \\ y = \frac{4x}{(x-2)(x+2)} \end{cases}$

Dominio: $(-\infty, 0] - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0]$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$y = 0 \text{ con } x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{(x-2)(x+2)} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x}{(x-2)(x+2)} = \infty; \quad f(0) = 0$$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{4x}{(x-2)(x+2)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{4x}{x^2 - 4} \right) = 4 \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x^2 - 4} \right) = 4 \cdot \frac{x^2 - 4 - x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = 4 \cdot \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} = -4 \cdot \frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

Pertanto y' non si annulla mai, anzi è sempre strettamente negativa su $(-\infty, 0] - \{-2\}$: la funzione, in questo intervallo, è decrescente.

$$y'_-(0) = \left[-4 \frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} \right]_{x=0} = -1$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx} \left(-4 \cdot \frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} \right) = -4 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} \right) = \\ &= -4 \cdot \frac{2x(x^2 - 4)^2 - (x^2 + 4) \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= -4 \frac{2x(x^2 - 4)(x^2 - 4 - 2x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2} = \\ &= -8 \frac{x \cdot (-x^2 - 12)}{x^2 - 4} = \frac{8x(x^2 + 12)}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

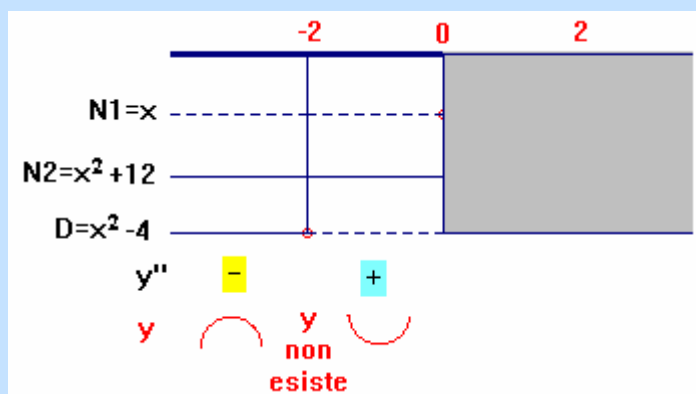
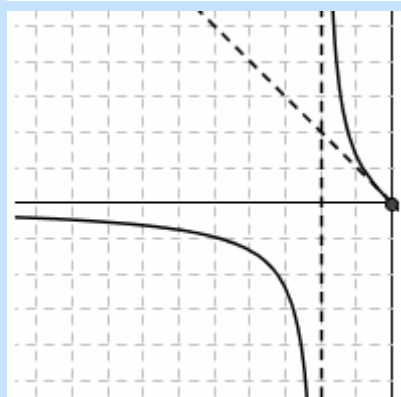


Grafico sull'intervallo $(-\infty, 0]$:



Secondo intervallo: $\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ y = -\frac{4x}{(x+2)^2} \end{cases}$ **Dominio:** $[0, 2)$;
 $x = 0 \rightarrow y = 0$;
 $y = 0$ con $x = 0$.

Sull'intervallo $[0, 2)$ il segno dell'espressione $-\frac{4x}{(x+2)^2}$ è, evidentemente, sempre negativo;

per stabilire questo, basta osservare l'espressione e tener conto della positività di x , non è necessario utilizzare uno schema! Lo schema, comunque, sarebbe quello qui sotto a destra.

$$f(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-\frac{4x}{(x+2)^2} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x}{(x+2)^2} \right) = -4 \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(x+2)^2} \right) = \dots$$

$$= -4 \cdot \frac{2-x}{(x+2)^3} = 4 \cdot \frac{x-2}{(x+2)^3}$$

$$y'_+(0) = \left[4 \frac{x-2}{(x+2)^3} \right]_{x=0} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y' = \lim_{x \rightarrow 2^-} 4 \frac{x-2}{(x+2)^3} = 0 :$$

nel punto $x = 2$ la funzione non è definita, ma al tendere di x a 2 da sinistra la pendenza del grafico tende all'orizzontalità.

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(4 \frac{x-2}{(x+2)^3} \right) = 4 \frac{d}{dx} \left(\frac{x-2}{(x+2)^3} \right) = 4 \cdot \frac{(x+2)^3 - (x-2) \cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \dots = 4 \frac{8-2x}{(x+2)^4} = -8 \frac{x-4}{(x+2)^4}$$

L'espressione $-8 \frac{x-4}{(x+2)^4}$ si annullerebbe con $x = 4$, ma tale valore non appartiene

all'intervallo di riferimento $[0, 2)$; pertanto, la y'' non si annulla mai in tale intervallo, e anzi assume sempre, in esso, valori strettamente positivi

(il numeratore $x-4$ è negativo, il denominatore è positivo, c'è il segno negativo davanti alla frazione). Pertanto la funzione è sempre CONVESSA nell'intervallo $[0, 2)$.

E' **interessante** osservare il comportamento della funzione nel punto $x = 0$:

$$\text{si ha, come abbiamo visto, } y'_-(0) = \left[-4 \frac{x^2+4}{(x-4)^2} \right]_{x=0} = -1 \quad y'_+(0) = \left[4 \frac{x-2}{(x+2)^3} \right]_{x=0} = -1$$

per cui il punto in questione NON è angoloso; tuttavia,

qualcosa cambia bruscamente nell'attraversamento dell'ascissa 0, ed è la CURVATURA del grafico.

$$\text{Infatti } y''_-(0) = \left[\frac{8x(x^2+12)}{x^2-4} \right]_{x=0} = 0 \quad \text{mentre } y''_+(0) = \left[-8 \frac{x-4}{(x+2)^4} \right]_{x=0} = 2$$

Quando il grafico "arriva al punto di ascissa 0, dalla sinistra", la derivata seconda, che esprime la velocità di variazione della derivata prima, è prossima a 0, per cui l'inclinazione del grafico è prossima alla stabilità, la curvatura del grafico è pressoché nulla.

Quando invece il grafico "riparte dal punto di ascissa 0, verso destra", la derivata seconda, cioè la rapidità di variazione della derivata prima, è prossima a 2.

L'inclinazione si evolve con una certa rapidità, la curvatura è più accentuata.

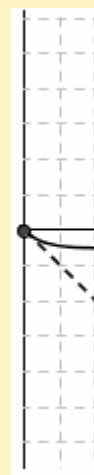
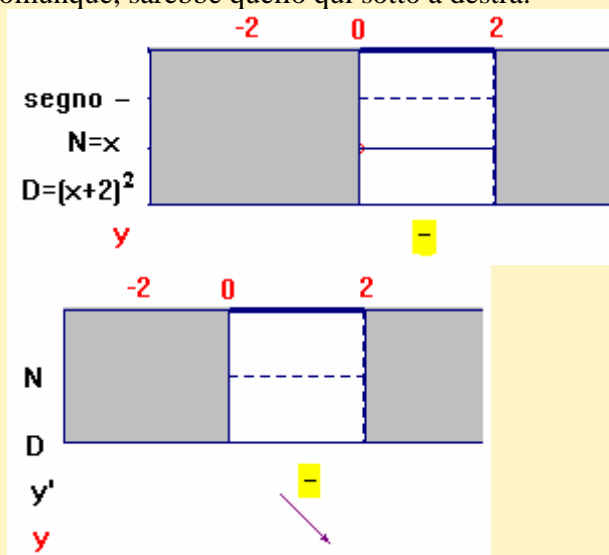
Lo studio del segno della derivata seconda $y'' = -8 \frac{x-4}{(x+2)^4}$ è molto semplice

e per effettuarlo non è indispensabile uno schema:

nell'intervallo che stiamo considerando, ossia l'intervallo $[0, 2)$,

y'' è sempre positiva e la funzione è perciò sempre convessa.

Il grafico sull'intervallo $[0, 2)$ è in definitiva quello della figura qui a fianco.



Terzo intervallo:
$$\begin{cases} x > 2 \\ y = \frac{4x}{(x+2)^2} \end{cases}$$

Dominio: $(2, +\infty)$; $y = 0$ MAI VERIFICATA IN $(2, +\infty)$

Sull'intervallo $(2, +\infty)$ il segno dell'espressione $\frac{4x}{(x+2)^2}$ è, evidentemente, sempre POSITIVO.

Si ha $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[-\frac{4x}{(x+2)^2} \right] = +\frac{1}{2}$.

Era invece $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-\frac{4x}{(x+2)^2} \right] = -\frac{1}{2}$;

quindi, nell'attraversamento dell'ascissa $x = 2$ (ascissa nella quale la funzione non è definita), si ha un "salto" ovvero una "discontinuità di prima specie".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{4x}{(x+2)^2} \right] = 0$$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{4x}{(x+2)^2} \right) = \dots = -4 \cdot \frac{x-2}{(x+2)^3}$$

Nell'intervallo di riferimento $(2, +\infty)$ la y' è sempre negativa, quindi la funzione è sempre decrescente.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y' = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-4 \frac{x-2}{(x+2)^3} \right) = 0: \text{ nel punto } x = 2 \text{ la funzione non è definita,}$$

ma al tendere di x a 2 da destra la pendenza del grafico tende all'orizzontalità (così come abbiamo visto avvenire anche da sinistra).

L'andamento del grafico in prossimità dell'ascissa 2 è, in definitiva, il seguente:



$$y'' = \frac{d}{dx} \left(-4 \frac{x-2}{(x+2)^3} \right) = 8 \frac{x-4}{(x+2)^4}$$

L'espressione $8 \frac{x-4}{(x+2)^4}$ si annulla con $x = 4$.

Tale valore appartiene all'intervallo di riferimento $(2, +\infty)$. Inoltre nell'attraversamento dell'ascissa $x = 4$ la y'' cambia di segno, passando dalla negatività alla positività: pertanto la nostra funzione passa dalla concavità alla convessità, e il punto $x = 4$ è di flesso. Si ha

$$f(4) = \left[\frac{4x}{(x+2)^2} \right]_{x=4} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}; \quad f'(4) = \left[-4 \frac{x-2}{(x+2)^3} \right]_{x=4} = -4 \cdot \frac{2}{216} = -\frac{1}{27}$$

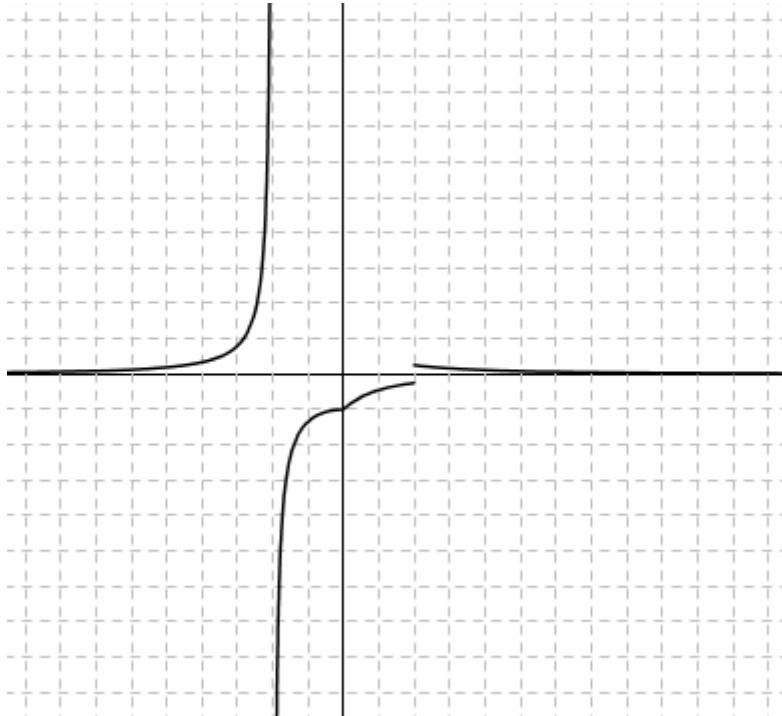
Grafico sull'intervallo $(2, +\infty)$
(non è stata tracciata la tangente inflessionale nel punto di ascissa 4, perché data la quasi rettilinearità del grafico, essa si sarebbe confusa con la curva):



Ed ecco il grafico della nostra funzione

$$y = \frac{4x \cdot (|x| - 2)}{|x - 2| \cdot (x + 2)^2} = f(x)$$

ottenuto facendo un “collage” dei tre “pezzi”!!!!



ESERCIZI**Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico:**

1) $y = 3x^2 - x^3$

2) $y = x^4 - 6x^2$

3) $y = \frac{1}{16}(x-3)^2(x+3)$

4) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

5) $y = \frac{x^3 - 8}{4x}$

6) $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$

7) $y = \frac{3x^2 - 3}{x^3}$

8) $y = \frac{x^3}{3x^2 - 3}$

9) $y = \frac{x}{x^3 + 1}$

10) $y = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2$

11) $y = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$

12) $y = \sqrt{x}(x-2)$

13) $y = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$

14) $y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+1}}$

15) $y = x\sqrt{\frac{x-1}{x}}$

16) $y = \frac{x}{\sqrt{x-4}}$

17) $y = \sqrt{x^2+1} + 2x$

18) $y = \sqrt{x^2-1} + 2x$

19) $y = \sqrt[3]{8-x^3}$

20) $y = \sqrt[3]{4-x^2}$

21) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

22) $y = xe^x$

23) $y = e^{x-x^2}$

24) $y = \frac{e^{x^2}}{x^2}$

25) $y = (1+x^2)e^x$

26) $y = e^{2x} - e^x$

27) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

28) $y = \frac{x}{\ln x}$

29) $y = \ln^2 x - \ln x$

30) $y = \ln(1+e^x)$

31) $y = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

32) $y = \operatorname{sen} x + \cos x \quad su [0, 2\pi]$

33) $y = \cos x(1 - \cos x) \quad su [0, 2\pi]$

34) $y = \operatorname{sen}^2 x \cos x \quad su [0, 2\pi]$

35) $y = \frac{2\operatorname{sen} x - 1}{2\operatorname{sen} x + 1} \quad su [0, 2\pi]$

36) $y = \operatorname{sen} x + x$

37) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \quad su [0, 2\pi]$

38) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$

39) $y = x \operatorname{arctg} x$

40) $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$

41) $y = \frac{|x-2|-1}{x^2}$

42) $y = \frac{x|x+2|}{2(|x|-3)}$

RISPOSTE

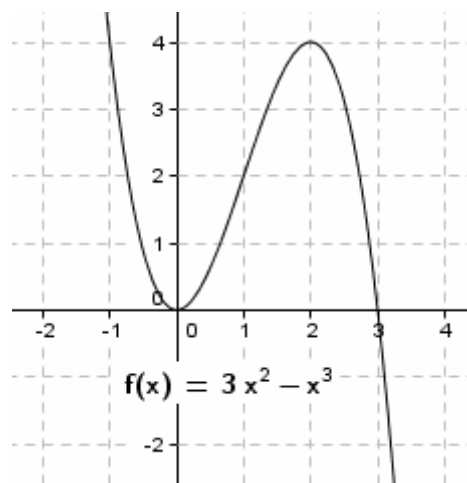
1)

$$y = 3x^2 - x^3$$

$$\text{min}(0,0);$$

$$\text{Max}(2,4);$$

$$\text{Flex}(1,2)$$



2)

$$y = x^4 - 6x^2$$

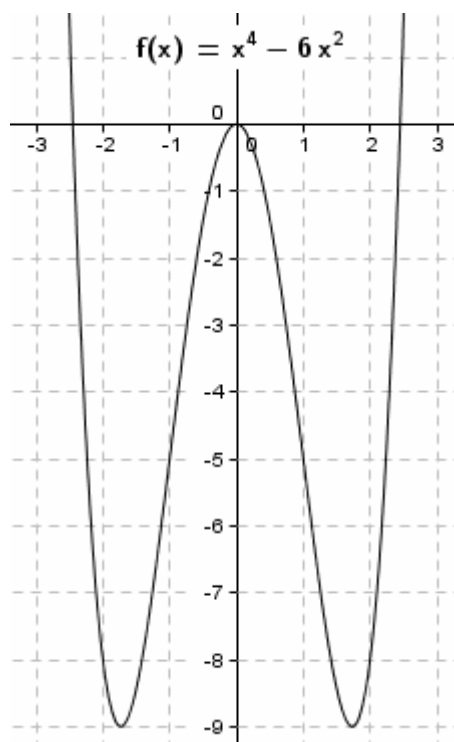
$$\text{min}_1(-\sqrt{3}, -9);$$

$$\text{Max}(0,0);$$

$$\text{min}_2(\sqrt{3}, -9);$$

$$\text{Flex}_1(-1, -5);$$

$$\text{Flex}_2(1, -5)$$



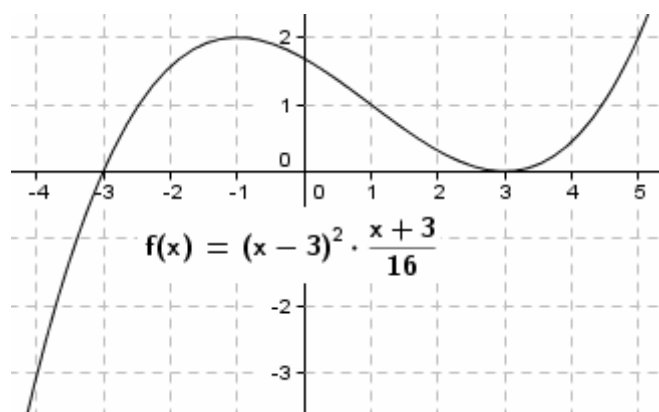
3)

$$y = \frac{1}{16}(x-3)^2(x+3)$$

$$\text{Max}(-1,2);$$

$$\text{min}(3,0);$$

$$\text{Flex}(1,1)$$



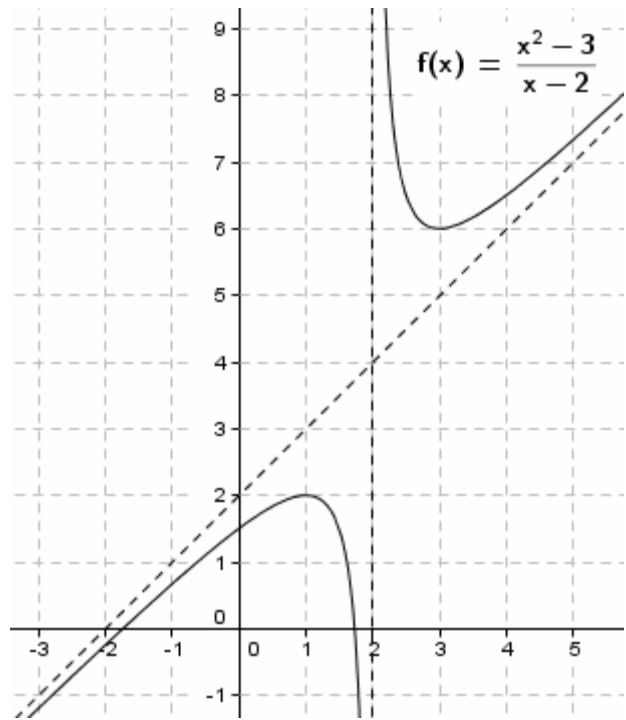
4)

$$y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

$Max(1, 2);$

$min(3, 6);$

$asintoti\ x = 2, y = x + 2$



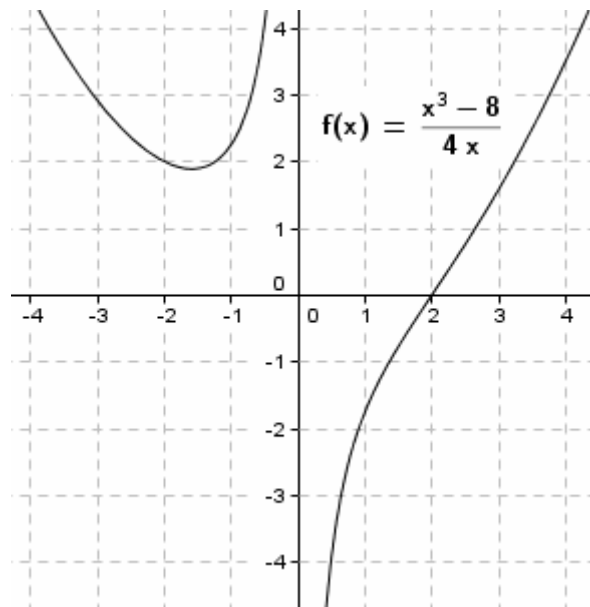
5)

$$y = \frac{x^3 - 8}{4x}$$

$min_1\left(-\sqrt[3]{4}, \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right);$

$Flex(2, 0);$

$asintoto : x = 0$

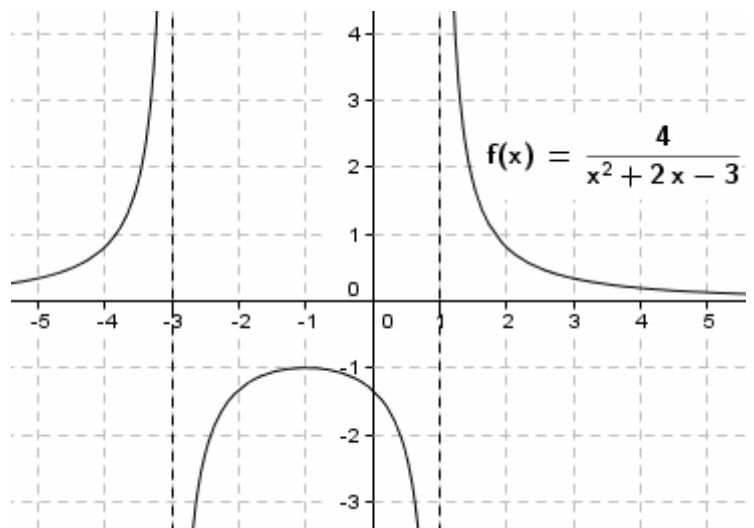


6)

$$y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$$

$Max(-1, -1);$

$asintoti : x = -3, x = 1, y = 0$



7)

$$y = \frac{3x^2 - 3}{x^3}$$

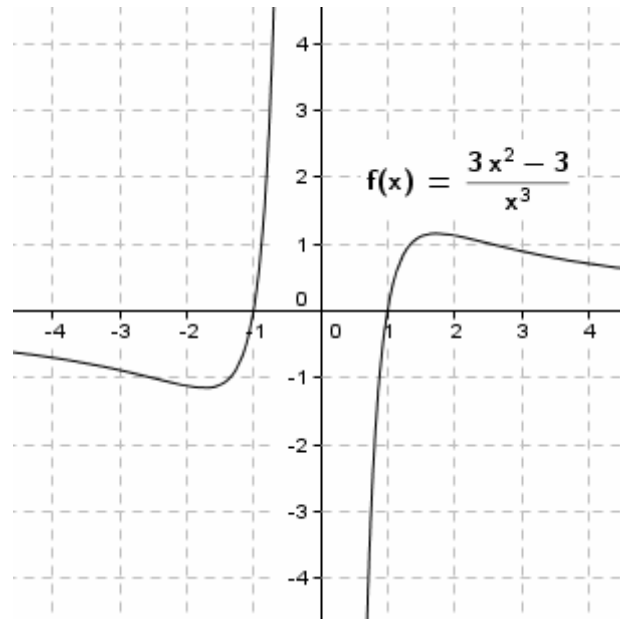
$$\min\left(-\sqrt{3}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right);$$

$$\text{Max}\left(\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right);$$

$$\text{Flex}_1\left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{2\sqrt{6}}\right);$$

$$\text{Flex}_2\left(\sqrt{6}, \frac{5}{2\sqrt{6}}\right);$$

$$\text{asintoti: } x=0, y=0$$



8)

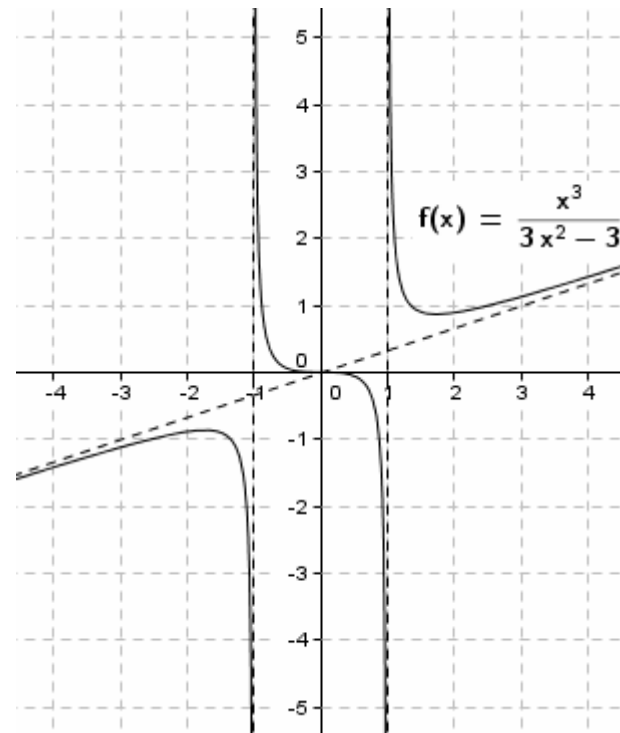
$$y = \frac{x^3}{3x^2 - 3}$$

$$\text{Max}\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\min\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\text{Flex}(0, 0);$$

$$\text{asintoti: } x = -1, x = 1, y = \frac{1}{3}x$$



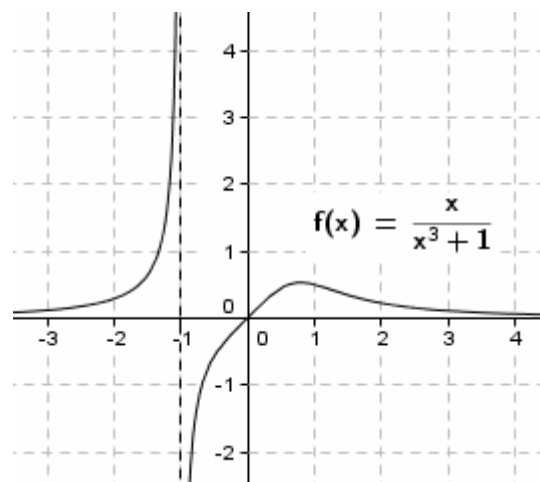
9)

$$y = \frac{x}{x^3 + 1}$$

$$\text{Max}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right);$$

$$\text{Flex}\left(\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right);$$

$$\text{asintoti: } x = -1, y = 0$$



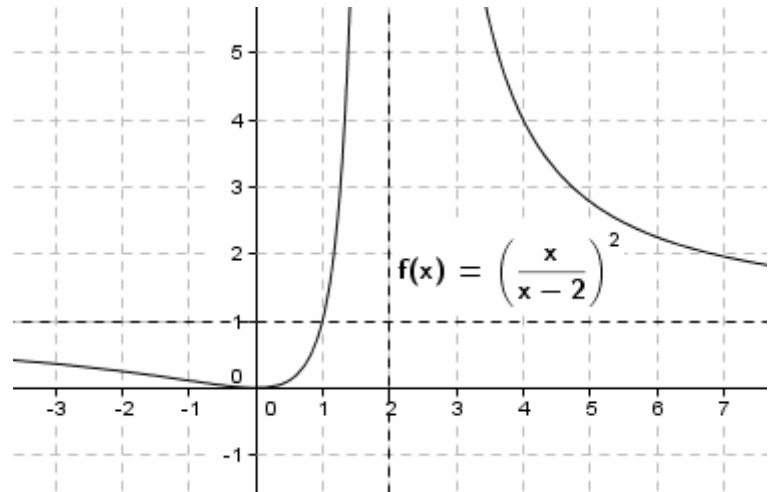
10)

$$y = \left(\frac{x}{x-2} \right)^2$$

$$\min(0,0);$$

$$\text{Flex}\left(-1, \frac{1}{9}\right);$$

$$\text{asintoti} : x = 2, y = 1$$



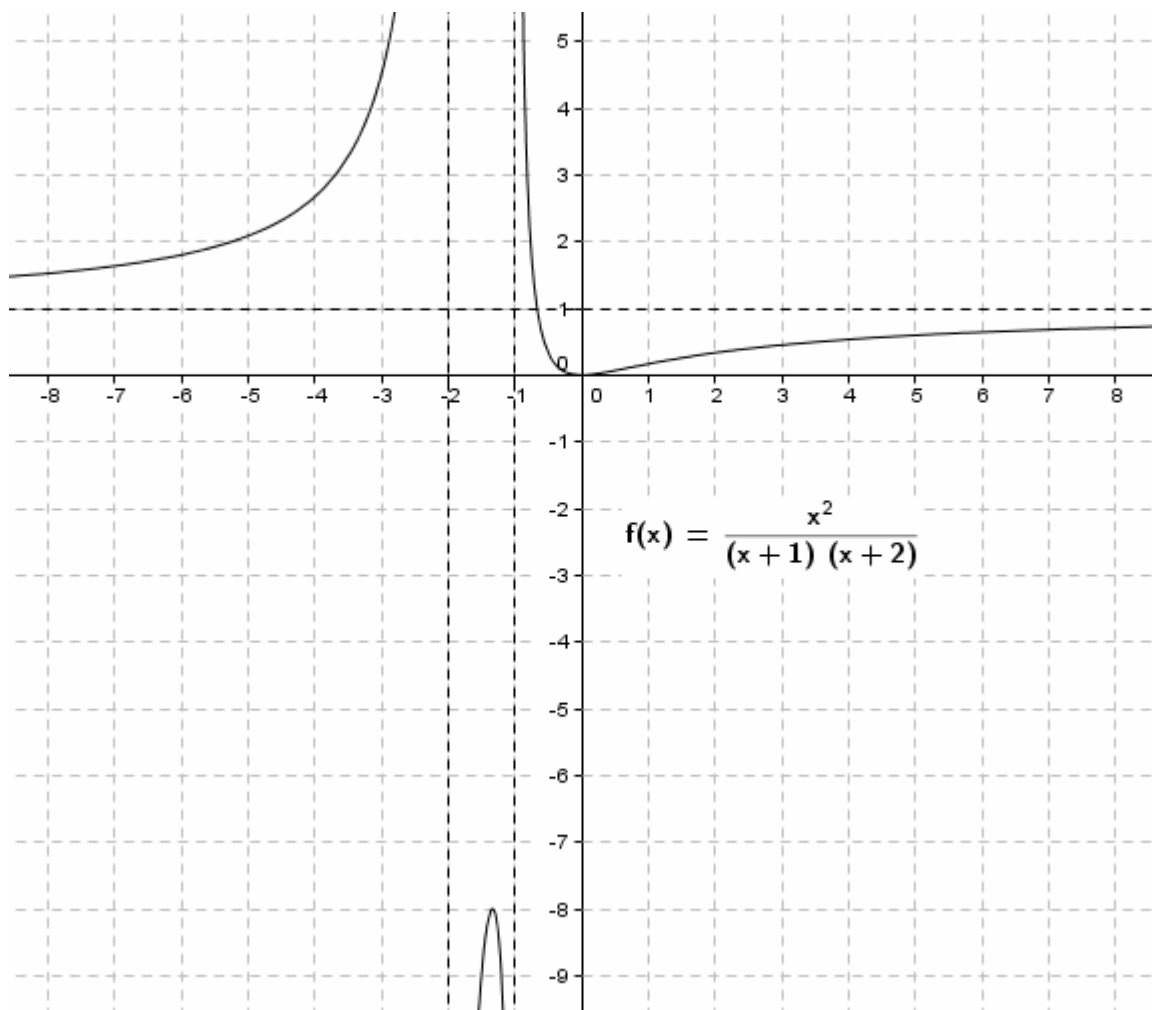
11)

$$y = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$$

$$\text{Max}\left(-\frac{4}{3}, -8\right); \min(0,0); \text{asintoti} : x = -2, x = -1, y = 1$$

C'è un flesso, la cui ascissa vale circa 0.7; lo si può localizzare risolvendo graficamente l'equazione

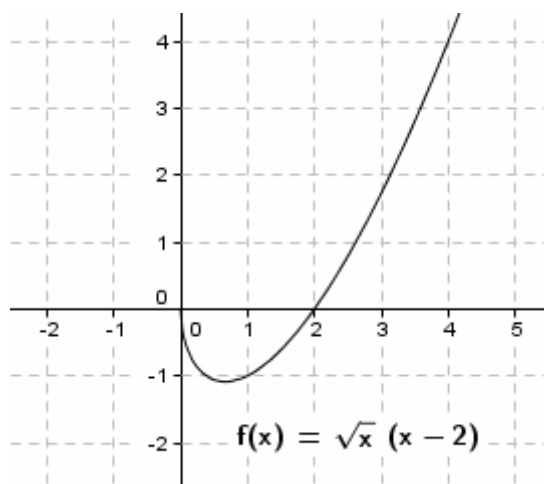
$$3x^3 + 6x^2 - 4 = 0 \text{ ossia } x^3 = -2x^2 + \frac{4}{3}$$



12)

$$y = \sqrt{x}(x-2)$$

$$\min\left(\frac{2}{3}, -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$$

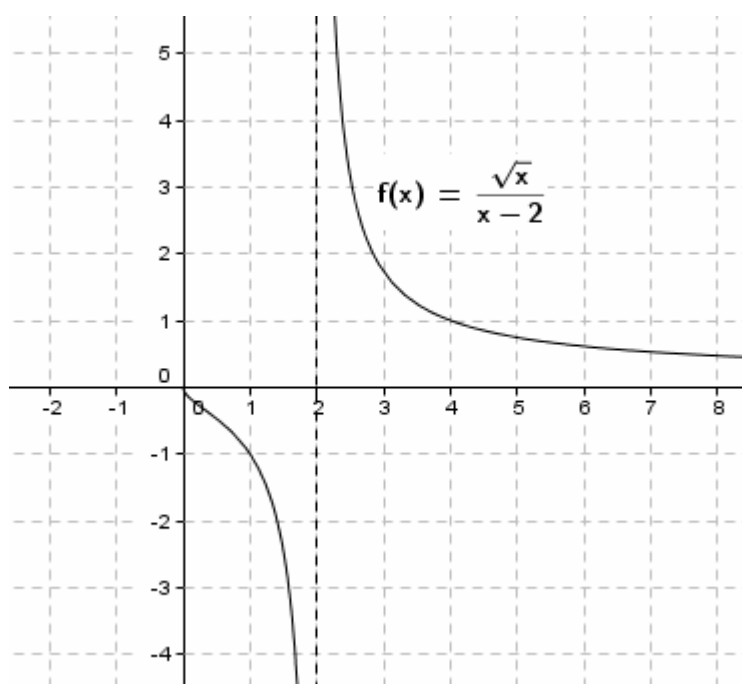


13)

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

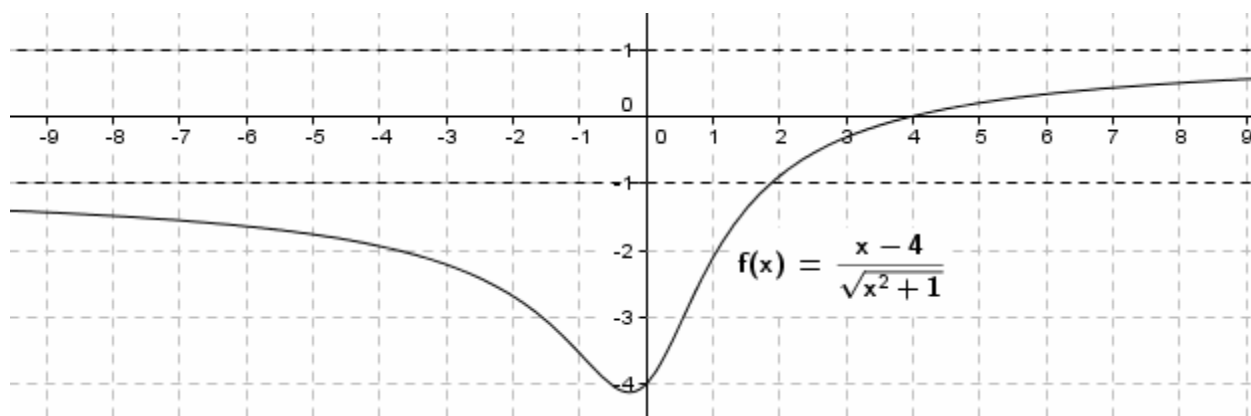
Flesso di ascissa $\frac{-6+4\sqrt{3}}{3}$;

asintoti : $x=2, y=0$



14)

$$y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+1}} \quad \min\left(-\frac{1}{4}, -\sqrt{17}\right); \quad \text{asintoti} : y = \pm 1; \quad \text{due flessi di ascisse } \frac{-3 \pm \sqrt{137}}{16}$$

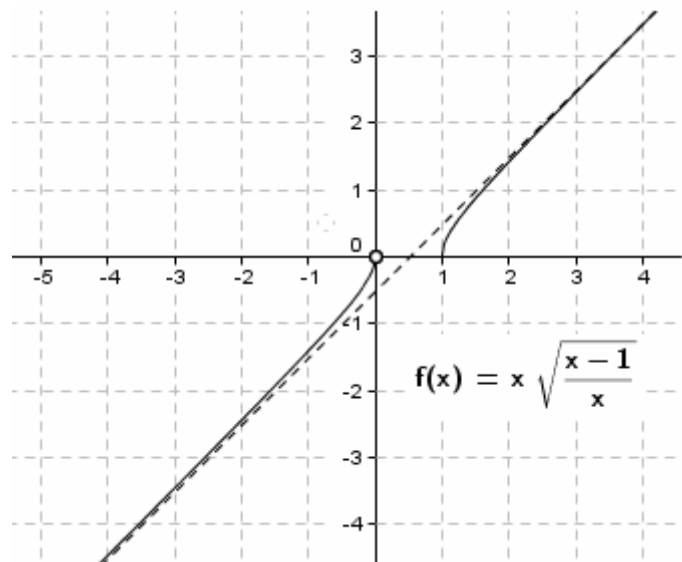


15)

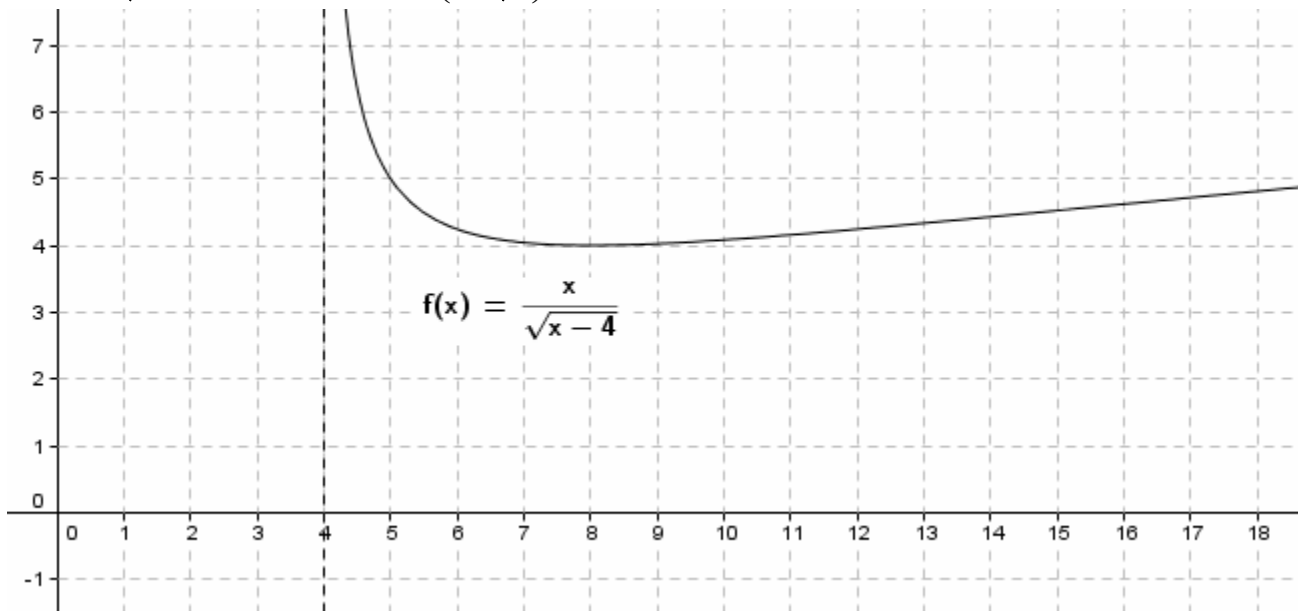
$$y = x \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$\text{Asintoto: } y = x - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^-$$



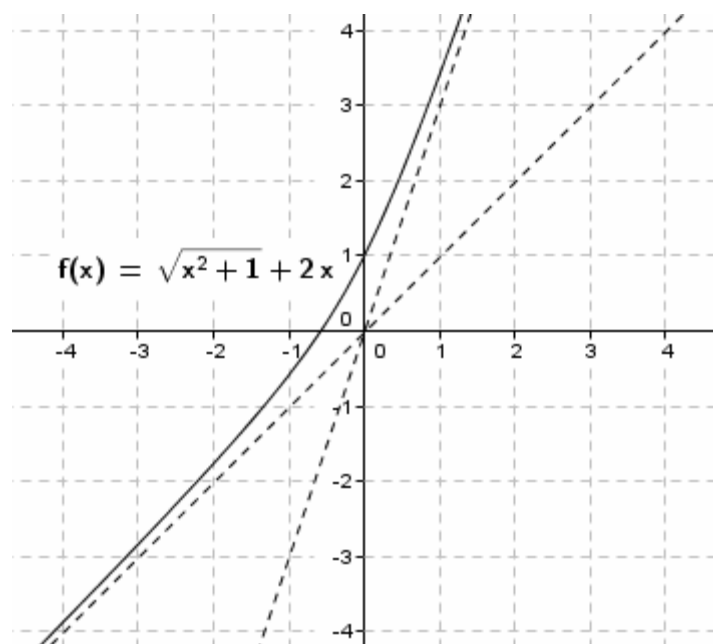
$$16) \quad y = \frac{x}{\sqrt{x-4}} \quad \min(8,4); \quad \text{flex}\left(16, \frac{8}{\sqrt{3}}\right); \quad \text{asintoto: } x = 4$$



17)

$$y = \sqrt{x^2 + 1} + 2x$$

$$\text{Asintoti: } y = 3x, \quad y = x$$

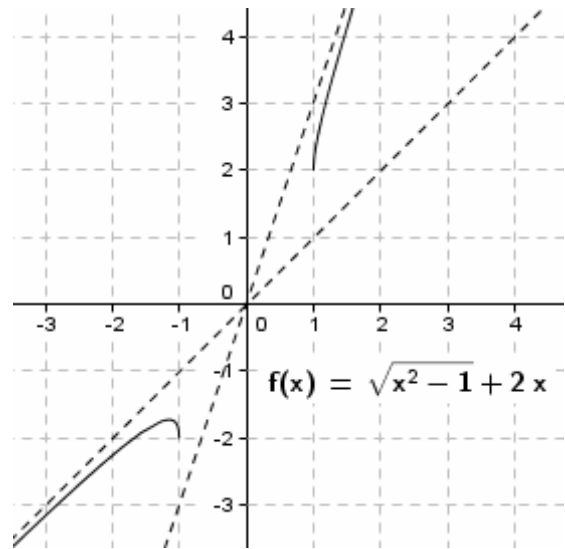


18)

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + 2x$$

$$\text{Max} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3} \right);$$

asintoti: $y = 3x$, $y = x$

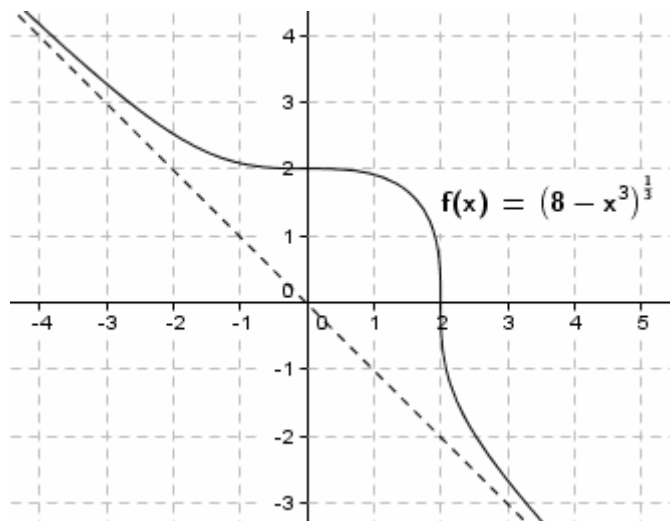


19)

$$y = \sqrt[3]{8 - x^3}$$

Flessi: $(0, 2)$ orizzontale, $(2, 0)$ verticale;

asintoto $y = -x$

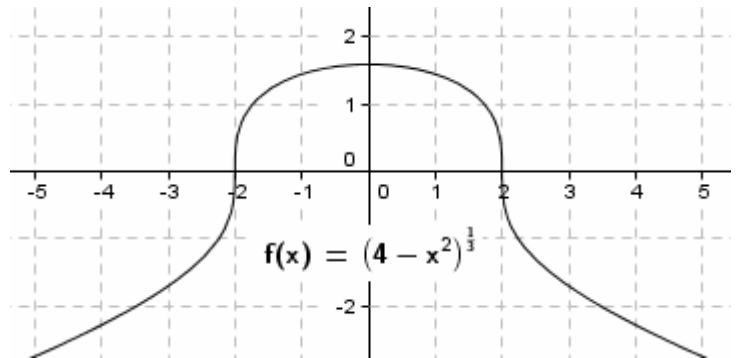


20)

$$y = \sqrt[3]{4 - x^2}$$

$$\text{Max} \left(0, \sqrt[3]{4} \right);$$

due flessi verticali in $(-2, 0)$ e $(2, 0)$



21)

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

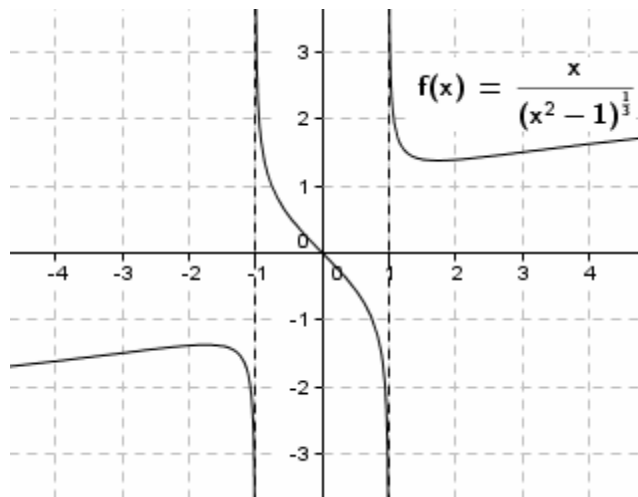
$$\text{Max} \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \right); \text{min} \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \right);$$

Flex₁ $(0, 0)$;

Flex₂ $\left(-3, -\frac{3}{2} \right)$;

Flex₃ $\left(3, \frac{3}{2} \right)$;

asintoti: $x = \pm 1$



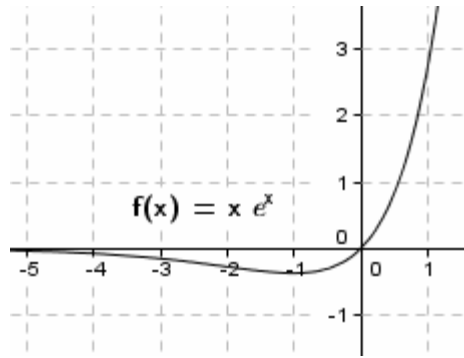
22)

$$y = xe^x$$

$$\min\left(-1 - \frac{1}{e}\right);$$

$$\text{Flex}\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right);$$

$$\text{asintoto} : y = 0$$



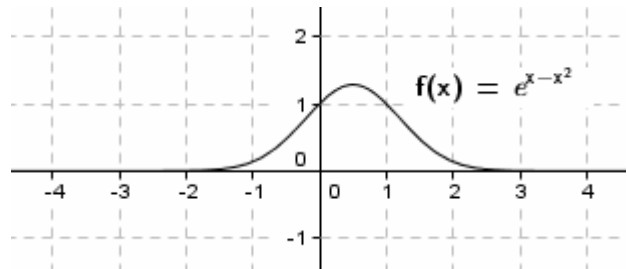
23)

$$y = e^{x-x^2}$$

$$\text{Max}\left(\frac{1}{2}, \sqrt[4]{e}\right);$$

$$\text{flessi}\left(\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right);$$

$$\text{asintoto} y = 0$$



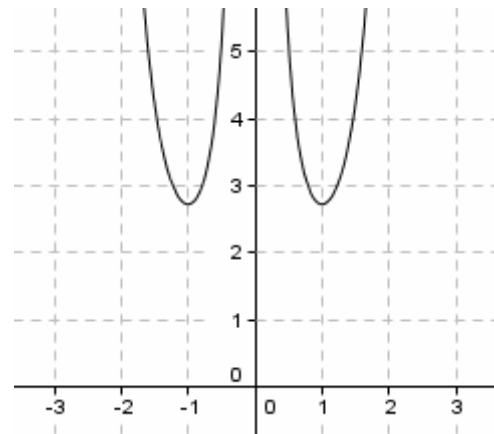
24)

$$y = \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

$$\min_1(-1, e);$$

$$\min_2(1, e);$$

$$\text{asintoto} x = 0$$



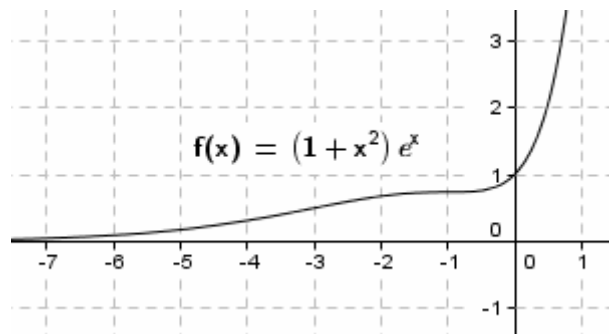
25)

$$y = (1+x^2)e^x$$

$$\text{Flex}_1\left(-3, \frac{10}{e^3}\right);$$

$$\text{Flex}_2\left(-1, \frac{2}{e}\right) \text{ (orizzontale)};$$

$$\text{asintoto} y = 0$$



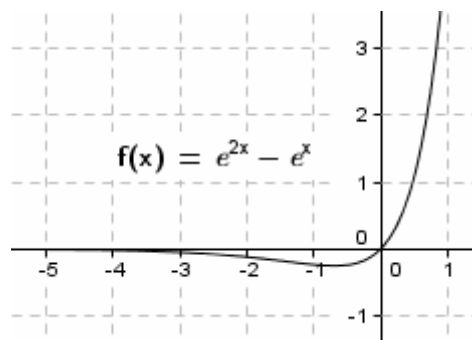
26)

$$y = e^{2x} - e^x$$

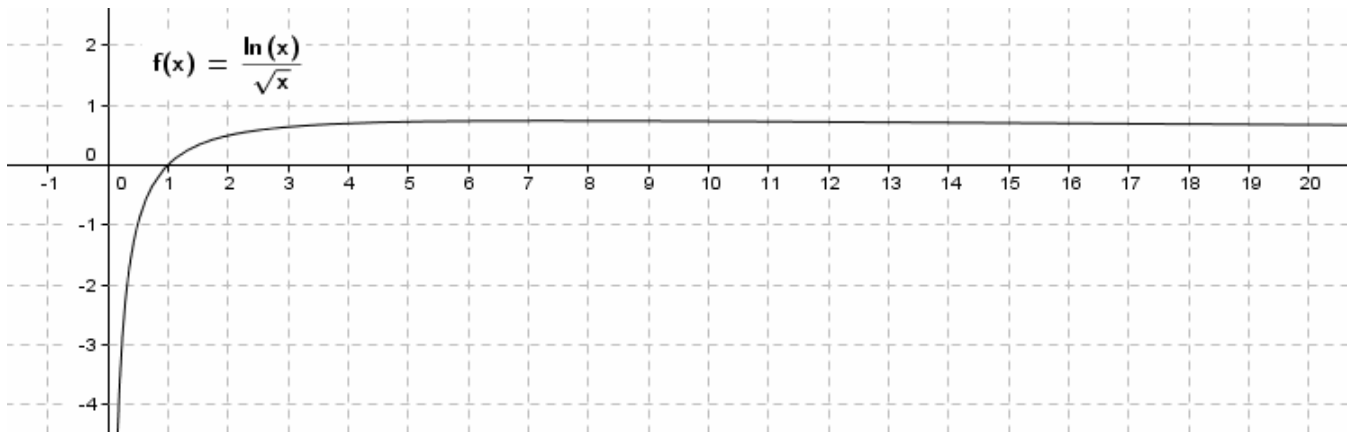
$$\min\left(-\ln 2, -\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{Flex}\left(-2\ln 2, -\frac{3}{16}\right)$$

$$\text{asintoto} y = 0$$



27) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\text{Max}\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$; $\text{Flex}\left(e^2 \sqrt[3]{e^2} \approx 14.39, \frac{8}{3e\sqrt[3]{e}} \approx 0.70\right)$; *asintoti* $x=0, y=0$



28)

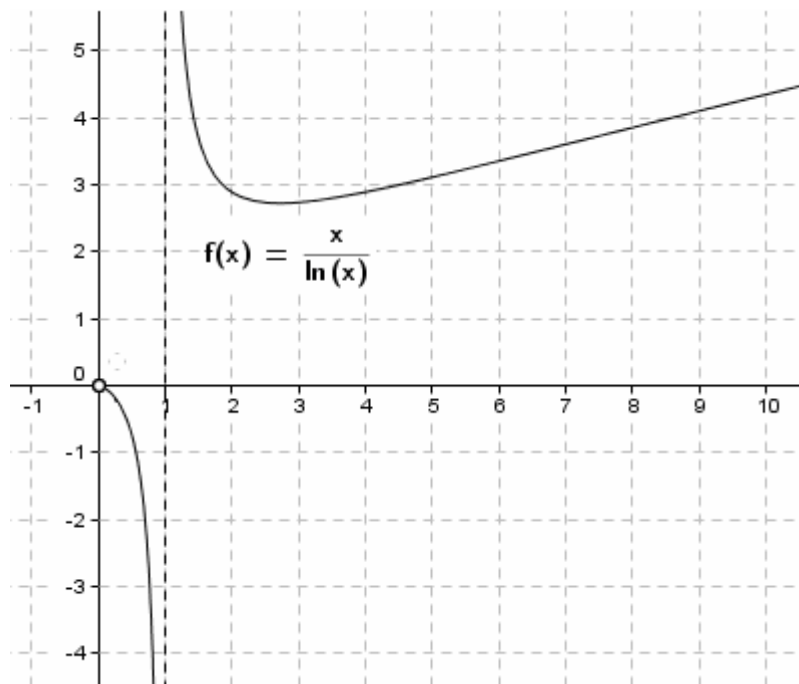
$$y = \frac{x}{\ln x}$$

$$\min(e, e);$$

$$\text{Flex}\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right);$$

$$\text{asintoto} : x = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$



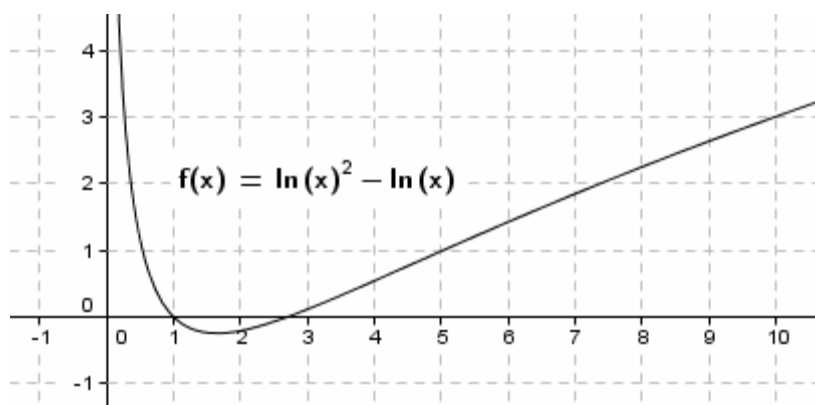
29)

$$y = \ln^2 x - \ln x$$

$$\min\left(\sqrt{e}, -\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{Flex}\left(e\sqrt{e}, \frac{3}{4}\right);$$

$$\text{asintoto} : x = 0$$



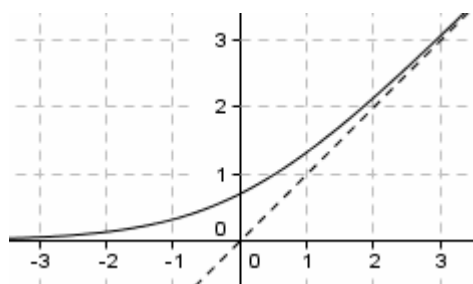
30)

$$y = \ln(1 + e^x)$$

Asintoti :

$$y = 0 \text{ (a sinistra),}$$

$$y = x \text{ (a destra)}$$



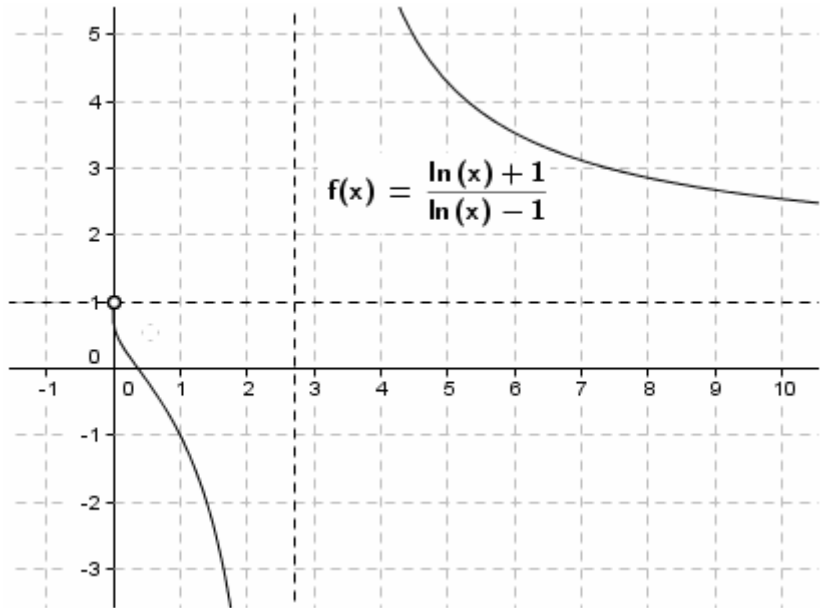
31)

$$y = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$$

$$\text{Flex} \left(\frac{1}{e}, 0 \right);$$

Asintoti: $x = e$, $y = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$



32)

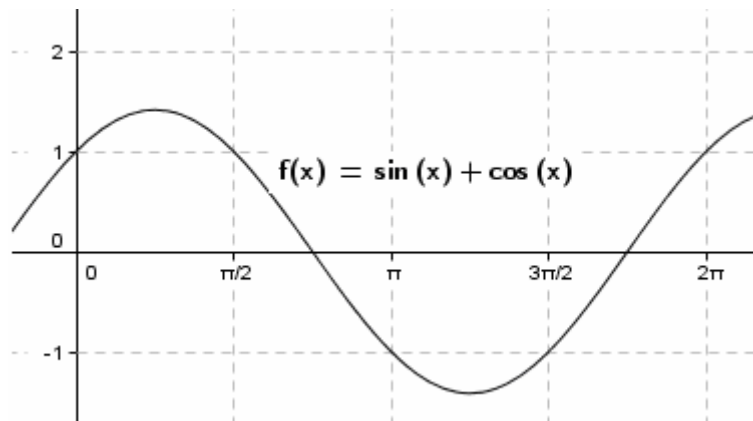
$$y = \sin x + \cos x \text{ su } [0, 2\pi]$$

$$\text{Max} \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right);$$

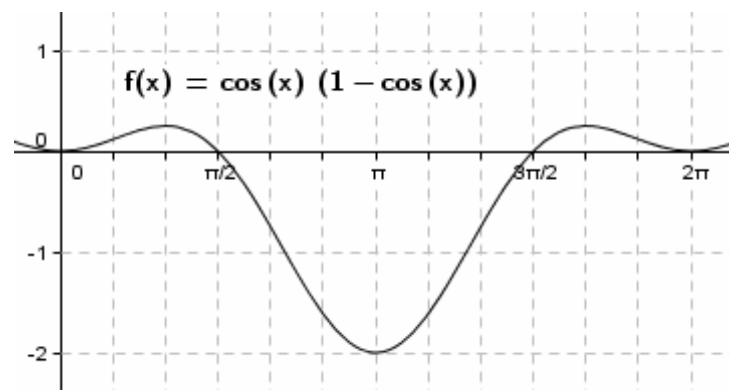
$$\text{min} \left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2} \right);$$

$$\text{Flex}_1 \left(\frac{3}{4}\pi, 0 \right);$$

$$\text{Flex}_2 \left(\frac{7}{4}\pi, 0 \right)$$



33)



$$y = \cos x(1 - \cos x) \text{ su } [0, 2\pi]$$

$$\text{Max}_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right);$$

$$\text{Max}_2\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{1}{4}\right);$$

$$\text{min}_1(0, 0);$$

$$\text{min}_2(\pi, -2);$$

$$\text{min}_3(2\pi, 0);$$

4 flessi, di ascisse

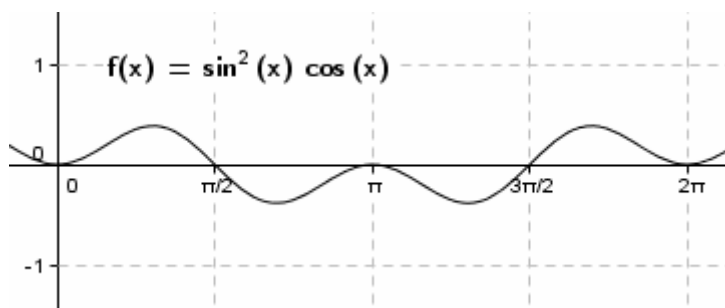
$$\arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8},$$

$$\arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8},$$

$$2\pi - \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8},$$

$$2\pi - \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$$

34)



$$y = \operatorname{sen}^2 x \cos x \quad \text{su } [0, 2\pi]$$

$$\min_1(0,0)$$

$$\operatorname{Max}_1\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right);$$

$$\min_2\left(\pi - \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right);$$

$$\operatorname{Max}_2(\pi,0);$$

$$\min_3\left(\pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right);$$

$$\operatorname{Max}_3\left(2\pi - \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right);$$

$$\min_4(2\pi,0)$$

$$\operatorname{Flex}_1\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{7}}{27}\right);$$

$$\operatorname{Flex}_2\left(\frac{\pi}{2}, 0\right);$$

$$\operatorname{Flex}_3\left(\pi - \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{7}}{27}\right);$$

$$\operatorname{Flex}_4\left(\pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{7}}{27}\right);$$

$$\operatorname{Flex}_5\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right);$$

$$\operatorname{Flex}_6\left(2\pi - \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{7}}{27}\right)$$

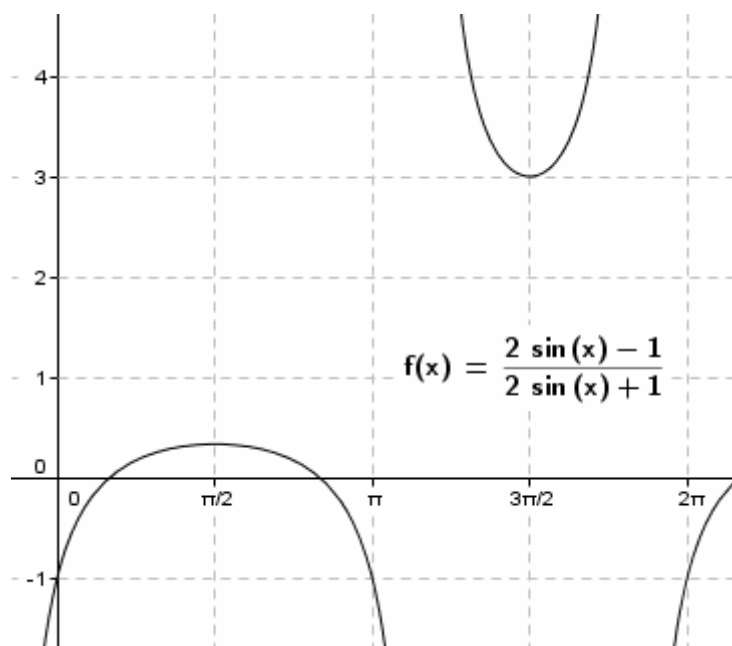
35)

$$y = \frac{2\operatorname{sen} x - 1}{2\operatorname{sen} x + 1} \quad \text{su } [0, 2\pi]$$

$$\operatorname{Max}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right);$$

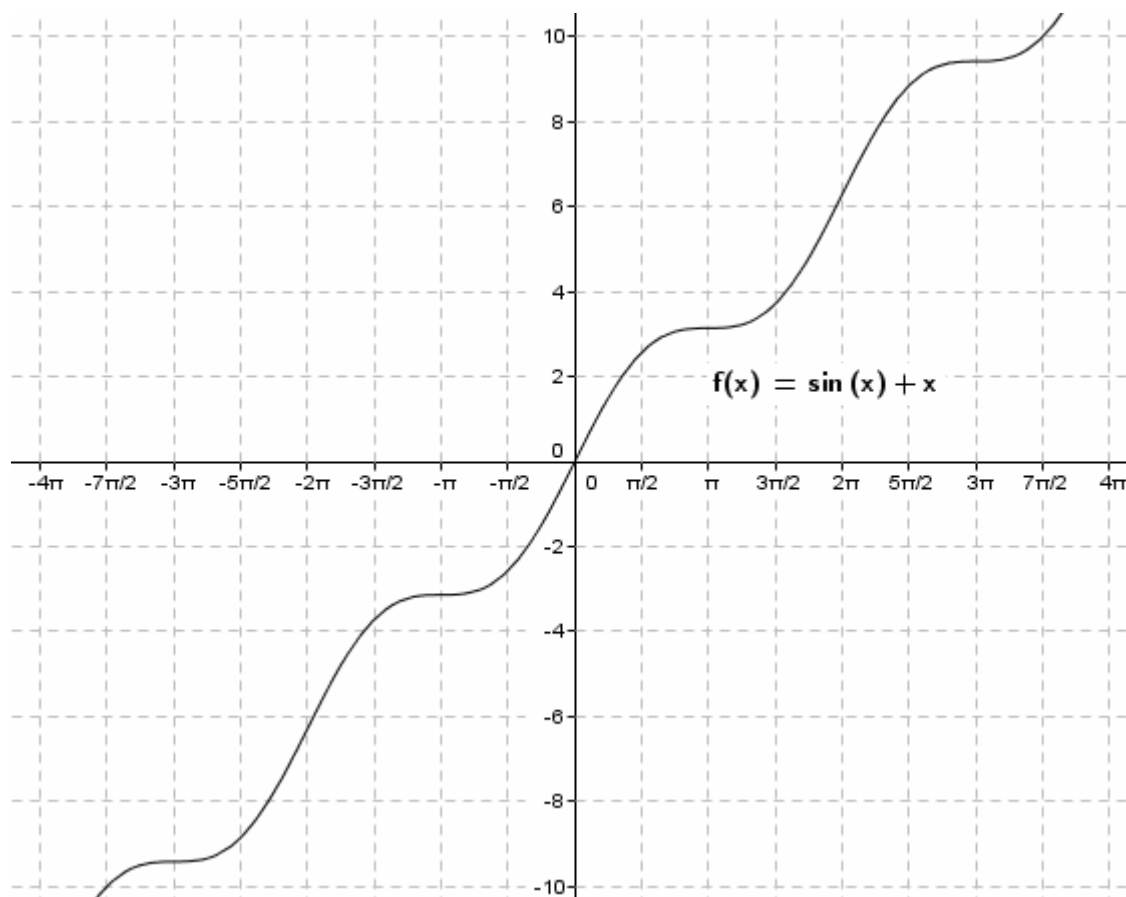
$$\min\left(\frac{3}{2}\pi, 3\right);$$

$$\text{asintoti} : x = \frac{7}{6}\pi, x = \frac{11}{6}\pi$$



36) $y = \sin x + x$

Questa funzione non è periodica; i suoi punti di flesso sono quelli di ascisse $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

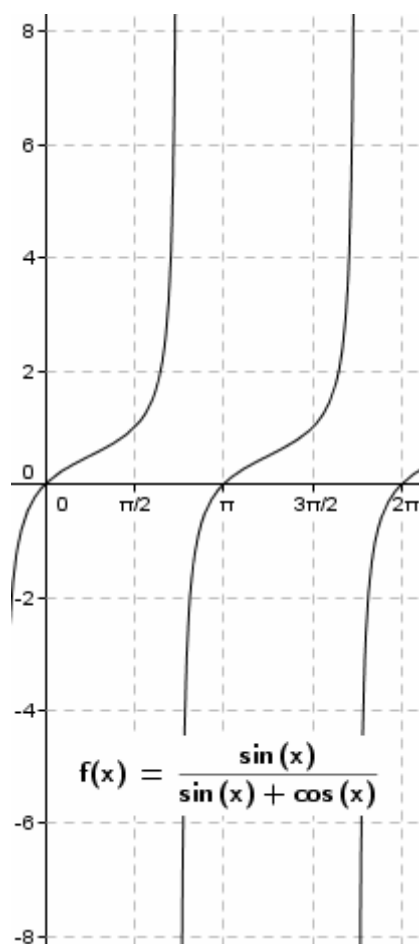


37)

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \quad \text{su } [0, 2\pi]$$

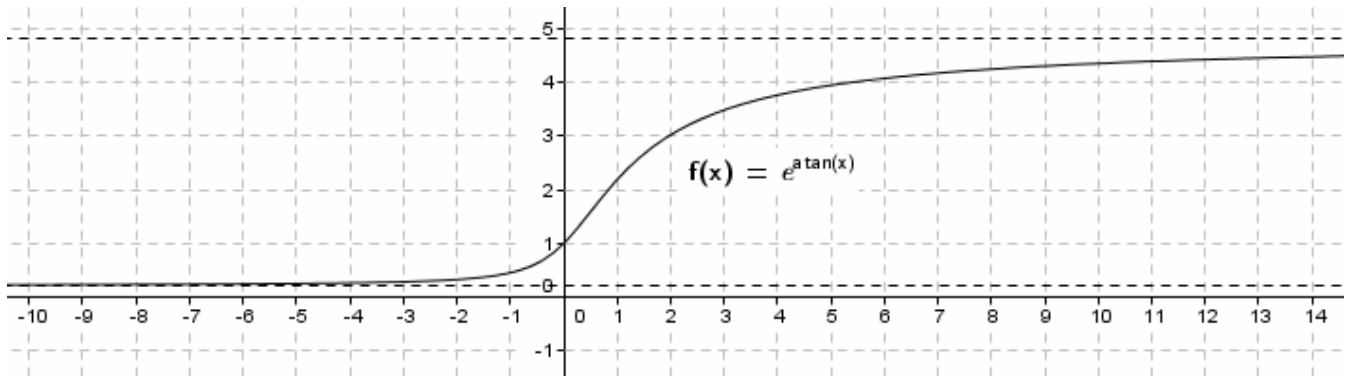
$$\text{Flessi: } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2}\right);$$

$$\text{asintoti: } x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$$



38)

$$y = e^{\operatorname{arctg} x} \text{ su } [0, 2\pi] \quad \text{Flex} \left(\frac{1}{2}, e^{\operatorname{arctg} 0.5} \approx 1.59 \right); \quad \text{asintoti: } y = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.21 \text{ (sinistro)}, y = e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.81 \text{ (destra)}$$



39)

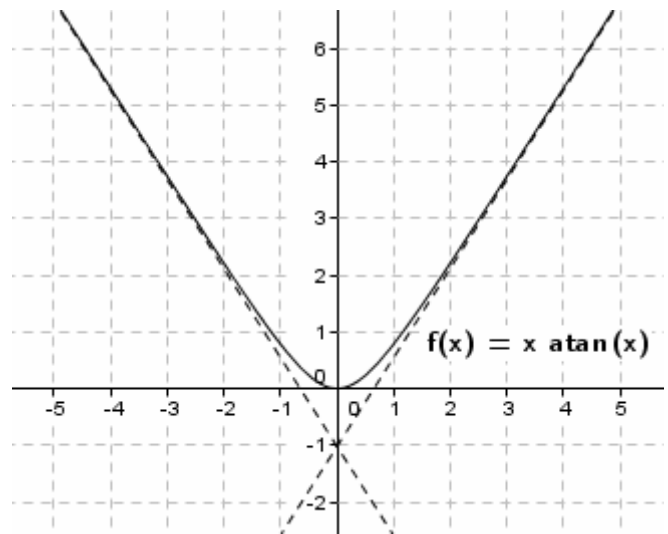
$$y = x \operatorname{arctg} x$$

$$\min(0, 0);$$

asintoti :

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1 \text{ (sinistro)}$$

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1 \text{ (destra)}$$



40)

$$y = x - 2 \operatorname{arctg} x$$

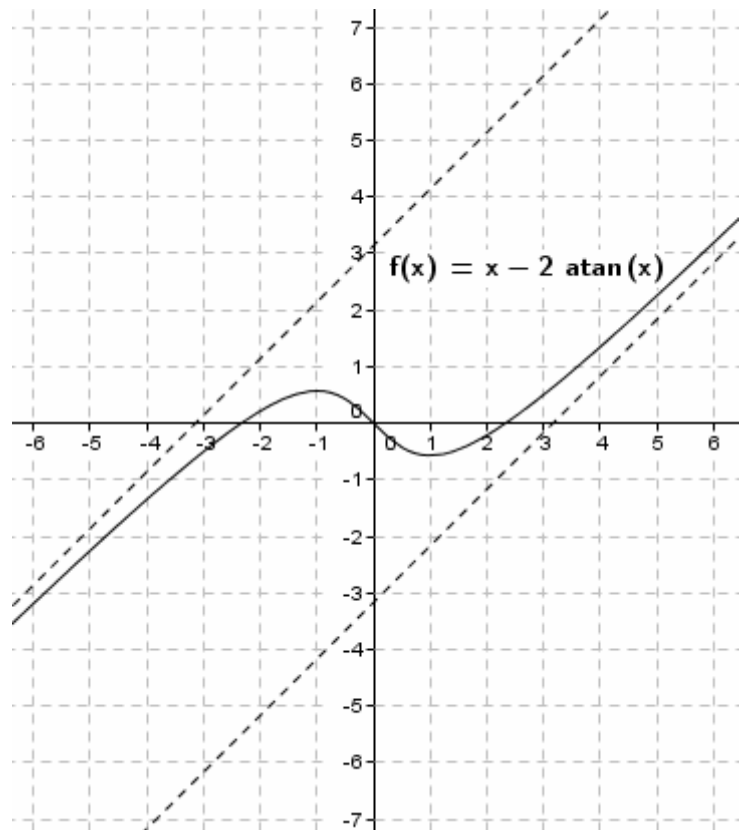
$$\operatorname{Max} \left(-1, \frac{\pi}{2} - 1 \right);$$

$$\operatorname{min} \left(1, 1 - \frac{\pi}{2} \right);$$

asintoti :

$$y = x + \pi \text{ (sinistro)}$$

$$y = x - \pi \text{ (destra)}$$



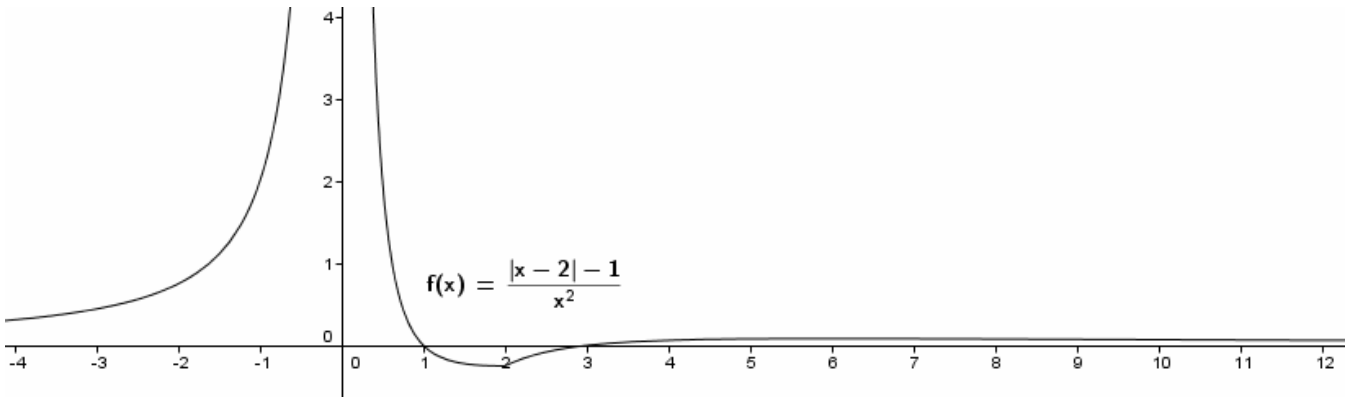
41)

$$y = \frac{|x-2|-1}{x^2}$$

$$\min\left(2, -\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{Max}\left(6, \frac{1}{12}\right);$$

asintoti : $x = 0, y = 0$



42)

$$y = \frac{x|x+2|}{2(|x|-3)}$$

$$\text{Max}_1(-3-\sqrt{3}, -2-\sqrt{3});$$

$$\min_1(-2, 0);$$

$$\text{Max}_2(-3+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3});$$

$$\min_2(3+\sqrt{15}, 4+\sqrt{15});$$

asintoti :

$$x = \pm 3;$$

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2};$$

$$x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

