## 1.2 IL TEOREMA DI ROLLE

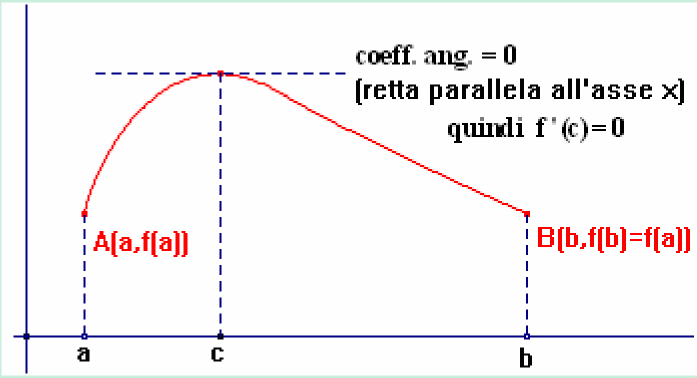
**TEOREMA DI ROLLE**
*Michel Rolle, francese, 1652-1719*

**Ipotesi**

- **$f$ continua su [a,b]**
- **$f$ derivabile perlomeno su (a,b)**
- **$f(a) = f(b)$**

**Tesi**

**Esiste almeno un punto c in (a,b) tale che**
$$\boxed{f'(c) = 0}$$




**Giustificazione con l'intuizione geometrica**

La curva grafico della funzione, partendo dal punto $A(a, f(a))$,
si snoda con continuità, senza interruzioni, fino ad approdare nel punto $B(b, f(b))$.
Ma A e B hanno la stessa ordinata (infatti per ipotesi è $f(a) = f(b)$);
quindi, **se il grafico parte da A in salita (o, rispettivamente, in discesa),
per poter giungere a B, che si trova alla stessa "altezza" di A,
dovrà prima o poi ridiscendere (risalire)
e nel cambiare la "direzione di marcia" sarà obbligato a toccare un massimo (minimo),
nel quale la retta tangente sarà orizzontale e quindi la derivata sarà nulla.**

**Dimostrazione rigorosa**

Sia $f$ continua su [a, b], derivabile perlomeno su (a, b), e tale che $f(a) = f(b)$.
Per il teorema di Weierstrass, $f$ ammette, su [a, b], minimo assoluto m e massimo assoluto M.

- Se è m = M, allora $f$ è costante su tutto [a, b], quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x$ di [a, b] e la tesi è vera.
- Se è m ≠ M, allora almeno uno dei due valori m, M deve essere distinto dal valore $f(a) = f(b)$;
  quindi, dovrà essere assunto dalla $f$ in corrispondenza di un'ascissa c diversa sia da a che da b (a<c<b).

  Dico ora che $f'(c) = 0$.

  Supponiamo, per meglio fissare le idee, che c sia il punto di MINIMO assoluto:
  $f(c) = m$, ossia: $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq m = f(c)$ (analogo sarebbe il ragionamento nel caso $f(c) = M$)

  - Se costruiamo il rapporto incrementale DESTRO in c, avremo: $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$
    perché, su tutto [a, b], è $f(x) \geq f(c)$ quindi $f(x) - f(c) \geq 0$,
    e inoltre, essendo $x$ alla *destra* di c ($x > c$), sarà pure $x - c > 0$.
  - Se invece costruiamo il rapporto incrementale SINISTRO in c, avremo: $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$
    perché, su tutto [a, b], è $f(x) \geq f(c)$ quindi $f(x) - f(c) \geq 0$,
    ma, essendo questa volta $x$ alla *sinistra* di c ($x < c$), sarà $x - c < 0$.

  Ora l'ipotesi ci dice che $f$ è derivabile su tutto (a, b) quindi anche in c;
  pertanto i due rapporti incrementali destro e sinistro in c dovranno tendere allo stesso limite
  ( la derivata $f'(c)$ ) quando si fa tendere $x$ a c: $\lim\limits_{x \to c+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$

  Essendo, come abbiamo visto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ quando $x > c$ e $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ quando $x < c$,

  dovrà necessariamente essere $\lim\limits_{x \to c+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ e $\lim\limits_{x \to c-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

  Ora, **tali due limiti, in considerazione dei loro segni,
  possono essere uguali soltanto se entrambi nulli**.

  **Con ciò resta provato che $f'(c) = 0$, cioè la tesi.**

**ESERCIZI sul teorema di Rolle (risposte alla fine)**

**1)** Considera la funzione $y = x^3 - x$ sull'intervallo [0,1].

a) Dopo aver controllato che esistono le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa $c$ di cui il teorema assicura l'esistenza.

b) Traccia infine il "grafico probabile" della funzione (su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$), *tenendo anche conto dei punti in cui hai stabilito che la derivata si annulla (in questi punti la retta tangente dovrà essere orizzontale!).*

**2)** Considera la funzione $y = \sqrt{1-x^2}$ sull'intervallo $[-1, 1]$

a) Dopo aver controllato che esistono (appena appena!) le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa $c$ di cui il teorema assicura l'esistenza.

b) Grafico probabile.

**3)** Considera la funzione $y = x^4 - 2x^2$ sull'intervallo $[-3, 3]$

a) Dopo aver controllato che sussistono le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa $c$ di cui il teorema assicura l'esistenza.

b) Grafico probabile della funzione (su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$).

**4)** Spiega perché Rolle non è applicabile alla funzione $y = |x|$ su $[-1; 1]$

**5)** Determina il valore del parametro $k$ in modo che alla funzione $y = \dfrac{kx-1}{x^2-3}$ sia applicabile Rolle su [2;4]

a) Determina poi l'ascissa $c$ in (2,4) tale che $f'(c) = 0$

b) Spiega perché non avrebbe avuto senso, per nessun valore di $k$, applicare Rolle su [0;2]

c) Grafico probabile (su tutto il dominio).

**6)** a) Applica Rolle alla funzione $y = sen\,x - \cos x$, su $[0, 2\pi]$ verificando che di punti $c$ tali che $f'(c) = 0$ ce n'è più d'uno.

b) Traccia il grafico probabile della funzione su $[0, 2\pi]$, costruendolo per differenza di ordinate.

**7)** Considera la funzione $f(x) = 3\sqrt{x} - x$

a) Determina il secondo estremo di un intervallo, il cui primo estremo sia 1, sul quale sia possibile applicare alla $f(x)$ il teorema di Rolle.

b) Successivamente, determina in tale intervallo l'ascissa $c$ in cui $f'(c) = 0$.

c) Grafico probabile della funzione (su tutto il dominio).

**RISPOSTE**

1) $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2) $c = 0$; dico che le condizioni per l'applicabilità del Teorema di Rolle sussistono "appena appena" perché la funzione non è derivabile agli estremi dell'intervallo.

3) Ben 3 possibili valori di $c$: $-1,\ 0,\ +1$

4) Rolle non è applicabile in questo caso, perché la funzione non è derivabile su tutto $(-1, 1)$: infatti ha derivata sinistra e destra distinte ("punto angoloso") in $x = 0$.

5) a) $k = \dfrac{6}{11}$ b) $c = \dfrac{11+\sqrt{13}}{6} \simeq 2.434$ c) perché la funzione non è definita su tutto [0;2]: il dominio si interrompe in $x = \pm\sqrt{3}$, e $0 < \sqrt{3} < 2$.

6) $c_1 = \dfrac{3}{4}\pi$ , $c_2 = \dfrac{7}{4}\pi$

7) L'altro estremo è 4; $c = \dfrac{9}{4}$