

ESERCIZI sul Teorema di De l'Hopital

- 1) Applicando il Teorema di De l'Hopital, verifica che: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\ln x} = 5$
- 2) Verifica che $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 3$ a) scomponendo e semplificando (per due volte di seguito)
b) applicando de l'Hopital (per due volte di seguito)
- 3) Verifica applicando il Teorema di de l'Hopital la correttezza dei limiti seguenti, osservando comunque che per determinarli sarebbe sufficiente, come è ben noto, considerare i gradi dei polinomi in gioco:

a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 + x + 1} = \pm\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^3 + x^2 + 8x + 14}{x^4 - x^2 + 1} = 0$

- 4) Considera i limiti notevoli seguenti (già noti) e ritrova i loro valori applicando de l'Hopital:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

i) **ESERCIZIO SVOLTO:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k, \quad k \in \mathbb{R}$

RISOLUZIONE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \cdot (1+x)^{k-1}}{1} = k \cdot 1^{k-1} = k \cdot 1 = k$

5) ESERCIZIO SVOLTO

Verifica che,
per x che tende a zero,
sul rapporto
di funzioni

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin \frac{\pi}{x}}{\cos x}$$

de l'Hospital NON è applicabile perché
il rapporto delle derivate non tende ad alcun limite;
ciononostante, il limite di $f(x)/g(x)$,
per x che tende a zero, esiste (e vale 0).

*Questo bel controesempio mostra che De l'Hopital esprime una condizione
SUFFICIENTE, MA NON NECESSARIA, per l'esistenza del limite in questione.*

RISOLUZIONE: $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cdot \sin \frac{\pi}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{\cos x} = \frac{2x \cdot \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cdot \cos \frac{\pi}{x}}{\cos x}$

quindi, in effetti,
il rapporto delle derivate
non tende ad alcun limite
al tendere di x a 0:

$$\frac{\boxed{2x} \cdot \boxed{\sin \frac{\pi}{x}} - \pi \cdot \boxed{\cos \frac{\pi}{x}}}{\boxed{\cos x}}$$

$\begin{matrix} \text{tende} & \text{oscilla} & & \text{oscilla} \\ \text{a zero} & \text{fra } -1 \text{ e } 1 & & \text{fra } -1 \text{ e } 1 \\ \boxed{2x} & \cdot & \boxed{\sin \frac{\pi}{x}} & - \pi \cdot \boxed{\cos \frac{\pi}{x}} \\ & & & \boxed{\cos x} \\ & & & \text{tende a 1} \end{matrix}$

Ed ecco ora,
SENZA ovviamente
de l'Hopital,
il calcolo del limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{\pi}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\boxed{x} \cdot \boxed{\sin \frac{\pi}{x}}}{\boxed{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\boxed{x}}{\boxed{\cos x}} \cdot \boxed{\sin \frac{\pi}{x}} = 0$$

$\begin{matrix} \text{tende} & \text{oscilla} \\ \text{a 1} & \text{fra } -1 \text{ e } 1 \\ \boxed{x} & \cdot & \boxed{\sin \frac{\pi}{x}} \\ \text{tende} & & \\ \text{a zero} & & \end{matrix}$

- 6) Stabilisci se è possibile applicare de l'Hopital alla determinazione del limite seguente: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Verifica, comunque, dividendo per x sia il numeratore che il denominatore, che tale limite vale 1.

7) Verifica, col Teorema di de l'Hopital, i limiti notevoli seguenti:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d) **ESERCIZIO SVOLTO:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n = 2, 3, 4, 5, \dots$

RIS.: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \stackrel{H}{=} \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$

e) **ESERCIZIO SVOLTO:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad n = 2, 3, 4, \dots$

RIS.: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\text{tende a 0 (es. 7c)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^{n-1}}}_{\text{tende a 0}} = 0.$

In alternativa: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n x^n} = 0$

f) **ESERCIZIO SVOLTO:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x}{x} = 0$

RIS. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln^3 x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{1} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 \ln^2 x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24 \ln x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24}{x} = 0$

8) Servendoti del Teorema di de l'Hopital, calcola i limiti seguenti (risultati in fondo alla pagina):

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \dots$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{e^{-x}} = \dots$ i) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \dots$

l) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\sqrt{x} - 2} = \dots$ m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 64}{\sqrt{x} - 2} = \dots$ n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{4\sqrt[3]{2x+5} + 7} = \dots$

o) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{\ln(3x^2+5x+7)} = \dots$ p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+8}}{x^3 + x^2 + x + 1} = \dots$ q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x+11)}{e^{x-4}} = \dots$

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^x} = \dots$ s) $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \dots$ t) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\frac{1}{2x - \pi}} = \dots$

u) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\ln[x^{(x^2)}]} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x^2 \cdot \ln x} = \dots$ perché con de l'Hospital si ha $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \dots$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} = \dots$ w) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{x-1}} = \dots$ z) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = \dots$

RISULTATI: g) 0 h) 0 i) 0 l) 192 m) $+\infty$ n) $+\infty$ o) $\pm\infty$ p) $+\infty$ q) 0 r) 0 s) 0
 t) 0 u) 1, essendo uguale a 0 il limite dell'esponente v) e^2 w) $1/e$ z) $-1/2$