

1.5 IL “ CRITERIO SUFFICIENTE DI DERIVABILITA’ ”

Supponiamo di sapere che una certa funzione f è derivabile su tutto un intorno I_{x_0} di un'ascissa x_0 , privato di x_0 (NOTA).

Supponiamo inoltre che la funzione f sia continua in x_0 (occhio! quest'ipotesi è indispensabile!).

NOTA

Voglio dire: IN x_0 noi non sappiamo ancora se la funzione sia o non sia derivabile; però all'immediata sinistra e alla immediata destra di x_0 certamente lo è.

Bene. Se adesso esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, allora esisterà pure $f'(x_0)$ e sarà uguale a L ,

$$\text{ossia si avrà pure } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \quad (\text{se si preferisce, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L)$$

Il teorema vale non solo se L (come abbiamo sopra supposto) è un valore finito ($L \in \mathbb{R}$), ma anche se L è uguale a $+\infty$ o $-\infty$; in quest'ultimo caso, la tesi è che la f ha in x_0 “derivata infinita”, cioè che il limite del rapporto incrementale in x_0 , quando l'incremento tende a 0, è $+\infty$ o $-\infty$.

Questo importante teorema viene chiamato “**Criterio sufficiente di derivabilità**”, o, più sbrigativamente, “**Criterio di derivabilità**”.

Schematizziamone e poi analizziamone l'enunciato:

CRITERIO (SUFFICIENTE) DI DERIVABILITA’

Ipotesi

- f derivabile su tutto $I_{x_0} - \{x_0\}$
- f continua in x_0
- esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L$ (L finito o infinito)

Tesi

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$, ossia:

se L è finito, esiste la derivata di f **IN** x_0 , ed è uguale a L ($\exists f'(x_0) = L$),

se L è infinito, f ha **IN** x_0 derivata infinita

Osservazioni

- a) Quando il limite del rapporto incrementale è infinito, si dice, indifferentemente, che
- I) “la funzione non è derivabile in quel punto” e che II) “la funzione ha derivata infinita in quel punto”.
- La contraddizione, in termini linguistici, è evidente e molto fastidiosa, ma è entrata nell'uso (non senza le sue buone ragioni) per cui ci rassegheremo ad accettarla.
- b) ♥ Il teorema è molto interessante. A partire da certe ipotesi sul comportamento di f e della sua derivata **IN UN INTORNO DI x_0** , consente di trarre conclusioni sulla derivata **IN x_0** .
- c) Il teorema varrebbe anche limitandosi a considerare solo un intorno sinistro (o solo un intorno destro) di x_0 . La tesi riguarderebbe in questo caso una derivata UNILATERALE.

Dimostrazione

Prendiamo un'ascissa x prossima a x_0 (contenuta nell'intorno di x_0 menzionato dall'ipotesi) e consideriamo l'intervallo chiuso di estremi x_0 e x

(si tratterà di $[x_0, x]$ oppure di $[x, x_0]$ a seconda che x si trovi a destra o a sinistra di x_0).

Poiché l'ipotesi ci assicura che f è continua in x_0 e derivabile in tutti i punti compresi fra x_0 (escluso) e x (incluso), all'intervallo in questione sarà lecito applicare il teorema di Lagrange.

Questo stabilisce l'esistenza di un punto c_x compreso strettamente fra x_0 e x , per il quale si ha

$$(1) \quad f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{NOTA: il simbolo } c_x \text{ è stato scelto per sottolineare la dipendenza di questo punto dall'ascissa } x$$

Ma l'ipotesi afferma anche che esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L$.

Essendo c_x compreso fra x_0 e x , sarà allora anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(c_x) = L$ e quindi, per la (1),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

La tesi è così dimostrata.

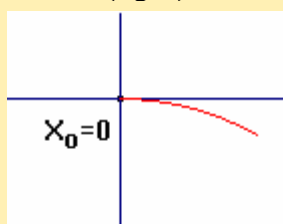
Esempio 1

Consideriamo la funzione $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

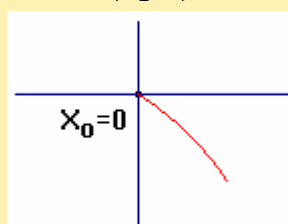
Si tratta, in pratica, della funzione $y = x \ln x$,
della quale si sa (vedi il capitolo su De l'Hospital) che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$,
“prolungata per continuità” nell'origine.

Il grafico di questa funzione “nasce” dunque dall'origine, ma ...
con quale pendenza si proietta fuori dall'origine?

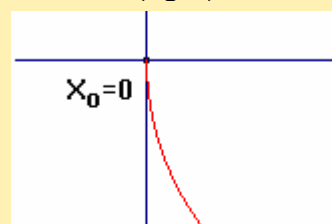
... così? ...
(fig. 1)



... o forse così ...??
(fig. 2)



... o, chissà, magari così !?! ...
(fig. 3)



Per rispondere a questa domanda, noi **dovremmo calcolare la derivata $f'(0)$** (ammesso che esista).

Il guaio è che, data la particolare definizione “per casi”,

non possiamo effettuare il calcolo di questa derivata **applicando una formula**,

ma siamo costretti a svolgerlo scrivendo il rapporto incrementale in $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x - 0}{x - 0} = \frac{x \ln x}{x} = \ln x$$

e facendo poi tendere x a $x_0 = 0$

(precisamente, dato che la nostra funzione non esiste per $x < 0$, facendo poi tendere x a 0^+).

Si vede immediatamente che il limite del rapporto incrementale considerato è $-\infty$:

perciò in definitiva possiamo dire che

$$f'(0) = -\infty$$

e abbiamo così stabilito che $f(x)$ **si affaccia fuori dall'origine con “discesa infinita”** (come in fig. 3, quindi!)

A questa conclusione, però, avremmo potuto anche pervenire in un modo diverso e più comodo, utilizzando il nostro bravo “Criterio di derivabilità”.

Vediamo.

Fin dall'inizio noi sapevamo che la funzione $f(x)$ (continua nell'origine) era derivabile nei punti a destra dell'origine. Tale derivata valeva

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad (x \neq 0).$$

Facciamo tendere ora x a zero (precisamente, a 0^+): avremo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1) = -\infty$$

il che ci assicura, per il Criterio di derivabilità appunto, che

$$f'(0) = -\infty \quad (\text{più precisamente: } f'_+(0) = -\infty).$$

In questo modo, il procedimento di determinazione della derivata in 0 è più facile, è **più comodo e veloce**.

E' di norma **più agevole, o più rapido**, stabilire il valore della derivata in un punto x_0 calcolando $f'(x)$ fuori da x_0 e poi facendo tendere x a x_0 , piuttosto che attraverso la costruzione diretta del rapporto incrementale in x_0 .
Può esserci **davvero utile**, dunque, questo teorema chiamato “**Criterio di derivabilità**” !

□ Esempio 2

La funzione $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} = 1 - x^{2/3}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

Essa ha per derivata $g'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

ma questa derivata, contrariamente alla funzione, NON è definita in $x_0 = 0$.

Con quale inclinazione la funzione confluisce nel punto di ascissa 0?

Se noi andiamo a calcolare i due limiti di $g'(x)$,
al tendere di x a zero da sinistra e, rispettivamente, da destra, troveremo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\infty$$

Applicando il **Criterio di Derivabilità**, possiamo allora dire che

$$g'_-(x_0) = +\infty, \quad g'_+(x_0) = -\infty :$$

cioè che, se si andasse a scrivere il rapporto incrementale in $x_0 = 0$

e si facesse poi tendere a zero l'incremento,

si troverebbe come limite sinistro del rapporto incrementale $+\infty$ e come limite destro $-\infty$.

Verifichiamo questo fatto **operando direttamente sul rapporto incrementale**:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{(1 - \sqrt[3]{x^2}) - 1}{x} = -\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = -\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

da cui, appunto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

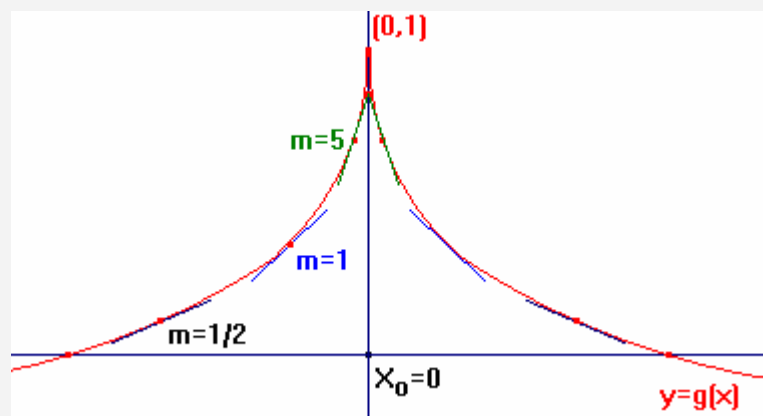
ovvero:

$$g'_-(x_0) = +\infty, \quad g'_+(x_0) = -\infty$$

D'altronde, dopo aver constatato che $\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\infty$,

cosa avremmo potuto dedurre, intuitivamente, riguardo al grafico della funzione?

Dunque ...
al tendere di x a zero da sinistra,
le rette tangenti alla curva $y = g(x)$
assumono inclinazioni
in salita sempre più ripida ...
mentre al tendere di x a zero da destra,
le tangenti presentano inclinazioni
in discesa sempre più ripida...
ma allora il grafico, tenuto conto anche
della continuità in $x_0 = 0$,
non può essere altro che
del tipo raffigurato qui a fianco!



E cosa ci dice ora il disegno riguardo alla pendenza IN x_0 ?

Evidentemente, ci dice che la curva confluisce (da sinistra) nel punto $(x_0, g(x_0))$, in salita verticale (= in salita infinita), ed esce (verso destra) dallo stesso punto in discesa verticale (= in discesa infinita). Insomma, dalla conoscenza del comportamento della pendenza della curva IN PROSSIMITA' DI x_0 (e tenendo presente anche il fatto che la funzione, come sappiamo, è continua in x_0), era intuitivo che si potesse dedurre la pendenza della curva IN x_0 .

Il carattere intuitivo di previsioni di questo tipo induce parecchi testi a ignorare completamente il Criterio di Derivabilità, facendo passare per "ovvie" le conclusioni che da esso dipendono ... tuttavia, "salti logici" di tal tipo nella sistemazione teorica comportano una rinuncia al rigore di questa.

❑ **Esempio 3 (CONTROesempio: qui il Criterio di derivabilità non sarà applicabile)**

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

e chiediamoci se è derivabile nell'origine.

La funzione è **continua nell'origine** perché, come facilmente si dimostra, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Fuori dall'origine, la derivata esiste e vale

$$f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) = 2x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - \pi \cdot \cos \frac{\pi}{x}$$

Ora, se esistesse il

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x),$$

saremmo nelle condizioni di applicare il Criterio di derivabilità.

Sennonché, tale limite non esiste!

Infatti, dei due addendi $2x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ e $-\pi \cdot \cos \frac{\pi}{x}$,

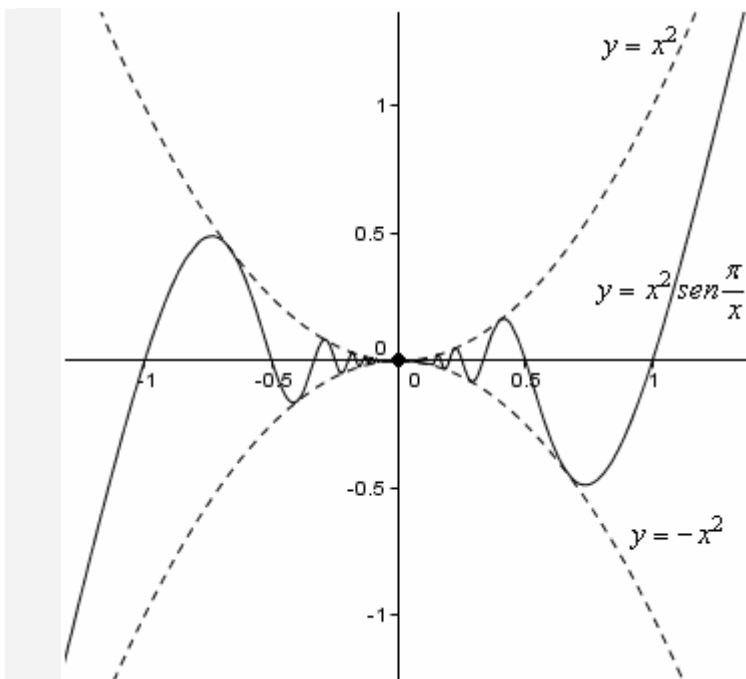
il primo tende a zero, ma il secondo oscilla fra $-\pi$ e π in qualsiasi intorno di $x = 0$.

Pertanto **IL CRITERIO DI DERIVABILITÀ NON È APPLICABILE.**

Per rispondere al quesito che ci eravamo posti (**la funzione è derivabile nell'origine, o no?**) **dovremo per forza ricorrere al rapporto incrementale:**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - 0}{x - 0} = x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

Poiché tale rapporto incrementale, al tendere di x a $x_0 = 0$, tende a zero, potremo in definitiva affermare che **la derivata nell'origine esiste ed è nulla.**



Ecco il grafico della funzione:
essendo

$$-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \quad \forall t$$

si ha

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \leq x^2 \quad \forall x$$

per cui il grafico della $y = f(x)$ si mantiene compreso fra i grafici delle due parabole

$$y = -x^2 \quad \text{e} \quad y = x^2.$$

Ciò permette di comprendere molto bene il motivo per cui la derivata nell'origine esiste ed è nulla.