2.6 CUSPIDI, PUNTI ANGOLOSI

Invece nel caso della figura 10 qui a fianco non si parla di "flesso", bensì di "cuspide".

La funzione diagrammata è $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

La curva è tangente in $(1,\ 2)$ alla retta verticale $x = 1$.

Come descriveremo dunque una "cuspide"?
Una "**cuspide**" è un **punto $(x_0,\ f(x_0))$**
in cui la funzione è continua, e non è derivabile,
ma è tale che la derivata sinistra e la derivata destra
valgono una $\pm\infty$, l'altra $\mp\infty$:

$$f'_-(x_0) = \pm\infty, \quad f'_+(x_0) = \mp\infty$$

… in altre parole,
il rapporto incrementale sinistro in x_0
e il rapporto incrementale destro in x_0
tendono, al tendere a zero dell'incremento,
uno a $\pm\infty$, l'altro a $\mp\infty$:

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty, \quad \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty$$

Una "cuspide" può essere considerata come un caso particolare di "punto angoloso".

Nella figura 11 qui a fianco, dove è rappresentata la funzione $y = |x^2 - 1|$, puoi osservare *due* punti angolosi, di ascisse -1 e $+1$ rispettivamente.

Si dice "**punto angoloso**"
un punto in cui la funzione è continua
ma derivata sinistra e destra sono diverse fra loro
(una o entrambe possono anche essere infinite).

Per esercizio, con riferimento alla fig. 11, verifica che le due semirette tangenti nel punto (1,0) hanno coefficienti angolari -2 e 2.

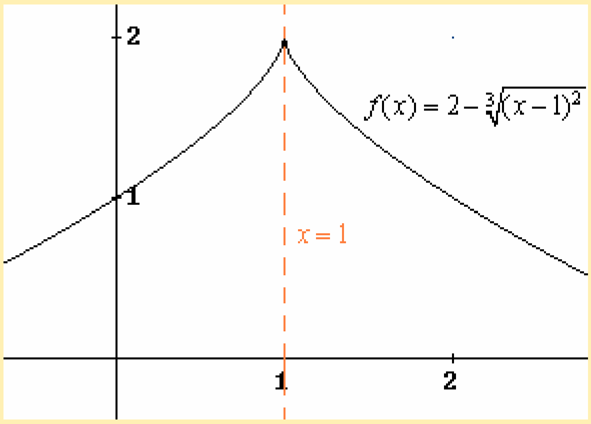
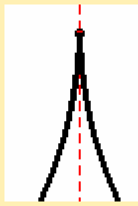


Fig. 10: una cuspide (vedi particolare qui sotto)



←
Particolare
del
grafico di fig. 10

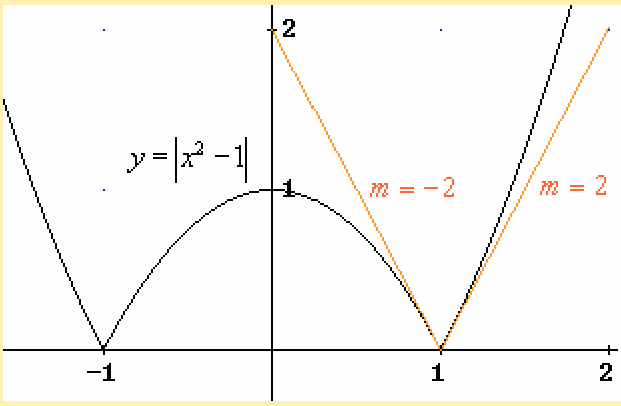


Fig. 11: due punti angolosi

Esercizio 1

Verifica che la funzione $\sqrt[5]{x^4}$ ha una cuspide per $x = 0$, mentre $\sqrt[5]{x^3}$ ha per $x = 0$ un flesso verticale.

Esercizio 2

Verifica che la funzione $g(x) = x^2 + ax + b|x|$
presenta, nell'origine, un punto angoloso
nel quale l'ampiezza dell'angolo formato
dalle due semitangenti può essere modulata a piacere
assegnando valori opportuni ai due parametri a, b.

Esercizio 3

Spiega perché la funzione $h(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{|x|} + ax$
presenta nell'origine un punto angoloso
in cui una delle due semitangenti è verticale.

Dimostra inoltre che l'angolo (assoluto) γ *formato dalle due semitangenti è tale che* $tg\,\gamma = \dfrac{1}{|a|}$ *(NOTA)*

NOTA. - Ricordiamo che:

- L'angolo α che una retta $r:\ y = mx + q$ forma con l'asse orientato delle x è tale che
  $tg\,\alpha = m$
- Per calcolare l'angolo γ formato dalle due rette
  $r:\ y = mx + q, \quad r':\ y = m'x + q'$
  si applica una delle due formule seguenti:

♪ $tg\,\gamma = \dfrac{m - m'}{1 + mm'}$ se ci interessa un angolo "**orientato**" (strettamente compreso fra $-90°$ e $+90°$)

L' "angolo orientato" è qui l'angolo di cui deve ruotare la retta r', per sovrapporsi alla r con la rotazione *più breve possibile*, preso con segno:
- positivo se la rotazione più breve è quella che avviene in senso antiorario,
- negativo se in senso orario

♫ $tg\,\gamma = \left|\dfrac{m - m'}{1 + mm'}\right|$ se vogliamo l'angolo "**assoluto**" (=senza segno)