

2.13 ASINTOTI

Un "asintoto", per una funzione $y = f(x)$, è una retta alla quale il grafico della funzione "si avvicina indefinitamente", "si avvicina di tanto quanto noi vogliamo", nel senso precisato dalle tre definizioni che seguono.

Distinguiamo fra *tre* tipi di asintoti: verticali, orizzontali, obliqui.

Asintoti verticali

La retta verticale $x = x_0$ è "asintoto verticale" per la funzione $y = f(x)$ se e solo se la f tende all'infinito quando x tende a x_0 , ossia

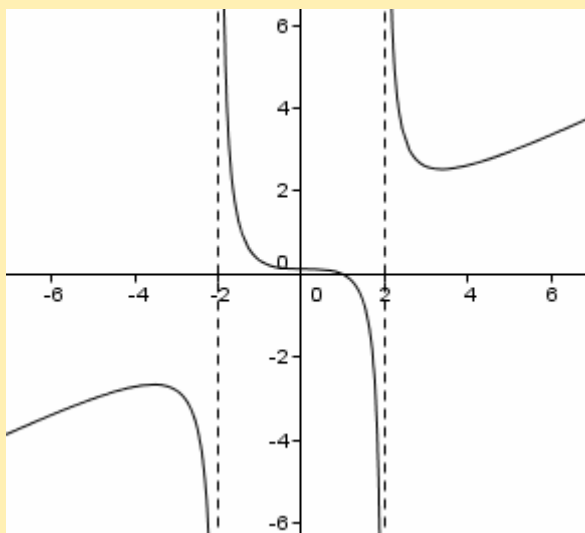
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Nella figura, è rappresentata la funzione

$$y = \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 8}$$

coi suoi due asintoti verticali:
le rette $x = -2$ e $x = 2$

fig. 20a



Può accadere che sia infinito solo il limite sinistro, o solo il limite destro, nel qual caso si parla di "asintoto verticale sinistro" o "destro", rispettivamente.

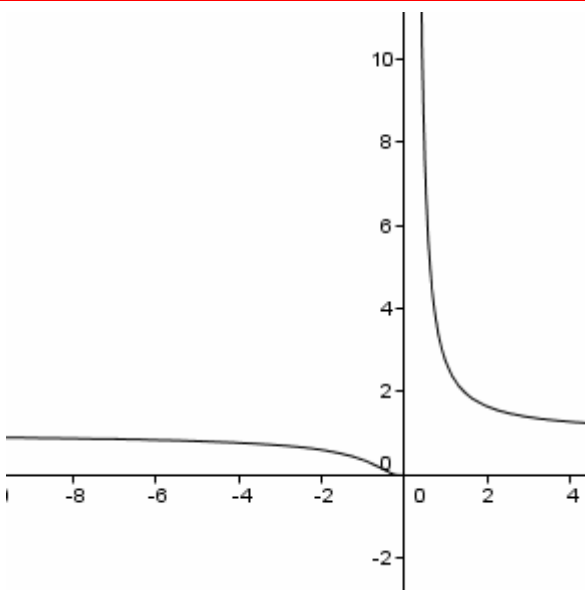
Nella figura è rappresentata la funzione

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

per la quale la retta $x = 0$ è **asintoto verticale unilaterale** (precisamente: destro) in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

fig. 20b



INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI VERTICALI

Andiamo a considerare (se ve ne sono) le ascisse che costituiscono "interruzioni" del dominio, o (caso poco frequente) le ascisse nelle quali la funzione, pur essendo definita, presenta una discontinuità.

Calcoliamo quindi il limite della nostra funzione, al tendere di x a ciascuna di tali ascisse.

Quando il limite (bilaterale o unilaterale) è infinito, ecco che avremo individuato un asintoto verticale.

Asintoti orizzontali

La retta orizzontale $y = k$ è

"asintoto orizzontale"

per la funzione $y = f(x)$

se $f(x)$ tende a k

quando x tende all'infinito,

ossia

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = k$$

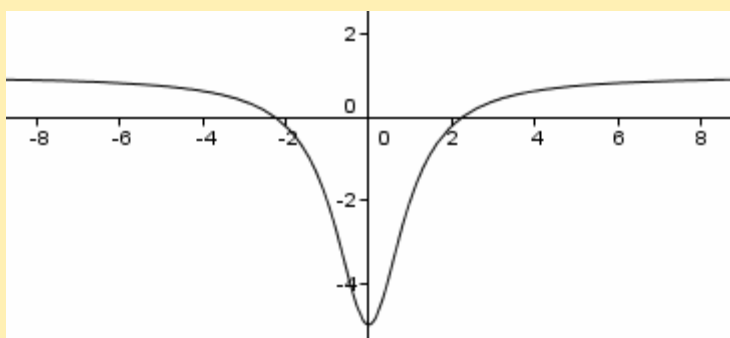
Nella figura, è rappresentata la funzione

$$y = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1}$$

col suo asintoto orizzontale "bilaterale"

$$y = 1.$$

fig. 21



Si possono anche avere
asintoti orizzontali "unilaterali".

Ad esempio, la funzione
rappresentata in figura 21b è

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + x}}$$

e poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2/3$$

possiamo dire che per questa funzione

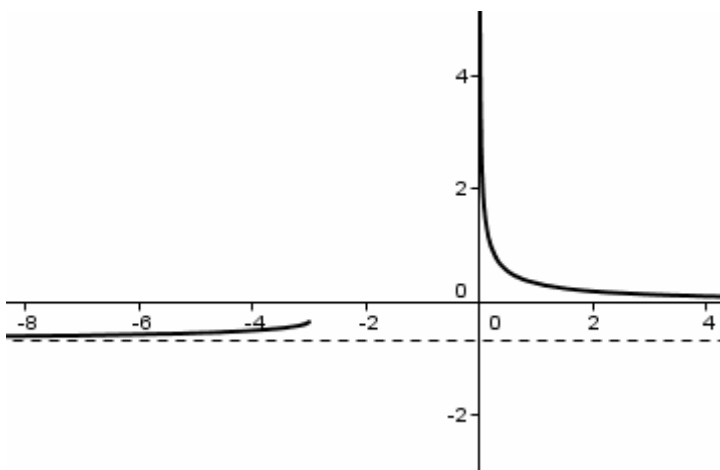
la retta $y = 0$

fa da asintoto orizzontale "destro",

e la retta $y = -2/3$

fa da asintoto orizzontale "sinistro".

fig. 21b



La figura 21c qui a fianco
mostra la funzione

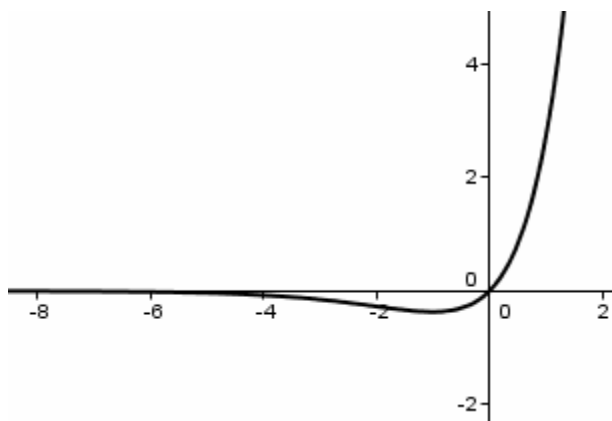
$$y = xe^x$$

che presenta soltanto

un asintoto orizzontale sinistro:

la retta $y = 0$.

fig. 21c



INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI ORIZZONTALI

Calcoliamo il limite della funzione data, per x che tende a $-\infty$ e per x che tende a $+\infty$ (ovviamente, ciò ha senso soltanto se il dominio della funzione è illimitato verso sinistra, o, rispettivamente, verso destra).

Se il limite che si trova è finito, ecco individuato un asintoto orizzontale.

Se invece tale limite non esiste oppure è infinito, niente asintoto orizzontale; tuttavia, in caso di limite infinito, potrà eventualmente esserci un asintoto obliquo.

Asintoti obliqui

La retta obliqua $y = mx + q$ è

“asintoto obliquo”

per la funzione $y = f(x)$

se e solo se la differenza

$$f(x) - [mx + q]$$

(ossia la differenza fra le ordinate dei due punti, sul grafico della funzione e sulla retta, aventi la stessa ascissa x), tende a zero quando x tende all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} BA = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

Un asintoto obliquo

può eventualmente anche essere “unilaterale”
(= soltanto “sinistro” o soltanto “destro”)

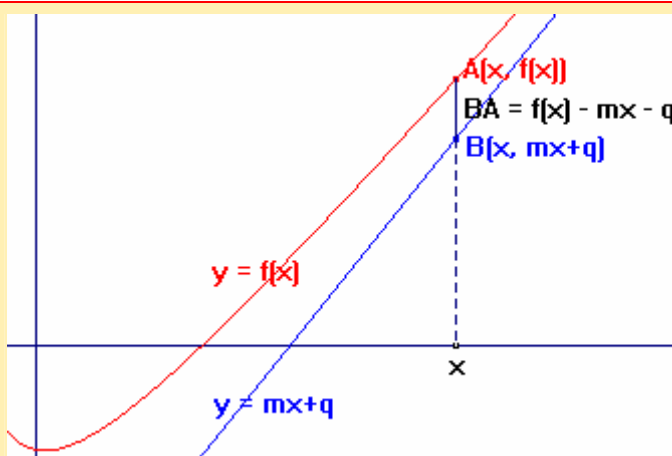


fig. 22a

Nella figura 22b è rappresentata la funzione

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$$

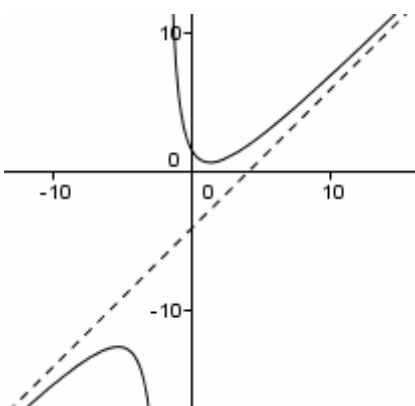
che ammette come asintoto obliquo (bilaterale)

la retta $y = x - 4$

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} - (x - 4) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x + 2} = 0$$

fig. 22b



INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI OBLIQUI

Innanzitutto, avrà senso ricercare un eventuale asintoto obliquo bilaterale/destro/sinistro per la funzione

$$y = f(x)$$

soltanto se si è constatato che la funzione tende a infinito quando x tende a $\infty / +\infty / -\infty$

Dopodiché, si ricorre al seguente

Teorema 11

La retta obliqua $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se e solo se

- esiste finito e diverso da zero il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$
- esiste finito il $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$ (dove m è il valore al quale si riferisce il punto a)

Pertanto per la ricerca si procede come segue:

- si calcola il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$;
se si trova che tale limite non esiste oppure è infinito oppure è nullo, allora l'asintoto obliquo non c'è;
se invece tale limite è finito e diverso da zero, lo si indica con m ...
- ... e poi si va a calcolare il $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$;
se si trova che tale limite non esiste oppure è infinito, allora l'asintoto obliquo non c'è;
se invece tale limite è finito, lo si indica con q ...
- ... e a questo punto resta stabilito che la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la $f(x)$.

ESEMPIO

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

per cui la f ammette come ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO la retta $y=1$.

Invece

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

per cui

la f POTREBBE avere un asintoto obliquo sinistro .

Calcoliamo il

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e constatiamo che

tale limite vale -2 .

Poiché

tale limite è finito e diverso da 0 ,

ha senso continuare.

Poniamo dunque

$$m = -2$$

e calcoliamo il

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x - (-2x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \dots = -1$$

Avendo trovato che

tale limite esiste finito ,

possiamo porre

$$q = -1$$

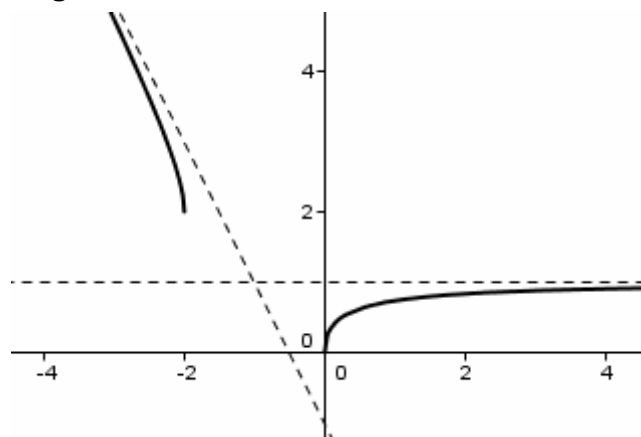
e affermare che la retta

la retta $y = -2x - 1$ è ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO

per la nostra funzione.

Ed ecco il grafico!!!

Fig. 22c



OSSERVAZIONE 1

nell'esporre il Teorema 11 e le successive indicazioni per la ricerca degli asintoti obliqui, abbiamo fatto tendere x a "infinito";
 se si pensa di far tendere invece x a "più infinito"
 o, rispettivamente, "meno infinito",
 tutto il discorso rimane valido
 e l'asintoto eventualmente trovato, invece di essere "bilaterale", è soltanto "unilaterale".
 A dire il vero, abbiamo già dato tutto ciò per acquisito quando abbiamo svolto l'esempio precedente.

OSSERVAZIONE 2

Per il calcolo del $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,

che, poiché la $f(x)$ tende a infinito, si presenterà come forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$,

si potrà utilizzare, volendo, il **Teorema di De l'Hospital**.

Tale teorema assicura che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \quad (\text{ammesso che esista il } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x))$$

e tutto ciò ha un preciso riscontro geometrico:

**se esiste il limite, per x che tende all'infinito, della derivata prima $f'(x)$, ciò significa che la "pendenza" della f , quando x tende all'infinito, tende ad un determinato valore;
 ora è del tutto evidente che, se la funzione ammette un asintoto obliquo,
 il valore al quale si avvicina la pendenza della $f(x)$
 debba coincidere con la pendenza che è propria dell'asintoto,
 ossia col coefficiente angolare m dell'asintoto stesso.**

OSSERVAZIONE 3

Per certe funzioni, accade che si verifichi la prima delle due condizioni a), b), ma non la seconda.

In questi casi, dunque, esiste finito e diverso da zero il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$

ma non esiste, oppure è infinito, il $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$

Si parla allora di una "**direzione asintotica**" m , **senza che ci sia asintoto**.

□ Esempio:

la funzione $y = x + \ln x$ ammette, per $x \rightarrow +\infty$, la direzione asintotica $m = 1$, perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\rightarrow 0} \right) = 1$$

ma non ammette asintoto obliquo, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \ln x - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$$

Dimostrazione del teorema 11**PRIMA PARTE**

Facciamo vedere che se la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la $f(x)$, allora risulta

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$$

Supponiamo dunque che la retta $y = mx + q$ sia asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$.

Allora, per definizione di asintoto obliquo, si avrà

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

e dunque, a maggior ragione,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$

da cui:

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - m - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - m \quad \left(\text{il } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} \text{ è } 0 \right)$$

Ma da

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - m$$

si ricava appunto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Essendo poi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

sarà anche

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$$

La dimostrazione di questa PRIMA PARTE è così completata.

SECONDA PARTE

Supponiamo che esistano finiti i due limiti

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$$

Vogliamo dimostrare che, considerata la retta $y = mx + q$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

e ciò significherà che la $y = mx + q$ fa da asintoto obliquo per la $f(x)$

In effetti, molto facilmente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - q] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] - q = q - q = 0$$

e con ciò la dimostrazione è davvero completata.