2.4 MASSIMI E MINIMI RELATIVI ED ASSOLUTI DI UNA FUNZIONE

Definizione

x_0 **punto di massimo relativo** per la funzione $f(x)$ $\boxed{\overset{def.}{\longleftrightarrow} \exists I_{x_0} \text{ tale che } \forall x \in I_{x_0} \cap D,\ f(x) \le f(x_0)}$

x_0 **punto di minimo relativo** per la funzione $f(x)$ $\boxed{\overset{def.}{\longleftrightarrow} \exists I_{x_0} \text{ tale che } \forall x \in I_{x_0} \cap D,\ f(x) \ge f(x_0)}$

Osservazioni

In questo caso si dice che il valore $f(x_0)$ è un "massimo (minimo) relativo" per la funzione f.
Dunque (IMPORTANTE!):

*quando si dice **"punto di massimo (minimo) relativo"** si intende parlare di **un' ascissa**,*
*mentre quando si dice **"massimo (minimo) relativo"** ci si riferisce ad **un' ordinata**.*

A volte, la locuzione "punto di massimo (minimo) relativo" viene usata non per indicare un'ascissa, bensì un punto della curva: il punto di coordinate $\left(x_0,\ f(x_0)\right)$. Quando ciò avviene, risulta chiaro dal contesto.

I punti di massimo relativo e minimo relativo prendono il nome complessivo di "**estremanti relativi**".
Le rispettive ordinate sono chiamate "**estremi relativi**".

Definizione:

x_0 **punto di massimo assoluto** per la funzione $f(x)$ $\boxed{\overset{def.}{\longleftrightarrow} \forall x \in \underset{dominio}{D},\quad f(x) \le f(x_0)}$

x_0 **punto di minimo assoluto** per la funzione $f(x)$ $\boxed{\overset{def.}{\longleftrightarrow} \forall x \in \underset{dominio}{D},\quad f(x) \ge f(x_0)}$

Osservazione

Valgono osservazioni analoghe a quelle fatte in relazione alla definizione precedente:

*"**punto di massimo (minimo) assoluto**" denota **un' ascissa**,*
*"**massimo (minimo) assoluto**" denota **un' ordinata**.*

Nella fig. 4 qui a fianco,

x_1 e x_3 sono punti di massimo relativo,
e x_3 è anche il punto di massimo assoluto.

I massimi relativi sono $f(x_1)$ e $f(x_3)$;
quest'ultima ordinata costituisce anche il massimo assoluto.

I punti di minimo relativo sono x_2 e b;
i minimi relativi sono $f(x_2)$ e $f(b)$.

Non esiste un punto di minimo assoluto per la funzione rappresentata in figura: si ha soltanto un "estremo inferiore", che è poi, con espressione grossolana, " l'ordinata del buco ", ossia il $\lim_{x \to a+} f(x)$

Nota, caro lettore,
che la funzione proposta come esempio qui sotto non è definita con x =a, dove abbiamo un "buco" o, in termini matematici più seri, una "discontinuità di terza specie"

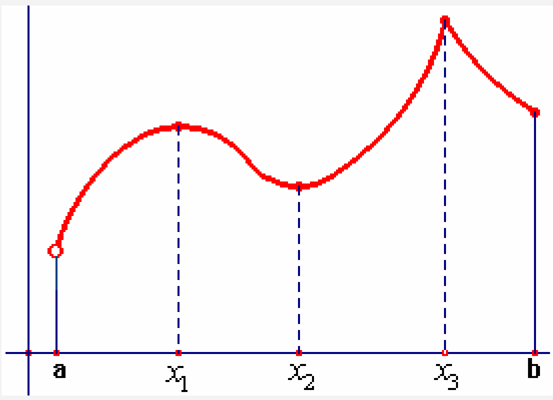


Fig. 4

Un **punto di massimo relativo** può essere **"forte" (o "proprio") oppure "debole" (o "improprio").**
Definizione:

Se x_0 è un **punto di massimo relativo** per la funzione $f(x)$, allora si dice che x_0 è "**forte**" (o "**proprio**") se e solo se

$$\boxed{\exists\, I_{x_0} \ \textit{tale che} \ \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}, \quad f(x) < f(x_0)}$$

ossia, se il simbolo $\leq$ può essere sostituito dal simbolo $<$ (con *x* diverso da x_0, ovviamente).

Può invece accadere (sebbene sia circostanza "rara") che, pur essendo x_0 un punto di massimo relativo, tuttavia in qualsiasi intorno di x_0 la funzione $f(x)$ ritorni ad assumere il valore $f(x_0)$, cosicché sarebbe sbagliato scrivere il simbolo di disuguaglianza stretta.
In tal caso si dice che x_0 è un punto di massimo relativo "**debole**" (o "**improprio**").

Evidentemente, si potrebbe formulare una definizione "gemella" per stabilire quando un punto di *minimo* relativo possa essere detto "forte" o "debole".

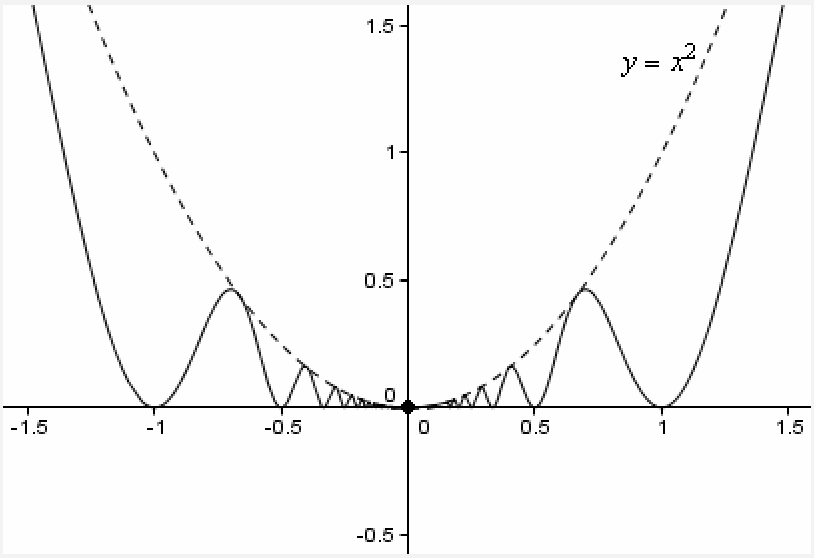
La figura seguente, in cui compare una situazione di minimo relativo debole, dovrebbe illustrare efficacemente quanto detto.

La fig. 5 qui a fianco rappresenta la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \, sen^2 \dfrac{\pi}{x} & per \ \ x \neq 0 \\ 0 & per \ \ x = 0 \end{cases}$$

Il punto $x_0 = 0$ è di minimo relativo debole. Infatti, in ogni intorno dell'ascissa $x_0 = 0$ la funzione ritorna infinite volte ad assumere l'ordinata $f(0) = 0$. Possiamo dire che in un intorno di x_0 si ha sempre $f(x) \geq f(x_0)$, ma sarebbe sbagliato affermare che esiste un intorno di x_0 nel quale, con $x \neq x_0$, si ha $f(x) > f(x_0)$.

Fig. 5



Nella figura abbiamo voluto rappresentare anche la parabola y=x²: il grafico di f(x) è infatti stretto fra tale parabola e l'asse x.

Si può portare come ulteriore esempio la **funzione di Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & per \ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & per \ \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Per essa, ogni ascissa razionale è di massimo relativo debole, e ogni ascissa irrazionale è di minimo relativo debole.

- **Osservazione**

  Nel seguito, quando parleremo di "estremante relativo", non intenderemo necessariamente che sia "forte": potrebbe essere o forte, o debole. Se vorremo riferirci ad un estremante relativo "forte", lo dichiareremo espressamente.

- **Teorema 5 (di FERMAT)** *Pierre de Fermat, francese, 1601-1665*

  f sia definita su di un intervallo *I* e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo (brevemente: un estremante relativo), *interno* a tale intervallo (l'ipotesi che sia interno è indispensabile).
  Allora (se, beninteso, f è derivabile in x_0), risulta

  $$\boxed{f'(x_0)=0}$$

Osservazione 1

E' essenziale specificare che il punto di cui si parla è supposto *interno* all'intervallo di definizione della funzione: altrimenti, la tesi in generale non vale.

Ad esempio, nella fig. 6 qui a fianco, dove il dominio della funzione rappresentata è l'intervallo chiuso [a,b], il punto b è di massimo relativo, eppure la derivata (sinistra) in b non è nulla.

Il teorema non è applicabile, perché il punto b considerato non è interno all'intervallo ma ne è invece un estremo.

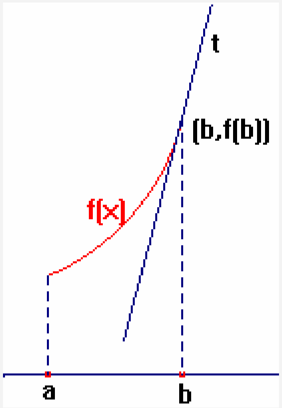


Fig. 6

t è la retta tangente nel punto $(b,\ f(b))$. Non è parallela all'asse x, quindi il suo coefficiente angolare non è nullo. Pertanto $f'(b)$ non è nulla, nonostante b sia punto di massimo relativo. Ma b NON è punto INTERNO all'intervallo di estremi $a,\ b$.

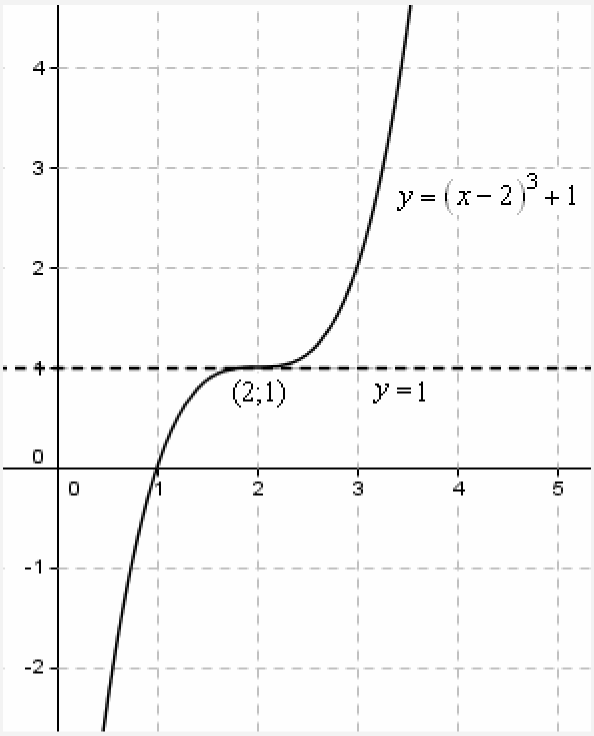
Osservazione 2

La condizione $\boxed{f'(x_0)=0}$ è *necessaria, ma non sufficiente* affinché x_0 sia un estremante relativo interno all'intervallo di definizione.

Nella fig. 7a qui a fianco, è rappresentata la funzione
$$y=(x-2)^3+1=x^3-6x^2+12x-7.$$
Nell'ascissa 2 la derivata si annulla: $f'(2)=0$.
La retta tangente in (2;1) è perciò orizzontale.
Tuttavia, il punto $x=2$ non è un estremante relativo.
In corrispondenza di questo punto, il grafico della funzione attraversa la retta tangente.

Quando ciò accade, si dice che siamo in presenza di un "punto di flesso".
Dei punti di flesso ci occuperemo più dettagliatamente in seguito.

Fig. 7a



Un po' più inconsueto
è il caso della funzione
rappresentata qui a fianco (fig. 7b):

$$g(x)=\begin{cases} x^2\,sen\dfrac{\pi}{x} & per\ \ x\neq 0 \\ 0 & per\ \ x=0 \end{cases}$$

(il grafico di $g(x)$
è compreso fra le due parabole
$y=-x^2$ e $y=x^2$.

Nel punto $x_0=0$ la derivata
esiste e si annulla
(verificalo calcolandola!),
ma non si tratta
di un estremante relativo
(e neppure di un punto di flesso).

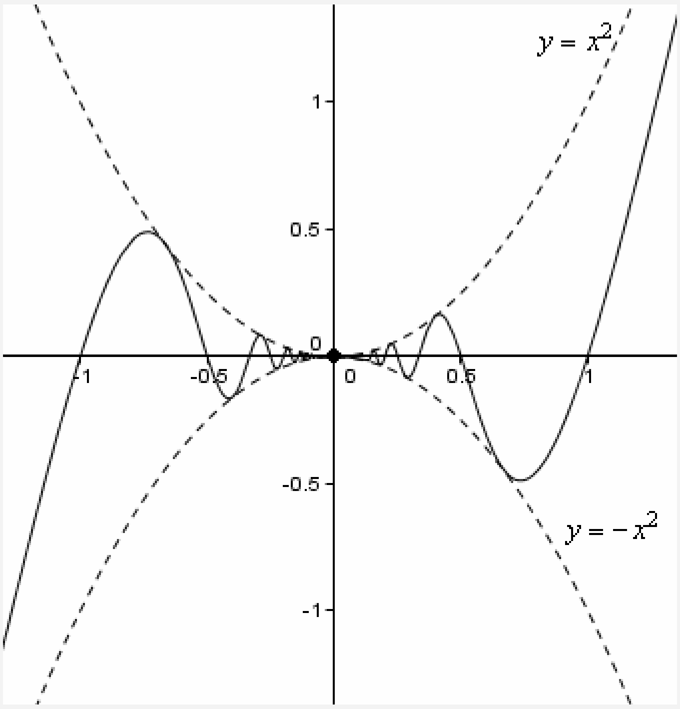


Fig. 7b

Infine, il teorema vale
(è ovvio, ma non nuocerà ribadirlo)
sotto l'ipotesi che f sia derivabile in x_0;
tale ipotesi è di norma verificata, ma non sempre:
ad esempio, la funzione $y=|x|$ ha un minimo
per $x_0=0$, ma non è derivabile in tale punto.

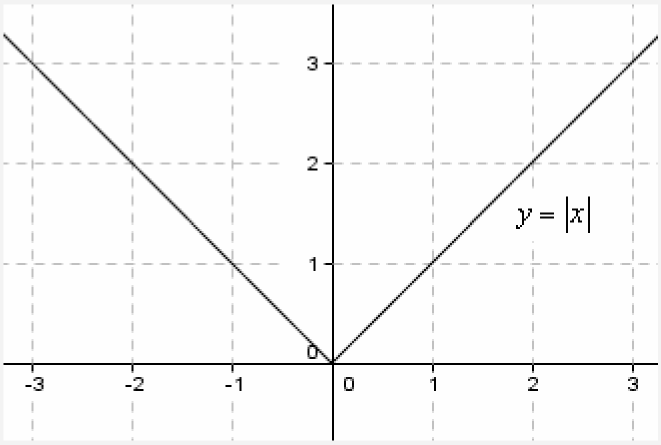


Fig. 7c

Dimostrazione del teorema 5

Per assurdo.
Sia x_0 un punto, tanto per fissare le idee, di massimo relativo,
interno all'intervallo *I* di definizione della funzione.

Se fosse $f'(x_0)>0$, allora, per il Teorema 2, f sarebbe crescente in x_0,
e x_0 non potrebbe essere punto di massimo relativo,
perché in un intorno destro di x_0 i valori della funzione sarebbero maggiori di $f(x_0)$.

Se fosse $f'(x_0)<0$, allora, per il Teorema 2, f sarebbe decrescente in x_0,
e x_0 non potrebbe essere punto di massimo relativo,
perché in un intorno sinistro di x_0 i valori della funzione sarebbero maggiori di $f(x_0)$.

Analoga è la dimostrazione se si suppone che x_0 sia di minimo relativo.