STUDIO DI FUNZIONE

2) LE BASI TEORICHE DELLO STUDIO DI FUNZIONE

2.1 SIMBOLOGIA ADOTTATA

- Il **dominio** di una data **funzione** $\boxed{f}$ verrà indicato con $\boxed{D}$.
- Il simbolo $\boxed{I}$ verrà utilizzato per indicare un **intervallo**, mentre il simbolo $\boxed{I_x}$ indicherà un **intorno**, non necessariamente circolare, del punto *x* (ossia: un intervallo aperto contenente *x*).

2.2 FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI:
I) IN UN INSIEME II) NELL'INTORNO DI UN PUNTO III) IN UN PUNTO

Occhio, perché si tratta di **TRE DEFINIZIONI BEN DISTINTE** !

$$I.\quad f \text{ crescente in } E \subseteq \underbrace{D}_{dominio} \subseteq \mathbb{R} \xleftrightarrow{def.} \forall x', x'' \in E,\quad x' < x'' \to f(x') < f(x'')$$

$$II.\quad f \text{ crescente IN UN INTORNO DI } x_0 \in D \xleftrightarrow{def.} \exists\, I_{x_0} \text{ tale che } \forall x', x'' \in I_{x_0} \cap D,\quad x' < x'' \to f(x') < f(x'')$$

$$III.\quad f \text{ crescente IN } x_0 \in D \xleftrightarrow{def.} \exists\, I_{x_0} \text{ tale che } \forall x \in I_{x_0} \cap D,\quad x < x_0 \to f(x) < f(x_0) \ \wedge\ x > x_0 \to f(x) > f(x_0)$$

Naturalmente, apportando ovvie modifiche alle definizioni precedenti si otterranno le definizioni di "funzione **decrescente** in E", "funzione decrescente in un intorno di x_0", "funzione decrescente in x_0":

$$I.\quad f \text{ decrescente in } E \subseteq \underbrace{D}_{dominio} \subseteq \mathbb{R} \xleftrightarrow{def.} \forall x', x'' \in E,\quad x' < x'' \to f(x') > f(x'')$$

$$II.\quad f \text{ decrescente IN UN INTORNO DI } x_0 \in D \xleftrightarrow{def.} \exists\, I_{x_0} \text{ tale che } \forall x', x'' \in I_{x_0} \cap D,\quad x' < x'' \to f(x') > f(x'')$$

$$III.\quad f \text{ decrescente IN } x_0 \in D \xleftrightarrow{def.} \exists\, I_{x_0} \text{ tale che } \forall x \in I_{x_0} \cap D,\quad x < x_0 \to f(x) > f(x_0) \ \wedge\ x > x_0 \to f(x) < f(x_0)$$

E'importante riconoscere che:

- **se *f* è crescente IN UN INTORNO DI x_0, evidentemente lo è anche IN x_0;**
- **ma non vale necessariamente il viceversa!**

(discorso analogo vale sostituendo l'aggettivo "crescente" con "decrescente")

Ad esempio, considera la **figura 1a** qui a fianco, dove è rappresentata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} arc\ tg\ \dfrac{1}{x} & per\ \ x \neq 0 \\ 0 & per\ \ x = 0 \end{cases}.$$

La funzione f è crescente NELL' origine, ma *non* IN UN INTORNO DELL' origine.

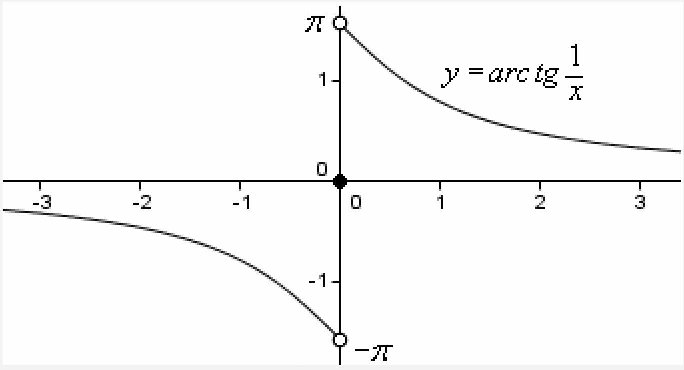


Fig. 1a

Anche la funzione della **figura 1b** qui riportata, che è poi la

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + x^2 sen\dfrac{\pi}{x} & per\ \ x \neq 0 \\ 0 & per\ \ x = 0 \end{cases}$$

è crescente NELL' origine *(Nota 1)* ma *non* IN UN INTORNO DELL' origine *(Nota 2)*.

Nota 1.
E' facile dimostrare che esiste un intorno dell'ascissa $x_0 = 0$ nel quale: quando $x < 0$, è $g(x) < 0 = g(0)$; quando $x > 0$, è $g(x) > 0 = g(0)$

Nota 2.
Questo fatto si può dimostrare utilizzando la "pendenza" della curva, ossia andando a calcolare la derivata $g'(x)$ e analizzandone il segno.

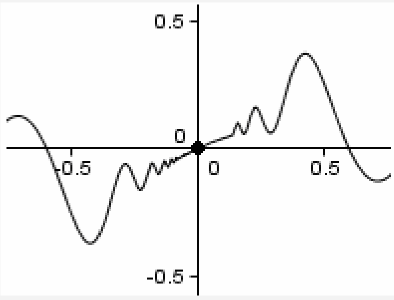


Fig. 1b

Quindi la situazione in cui f è crescente (risp. decrescente) IN un punto x_0
è *più generale* di quella in cui f è crescente (risp. decrescente) IN UN INTORNO DI x_0.

Attenzione però, **nel consultare i libri di testo**:
alcuni Autori, quando scrivono "*f* crescente (decrescente) *in* x_0", danno a questa locuzione il significato che noi abbiamo assegnato invece alla locuzione "*f* crescente (decrescente) *in un intorno di* x_0".
D'altronde, sai bene che, quando si utilizza un testo, è sempre indispensabile tenere ben presenti le definizioni e convenzioni che QUEL testo pone e la simbologia che QUEL testo adotta.

- **Teorema 1**
  Se *I* è un intervallo, allora:
  f crescente in I $\Leftrightarrow$ f crescente nell'intorno di ogni punto di I $\Leftrightarrow$ f crescente in ogni punto di I
  f decrescente in I $\Leftrightarrow$ f decresc. nell'intorno di ogni punto di I $\Leftrightarrow$ f decresc. in ogni punto di I

Osservazione 1 (il discorso dei "gemelli")
*Abbiamo qui due **proposizioni "gemelle"** (scritte ciascuna su di una riga).*
Noi, nelle osservazioni seguenti e nella dimostrazione, faremo riferimento soltanto alla prima delle due, in quanto il discorso riguardo all'altra si ridurrebbe ad una banale ed ovvia lieve modifica di cose già dette.
Analogamente ci regoleremo per altre coppie di proposizioni o definizioni "gemelle" che incontreremo in seguito.

Osservazione 2
Si tratta, in realtà, di tre biimplicazioni (è pur vero che, una volta dimostrate due qualsiasi di esse, la terza ne discenderebbe subito come conseguenza) quindi di tre teoremi riuniti in un unico enunciato.

Osservazione 3
Le implicazioni da sinistra a destra si dimostrano immediatamente;
assai più problematico è invece dimostrare quelle da destra verso sinistra…
la verità di tali implicazioni viene subito colta come intuitivamente evidente, ma se tenta di organizzare un ragionamento dimostrativo rigoroso, ci si troverà di fronte a difficoltà molto serie.

Osservazione 4
Abbiamo già discusso in modo approfondito nella parte 1 (dedicata ai "teoremi preliminari") il fatto che
l'esigenza di una dimostrazione rigorosa permanga,
anche di fronte a quegli enunciati che sembrano intuitivamente condivisibili.

Osservazione 5
La biimplicazione "f crescente nell'intorno di ogni punto di I $\Leftrightarrow$ f crescente in ogni punto di I" ci dice che,
mentre le due condizioni
II) f crescente NELL'INTORNO DI un punto x_0
III) f crescente IN un punto x_0
quando riferite AD UN SINGOLO punto, NON SONO equivalenti,
perché II) implica III) ma non viceversa,
esse DIVENTANO equivalenti quando le si suppone verificate PER TUTTI i punti di un INTERVALLO

Osservazione 6 (sulla dimostrazione dell'enunciato)
Una dimostrazione corretta del Teorema 1
*(o meglio, come abbiamo rimarcato, delle implicazioni da destra a sinistra, in quanto quelle da sinistra a destra si provano immediatamente) **dipende in sostanza da considerazioni di carattere topologico**.*
Si tratta essenzialmente di utilizzare il cosiddetto "Lemma di Borel",
*la cui trattazione **ci porterebbe** però **ad un livello un po' troppo avanzato per i limiti di questo corso**.*
Siamo costretti perciò a omettere la dimostrazione del Teorema.

Passiamo ora ad una nuova Definizione.

Una **funzione** si dice **"crescente in senso lato", o anche "non decrescente",** in un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ se
$$\forall x', x'' \in E, \quad x' < x'' \to f(x') \leq f(x'')$$
Analogamente si potrà parlare, adattando definizioni già date,
di funzione "crescente in senso lato"(o "non decrescente"), "in un intorno di un punto x_0", o "in un punto x_0".

E' del tutto ovvio poi il passaggio alle definizioni "gemelle" riguardanti una funzione "decrescente in senso lato", o "non crescente", in un insieme E, nell'intorno di un punto x_0, o in un punto x_0.

Se scriveremo "crescente" (o "decrescente"), senza aggiungere altro, vorrà sempre dire "in senso stretto".

2.3 IL SEGNO DELLA DERIVATA E L'INCLINAZIONE DEL GRAFICO

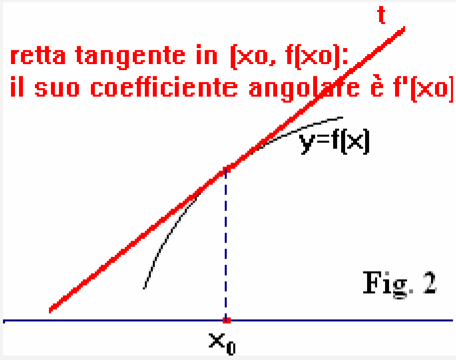
❑ **Teorema 2**

Se f è derivabile in x_0 ed è $f'(x_0)>0$, allora f è crescente in x_0.

Se f è derivabile in x_0 ed è $f'(x_0)<0$, allora f è decrescente in x_0.

Giustificazione intuitiva del Teorema 2

Dal punto di vista geometrico intuitivo,
appare subito plausibile che il teorema sia vero
perché la condizione
$f'(x_0)>0$
significa che la retta tangente nel punto di ascissa x_0
ha coefficiente angolare positivo e quindi è "in salita".
Si capisce allora che dovrà essere "in salita"
anche il grafico della funzione quando si passa
dalla sinistra alla destra dell'ascissa x_0 (vedi fig. 2 qui a fianco).



Dimostrazione
(come già dichiarato nell' Oss. 1 al Teor. 1, farò riferimento solo alla prima delle due proposizioni "gemelle".
E' del tutto evidente il fatto che il discorso relativo alla seconda,
altro non sarebbe che una noiosa ripetizione - con ovvie modifiche - di quanto già detto).

Sia $f'(x_0)>0$. Per definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, avremo:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)>0$$

Per il Teorema della Permanenza del Segno, esiste dunque un intorno di x_0 tale che,
per ogni x di quell'intorno (eccettuato $x=x_0$) si abbia

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

Ma se la frazione $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è positiva, allora

- per $x<x_0$ (e quindi $x-x_0<0$) dovrà essere $f(x)-f(x_0)<0$ ossia $f(x)<f(x_0)$
- per $x>x_0$ (e quindi $x-x_0>0$) dovrà essere $f(x)-f(x_0)>0$ ossia $f(x)>f(x_0)$

La tesi è così dimostrata.

❑ **Teorema 3**

Se f è derivabile in x_0 ed è crescente in x_0, allora $f'(x_0)\ge 0$

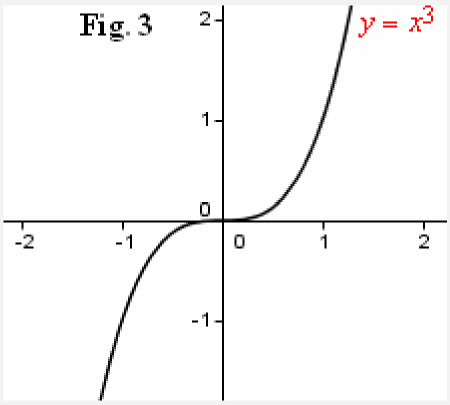
Se f è derivabile in x_0 ed è decrescente in x_0, allora $f'(x_0)\le 0$

Dimostrazione
Se f è derivabile in x_0 ed è crescente in x_0, non può essere $f'(x_0)<0$,
altrimenti, per il teorema 2, f sarebbe decrescente in x_0.

Osservazione

Sotto l'ipotesi che f sia crescente in x_0,
la tesi è dunque $f'(x_0)\ge 0$, NON $f'(x_0)>0$.

Infatti, ad esempio,
la funzione $f(x)=x^3$
è crescente nell'origine,
ma la derivata nell'origine non è strettamente positiva:
è invece nulla
(fig. 3 qui a fianco)



- **Teorema 4**
  Se f è derivabile in un intervallo I e, per ogni $x \in I$, si ha $f'(x) > 0$, allora f è crescente in I
  Se f è derivabile in un intervallo I e, per ogni $x \in I$, si ha $f'(x) < 0$, allora f è decrescente in I

Dimostrazione
Conseguenza del teorema 2 e del teorema 1.

Osservazione 1
Il Teorema 4 è valido per qualsiasi intervallo,
sia esso limitato, illimitato, aperto, chiuso o semiaperto.
Nel caso in cui un estremo dell'intervallo sia incluso nell'intervallo stesso,
la derivata corrispondente va intesa come unilaterale.

Osservazione 2 (IMPORTANTE: riguarda la particolare impostazione da noi scelta)

La maggior parte dei libri di testo fa a meno della definizione da noi stabilita di "funzione crescente (decrescente) IN un punto", perché assegna a questa locuzione il significato che noi abbiamo invece riservato alla locuzione "*f* crescente (decrescente) NELL'INTORNO DI un punto" (cfr. NOTA a piè pagina).

Ciò comporta, per questi testi, il "vantaggio" di evitare il ricorso al nostro Teorema 1, che dipende da considerazioni topologiche superiori (come il Lemma di Borel), ma anche l'inconveniente di dover rinunciare in linea di massima ad enunciati di carattere "locale" (come il nostro Teorema 2) e di doverli forzatamente sostituire con enunciati che impegnano il comportamento della funzione su interi intervalli, con un inevitabile rafforzamento (e quindi appesantimento e minore generalità) delle ipotesi. Anche i procedimenti dimostrativi ne risultano in più di un caso appesantiti.

Ad esempio il teorema 4 verrebbe dimostrato da questi testi ricorrendo al teorema di Lagrange: vedi quanto scritto qui di seguito.

Dimostrazione del Teorema 4 così come è proposta della maggior parte dei testi.

Supponiamo che f sia derivabile in un intervallo I e che, per ogni $x \in I$, si abbia $f'(x) > 0$.
Vogliamo dimostrare che, sotto questa ipotesi, f è crescente in I.
Siano dunque $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$.
Ci proponiamo di far vedere che è $f(x_1) < f(x_2)$.

E' possibile applicare Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$
(infatti f è derivabile su tutto I quindi in particolare è derivabile e continua su $[x_1, x_2]$)
ottenendo

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$$

dove $\bar{x}$ indica un opportuno punto compreso fra x_1 e x_2.
L'ipotesi che $f'(x)$ sia >0 su tutto I ci assicura che $f'(\bar{x}) > 0$ e da ciò si trae che

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

da cui

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ricapitolando, abbiamo visto che, presi due generici punti x_1, x_2 di I,

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Ciò prova che f è crescente in I, c.v.d.

NOTA - Invece la definizione di "funzione crescente" (decrescente) IN UN INSIEME che si ritrova in tutti i testi è sempre identica alla nostra.