

VERSO LA DIMOSTRAZIONE - Un'interpretazione geometrica del teorema di De l'Hopital

La figura qui sotto riportata vuole suggerire un'interpretazione geometrica molto suggestiva del Teorema di De l'Hopital.

Proponiamoci di calcolare
il limite seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Tale limite si presenta
sotto la forma di indecisione $[0/0]$:
c'è dunque un **"conflitto"**

fra la funzione a denominatore,
che col suo tendere a zero
"vorrebbe"

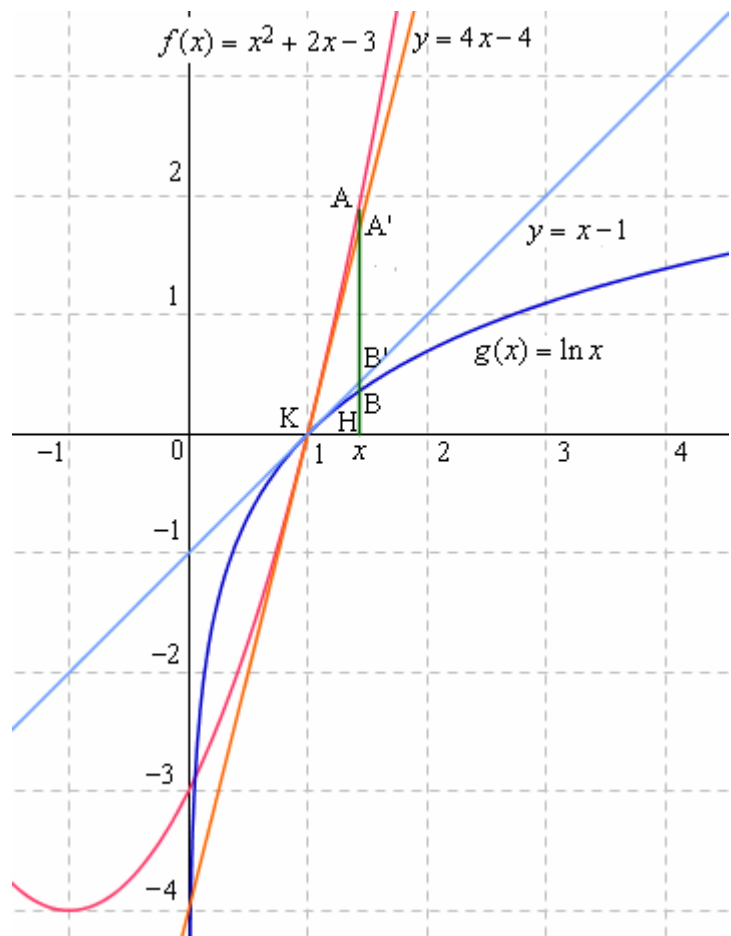
far impennare la frazione
verso l'infinito,
e la funzione a numeratore,
che col suo tendere a zero
"vorrebbe"

schacciare la frazione
verso lo zero.

Il valore del limite dipenderà
dalla **RAPIDITA'**

con cui tendono a zero,
rispettivamente,
numeratore $f(x)$
e denominatore $g(x)$.

Ma la rapidità nel tendere a zero
di $f(x)$ e, rispettivamente, $g(x)$,
è legata alla **PENDENZA** con cui
il grafico di ciascuna funzione
confluisce verso lo zero!



E tale pendenza non è altro che la pendenza della retta tangente in $K(1,0)$ a ciascuna curva
(legata, a sua volta, al **COEFFICIENTE ANGOLARE della tangente** ossia alla **DERIVATA** della funzione!)

Cerchiamo di mettere meglio a fuoco questa idea,

l'idea cioè di **chiamare in causa le rette tangenti** alle due curve in K , **e il loro coefficiente angolare**.

Prendiamo un'ascissa x (l'ascissa del punto H in figura) prossima a 1, e andiamo a considerare
il rapporto delle rispettive ordinate $f(x)$ e $g(x)$ (rapporto di cui ci interessa il limite per x che tende a 1).

Poiché siamo in prossimità del punto K ,

i grafici delle due curve "si confondono con" le rispettive rette tangenti in K .

Il valore del rapporto $f(x)/g(x)$ è quindi **ottimamente approssimato** dal valore del rapporto fra le due ordinate,
che corrispondono a x NON sulle curve $y = x^2 + 2x - 3$ e $y = \ln x$, bensì sulle rispettive **rette tangenti** in K .

Avremo allora

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{y_A}{y_B} \approx \frac{y_{A'}}{y_{B'}} = \frac{HA'}{HB'} = \frac{m_{KA'} \cdot KH}{m_{KB'} \cdot KH} = \frac{m_{KA'}}{m_{KB'}} = \frac{f'(1)}{g'(1)}$$

↓
come confidiamo che sia,
essendo le nostre due
funzioni f, g
molto "regolari"

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La catena appena scritta costituisce un **abbozzo** di giustificazione

(non è sufficientemente preciso né sufficientemente generale per poter essere considerato una "dimostrazione")
del Teorema di De l'Hopital.

*Ma ecco, alla pagina successiva, la "vera" dimostrazione,
riferita a quello che abbiamo chiamato Il "Primo Teorema di De l'Hopital",
e la cui ipotesi e tesi ti invito a rivedere, prima di iniziare la lettura.*

*Il "Secondo Teorema di De l'Hopital" avrebbe una dimostrazione analoga
(anzi, più semplice, non essendoci in quel caso il problema del comportamento della funzione IN c).*

DIMOSTRAZIONE del Teorema di De l'Hopital (nel caso del Primo Teorema)

L'ipotesi vincola il comportamento delle due funzioni $f(x)$, $g(x)$ IN PROSSIMITA' di c :

- $f(x)$ e $g(x)$ definite e derivabili su tutto un intorno I_c di c , ad eccezione al più del punto c ;
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$;
- $g'(x) \neq 0$ su tutto $I_c - \{c\}$
- esiste il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ma non richiede alcunché riguardo al comportamento di $f(x)$ e $g(x)$ IN c , dove le due funzioni potrebbero addirittura non essere definite.

Ciò finirebbe per complicarci alquanto la vita, ma (IDEA!) dato che la tesi riguarda ciò che accade quando x viene FATTO TENDERE a c (e NON ciò che avviene con x UGUALE A c), potremmo superare l'ostacolo andando a considerare, al posto delle funzioni date $f(x)$, $g(x)$, i loro "prolungamenti per continuità in c ", ossia le due funzioni ausiliarie

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq c \\ 0 & \text{per } x = c \end{cases}; \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{per } x \neq c \\ 0 & \text{per } x = c \end{cases}$$

Nel caso in cui $f(x)$ sia continua in c , cioè si abbia non solo $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$, ma anche $f(c) = 0$,

la F coincide perfettamente con f ; diciamo che questo è il caso in cui l'introduzione della F sarebbe inutile; se invece $f(x)$ è discontinua in c (perché non è definita in c , oppure perché $f(c)$ è diverso da 0), la F differisce dalla f esclusivamente per il comportamento in c , ma è del tutto identica a f fuori dall'ascissa c ; in compenso, la F è più "brava" della f perché, oltre a risultare $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = 0$, è pure $F(c) = 0$.

E le stesse cose si possono affermare riguardo alla G nei confronti della g .

Delle due funzioni F e G possiamo dunque dire che:

- $F(x)$ e $G(x)$ sono definite e continue su tutto I_c e derivabili su tutto $I_c - \{c\}$;
- $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = \lim_{x \rightarrow c} G(x) = 0$ e $F(c) = G(c) = 0$;
- $G'(x) \neq 0$ su tutto $I_c - \{c\}$
- esiste il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)}$

E se ora riusciremo a dimostrare la tesi con riferimento alla due funzioni "figlie" F , G , vale a dire:

se riusciremo a far vedere che esiste il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{G(x)}$ ed è $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)}$,

avremo provato pure la tesi originaria, quella sulle funzioni "madri" f , g , in quanto le "figlie" F e G coincidono perfettamente, al di fuori dell'ascissa c , con le "madri" f e g .

Consideriamo dunque il rapporto $\frac{F(x)}{G(x)}$.

Possiamo scrivere la catena $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - 0}{G(x) - 0} = \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)}$.

Ora, il teorema di Cauchy, applicato all'intervallo chiuso di estremi c , x (intervallo che sarà $[c, x]$ oppure $[x, c]$ a seconda che x si trovi a destra o a sinistra di c)

ci assicura che internamente a questo intervallo esiste un'ascissa c_x per la quale $\frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}$

(controlla tu con attenzione: le condizioni di applicabilità di Cauchy sono assicurate dall'ipotesi ...).

Ricapitolando, per questa ascissa c_x , compresa fra c e x , si ha $\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \frac{F(x)}{G(x)}$.

Ma a questo punto siamo a posto !!! ☺

Sì, perché dato che esiste il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)}$, essendo c_x compreso fra c e x esisterà pure il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}$

e sarà uguale al precedente, ossia varrà l'uguaglianza $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)}$,

da cui $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{G(x)}$, C.V.D.