

3) 🎵 🎶 🎷 RIASSUNTO "PRATICO" DELLE IDEE FONDAMENTALI ESEMPI SVOLTI ED ESERCIZI

IN GENERALE

Supponiamo di voler determinare le caratteristiche e il grafico di una funzione, data la sua equazione $y = f(x)$.

Cosa occorrerà fare?

0)

Può darsi che il grafico della funzione f da studiare si possa ricavare con "manipolazioni"

a partire dal grafico

(già noto o comunque molto più facile da tracciare) di una funzione più semplice g .

Ad esempio, ciò avviene se f è della forma

$$g(x) + k, k \cdot g(x), g(x + k), g(kx),$$

$$a \cdot g(x) + b, g(ax + b), \frac{1}{g(x)}, |g(x)|,$$

$$\sqrt[n]{g(x)}, [g(x)]^n, a^{g(x)}, \log_a g(x), \text{ ecc.}$$

Bisogna comunque valutare *se valga la pena* di impostare un lavoro di questo tipo, tenendo conto della difficoltà delle manipolazioni; a volte, questo approccio "dà subito un'idea" - utilissima - dell'andamento della f , ricavato da quello della g , ma per la determinazione dei massimi, minimi ecc. sarà poi necessario ricorrere alle tecniche esposte ai punti successivi
[Approfondimento 1, pag. 53]

1)

Determinare il dominio D della funzione

2)

Chiedersi se la funzione

è pari: $f(-x) = f(x)$

e quindi ha grafico simmetrico rispetto all'asse y

dispari: $f(-x) = -f(x)$

e quindi ha grafico simmetrico rispetto all'origine

oppure non è né pari né dispari.

Nel caso la funzione sia pari o dispari, nelle varie fasi dello studio potremo e dovremo tenere presente la simmetria riscontrata; potremmo addirittura decidere di studiare la funzione solo per $x \geq 0$ e poi completarne il grafico per simmetria (la convenienza di procedere in questo modo dipende dalle nostre preferenze, e dalla particolare funzione di volta in volta considerata).

Chiedersi se la funzione è periodica;

in caso affermativo, basterà studiarla su di un intervallo di ampiezza T (essendo T il periodo).

[Approfondimento 2, pag. 53]

AD ESEMPIO ...

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$$

Nel nostro esempio, la costruzione del grafico "per manipolazione di una funzione-base" non è, evidentemente, realizzabile

$$x \neq 0 \quad D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

La funzione del nostro esempio

- non è pari perché $f(-x) \neq f(x)$
- non è dispari perché $f(-x) \neq -f(x)$
- e non è periodica.

3)

Determinare le intersezioni con gli assi

Per l'eventuale intersezione con l'asse **verticale** si porrà $x = 0$

(se, beninteso, l'ascissa 0 appartiene al dominio!) e si ricaverà il corrispondente valore di y

Per le eventuali intersezioni con l'asse **orizzontale** si dovrà porre $y = 0$, ossia risolvere l'equazione $f(x) = 0$.

4)

Studiare il segno della funzione

mediante la disequazione $f(x) > 0$

5)

Calcolare i limiti ai confini del dominio

Così facendo si troveranno anche, se esistono, gli asintoti verticali ed orizzontali

6)

Ricercare gli eventuali asintoti obliqui

Osserviamo che, evidentemente, avrà senso ricercare un eventuale asintoto obliquo per una funzione $y = f(x)$ soltanto se si è constatato che la funzione tende a infinito quando x tende a infinito.

Ricordiamo il Teorema sul quale si basa il procedimento di ricerca degli eventuali asintoti obliqui.

Teorema:

la retta obliqua $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se e solo se

a) esiste finito e diverso da zero il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$

b) esiste finito il $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$

[Approfondimento 3, pag. 53]

Ricercare

le eventuali intersezioni del grafico con gli asintoti.

Nel nostro esempio, il grafico della funzione non interseca l'asse verticale: essendo $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ non si può infatti porre $x = 0$

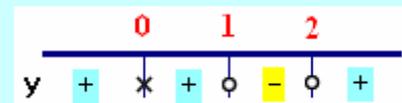
$$y = 0 \text{ quando } \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} = 0$$

$$x = 1 \vee x = 2$$

$$(1, 0) \quad (2, 0)$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x^2} > 0$$

$$x < 1 \text{ ma } x \neq 0, \quad x > 2$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1$$

Abbiamo dunque riconosciuto che la nostra funzione ha un asintoto orizzontale bilaterale (la retta $y = 1$) e ha un asintoto verticale (la retta di equazione $x = 0$, ossia l'asse y)

La funzione del nostro esempio non ha asintoti obliqui (ha invece, come abbiamo visto, un asintoto orizzontale bilaterale).

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$f(x)$ interseca il suo asintoto orizzontale $y = 1$ nel punto $(2/3, 1)$

7)

Calcolare la derivata prima $y' = f'(x)$.

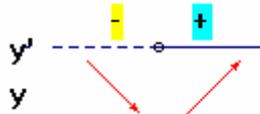
Risolvere l'equazione $f'(x) = 0$
per trovare i cosiddetti "punti stazionari"
(= punti in cui il grafico ha retta tangente orizzontale).

Studiare il segno della derivata prima

con la disequazione $f'(x) > 0$
stabilendo così gli intervalli in cui la funzione è
crescente o decrescente

$y' > 0 \rightarrow$ retta tang. in salita \rightarrow funz. crescente

$y' < 0 \rightarrow$ retta tang. in discesa \rightarrow funz. decrescente



e determinando i punti di massimo relativo
e minimo relativo interni al dominio, nonché
i punti di flesso orizzontale (ascendente o discendente).

Teniamo presente che
per l'analisi dei punti stazionari
esiste anche la risorsa del "metodo
della derivata seconda o delle derivate successive".

8)

Calcolare la derivata seconda $y'' = f''(x)$.

Risolvere l'equazione $f''(x) = 0$.
Quest'ultima fornisce, in generale,
le ascisse dei punti di flesso;

ricordiamo però che

non tutti i punti in cui si annulla la y''
risultano poi di flesso;

e, d'altra parte

(caso non frequentissimo, ma possibile:
basti pensare ai flessi verticali),

si possono avere pure dei flessi in cui
la y'' non si annulla.

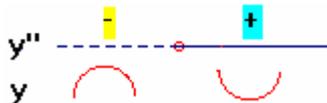
Studiare il segno della derivata seconda,

mediante la disequazione $f''(x) > 0$.

Tale studio permetterà di stabilire gli intervalli
in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa:

$y'' > 0 \rightarrow y'$ crescente \rightarrow funzione convessa

$y'' < 0 \rightarrow y'$ decrescente \rightarrow funzione concava



Può talvolta essere conveniente,
per la ricerca dei flessi non orizzontali,
il "metodo delle derivate successive".

In corrispondenza dei punti di flesso
a tangente non orizzontale,
converrà calcolare il valore della derivata prima,
per avere il coefficiente angolare della tangente di flesso,
e disegnare nel grafico "un pezzetto"
di tale tangente di flesso, con l'inclinazione esatta,
segnando accanto ad essa
il valore del suo coefficiente angolare m .

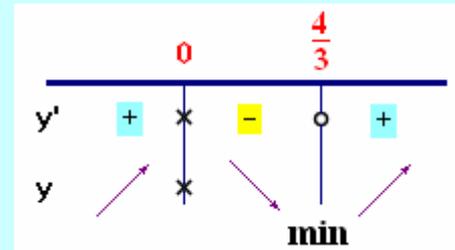
$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

$$y' = \frac{(2x - 3) \cdot x^2 - (x^2 - 3x + 2) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^2 - 4x}{x^4} = \frac{3x - 4}{x^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 4}{x^3} = 0 \quad x = \frac{4}{3}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 4}{x^3} > 0 \quad x < 0 \vee x > \frac{4}{3}$$



$$x = \frac{4}{3} \rightarrow y = \dots = -\frac{1}{8} \quad \min\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{8}\right)$$

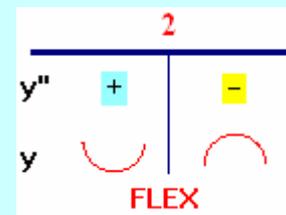
$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

$$y' = \frac{3x - 4}{x^3}$$

$$y'' = \frac{3 \cdot x^3 - (3x - 4) \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{-6x^3 + 12x^2}{x^6} = \frac{-6x + 12}{x^4}$$

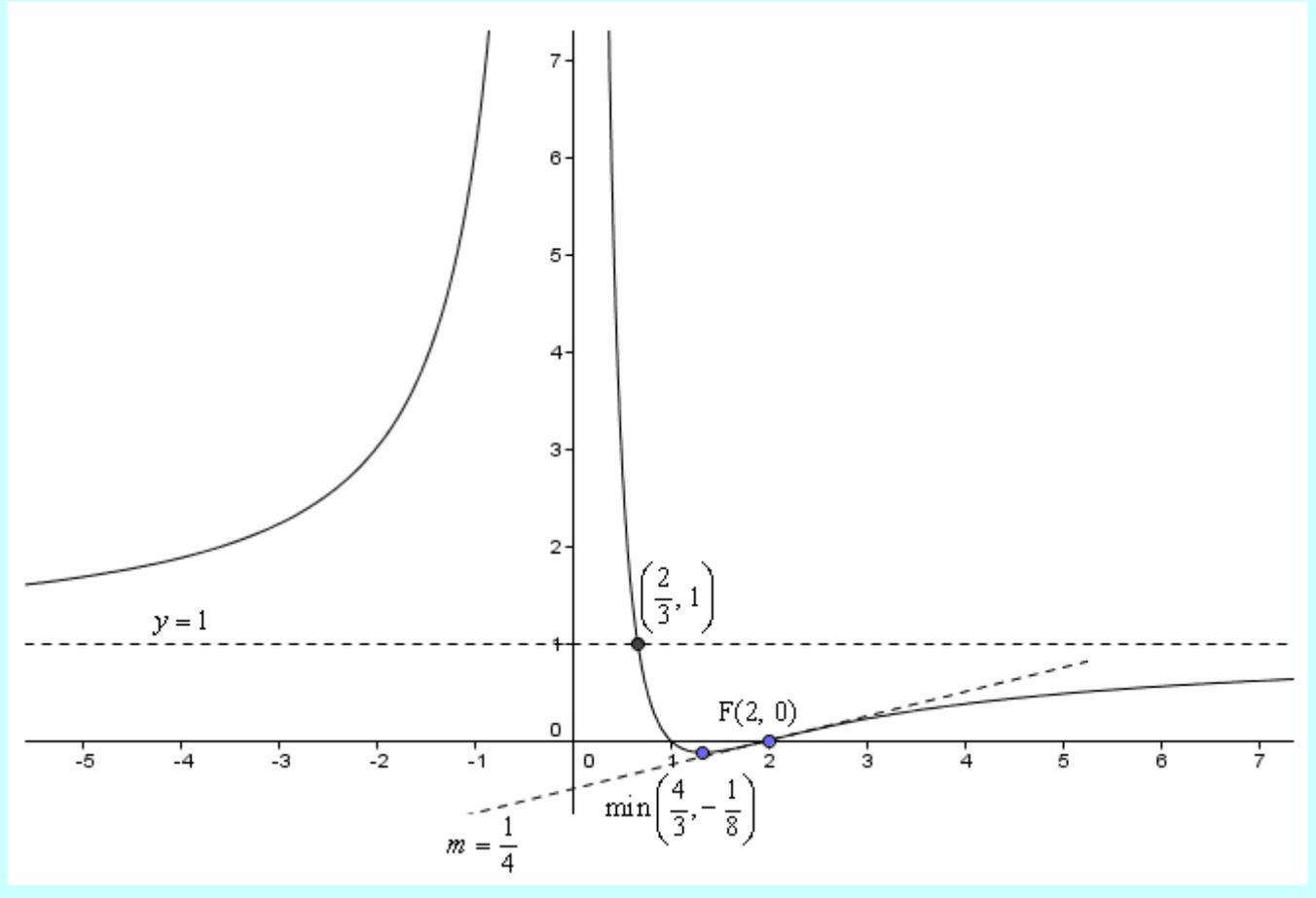
$$\frac{-6x + 12}{x^4} > 0 \quad x < 2$$



$$x = 2 \rightarrow y = 0 \quad F(2, 0)$$

$$y'(2) = \left[\frac{3x - 4}{x^3} \right]_{x=2} = \frac{6 - 4}{8} = \frac{1}{4}$$

Ed ecco il grafico!!!



Approfondimento 1

Sono facilmente costruibili per "manipolazione" i grafici di funzioni come le seguenti:

$$y = 2\ln(x-5); \quad y = \sqrt{\sin(3x)}; \quad y = \frac{1}{x^2-4}; \quad \dots$$

Approfondimento 2

Una funzione goniometrica è periodica.

Tieni presente che, se ad esempio si lavora sull'intervallo $[0; 2\pi]$,

sarà sempre conveniente, nei vari schemi,

andare anche "leggermente a sinistra di 0" e "leggermente a destra di 2π "

Approfondimento 3

Un esempio di funzione dotata di asintoto obliquo:

$$y = g(x) = \frac{x^2}{x-4}$$

Infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x-4} - 1 \cdot x \right] = 4 = q$$

La retta $y = x + 4$ è asintoto obliquo bilaterale per questa funzione