1.4 Il TEOREMA (MEGLIO: I TEOREMI) DI DE L'HOPITAL

Teorema (PRIMO TEOREMA DI DE L'HOPITAL)
Guillaume de l'Hôpital, francese, 1661-1704

Sia I_c un intorno di $c \in \mathbb{R}$, e siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite e derivabili su tutto $I_c - \{c\}$
(non è necessario fare alcuna ipotesi sul comportamento delle due funzioni IN c,
dove, addirittura, l'una o l'altra o entrambe le funzioni potrebbero persino non essere definite).

Sia inoltre $\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0}$

cosicché il calcolo del limite $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenti come forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Supponiamo infine che sia $\boxed{g'(x) \neq 0}$ su tutto $\boxed{I_c - \{c\}}$.

Bene!

Il teorema di cui ci occupiamo dice che, ***sotto le ipotesi di cui sopra***,

SE $\boxed{\textbf{\textit{ESISTE il}} \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$***, ALLORA ESISTE pure il*** $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ ***E COINCIDE col precedente,***

ossia risulta

$$\boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Esempio 1 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{sen(\pi x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{\pi \cos(\pi x)} = -\frac{3}{\pi}$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:
la catena appena scritta ha senso perché il secondo dei due limiti,
quello del rapporto fra le derivate, esiste …
nel caso non fosse esistito il secondo limite,
il discorso per quanto riguarda il primo limite sarebbe rimasto aperto.
Vale a dire:

quando il $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *non esiste,*

de l'Hopital non è applicabile e quindi nulla si può dire, a priori, sul $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$*;*

quest'ultimo potrà non esistere, oppure esistere finito o infinito, a seconda dei casi.

Esempio 2 $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(4x-3)}{x^2+7x-8} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{4}{4x-3}}{2x+7} = \lim_{x\to 1} \frac{4}{(4x-3)(2x+7)} = \frac{4}{9}$

Esempio 3 $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^3-3x-2} \overset{H}{=} \lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{3x^2-3} = \infty$

L'alternativa a De l'Hopital, in quest'ultimo caso, sarebbe stata
di scomporre in fattori e semplificare:
con De l'Hopital, comunque, la determinazione del limite risulta più rapida.

In pratica, il teorema considerato dice che
(se, beninteso, sono verificate determinate ipotesi)
il limite del rapporto di due funzioni,
che si presenti sotto la forma di indecisione [0/0],
è uguale al limite del rapporto fra le loro derivate!!!

Il teorema vale anche se l'intorno I_c è solo unilaterale.
E vale pure nel caso in cui *x*, anziché tendere a $c \in \mathbb{R}$, tenda a $+\infty$ oppure a $-\infty$.

IL "SECONDO TEOREMA DI DE L'HOPITAL"
Un enunciato analogo al precedente vale anche se il limite del rapporto f/g
si presenta sotto la forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Esempio 4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x+4}{3x+2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = 0^+$

Quando si cita il "Teorema di De l'Hopital" ci si vuole di norma riferire indifferentemente all'uno o all'altro dei due teoremi che abbiamo presentato, o, se si preferisce, all'unico enunciato che si otterrebbe riunendoli.

Quando il rapporto delle derivate risulta essere *ancora* una forma di indecisione $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$ è possibile applicare il Teorema di De l'Hopital una seconda volta, ed eventualmente poi una terza …

Esempio 5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2+2x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x+2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$

Il teorema di De l'Hopital si riferisce alle forme di indecisione $[0/0]$ oppure $[\infty/\infty]$;
tuttavia,

anche le forme $\boxed{[0\cdot\infty],\ [\infty-\infty]}$ **e le forme di indecisione con potenze:** $\boxed{[0^0],\ [\infty^0],\ [1^\infty]}$

possono a volte essere risolte riconducendole a $[0/0]$ oppure $[\infty/\infty]$ e poi applicando De l'Hopital.

A tale scopo, si utilizzeranno le tre identità seguenti:

1) $\boxed{f\cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}}$

(si lascerà a numeratore l'una o l'altra delle due funzioni, a seconda della convenienza)

2) $\boxed{f(x)^{g(x)}} = e^{\ln\left[f(x)^{g(x)}\right]} = \boxed{e^{g(x)\ln f(x)}}$

3) $\boxed{f-g = f\left(1-\frac{g}{f}\right) = g\left(\frac{f}{g}-1\right)}$

(si raccoglierà o l'una o l'altra delle due funzioni, a seconda della convenienza; tuttavia, di norma queste ultime formule non sono molto utili perché possono essere sostituite da procedimenti alternativi più vantaggiosi, ad esempio un banale denominatore comune)

Esempio 6 $[0\cdot\infty]$ $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0+} (-x) = 0^-$

Esempio 7 $[\infty\cdot0]$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{+e^{-x}} = 0^+$ (NOTA)

NOTA: Verifica tu che lasciando a numeratore l'esponenziale, cioè passando a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1/x^2}$ … *… il tentativo di applicare de l'Hopital sarebbe fallito ☹ perché avrebbe portato ad espressioni via via più complicate rispetto a quella di partenza.*

Esempio 8 $[0^0]$ $L = \lim\limits_{x\to0+} (sen\,x)^x = \lim\limits_{x\to0+} e^{\ln(sen\,x)^x} = \lim\limits_{x\to0+} e^{x\cdot\ln sen\,x}$

e dopo questi passaggi preliminari, andremo a calcolare il limite della funzione ad esponente riconducendoci ad un quoziente "trattabile" con De l'Hopital:

$$\lim_{x\to0+}(x\cdot\ln sen\,x) = \lim_{x\to0+}\frac{\ln sen\,x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0+}\frac{\frac{\cos x}{sen\,x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0+}\left(-\frac{x^2\cos x}{sen\,x}\right) = -\lim_{x\to0+}\underbrace{\boxed{\frac{x}{sen\,x}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\boxed{x}}_{\to 0+}\cdot\underbrace{\boxed{\cos x}}_{\to 1} = 0^-$$

In definitiva, tornando all'esercizio iniziale, avremo $L = \lim\limits_{x\to0+} (sen\,x)^x = \lim\limits_{x\to0+} e^{\overbrace{x\cdot\ln sen\,x}^{\to0}} = 1$