2. CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Inizieremo ora lo studio di alcune importantissime
funzioni angolari
(= quantità, come il *seno*, il *coseno*, la *tangente*, la *cotangente*,
il cui valore dipende dall'ampiezza di un angolo
- o, in modo equivalente, dalla misura di un arco).

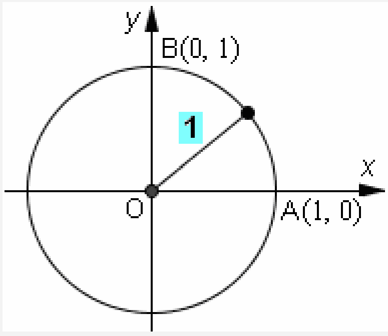
Questo studio viene chiamato "**GONIOMETRIA**"
(in greco, **gonos = angolo** e **metron = misura**)
oppure "**TRIGONOMETRIA**",
termine che è praticamente un sinonimo di "goniometria"
ma mette maggiormente in rilievo il fatto che, molto sovente,
interessa applicare le formule studiate ai tre angoli interni di un *triangolo*.

Lo strumento concettuale che è posto alla base della goniometria è la "**circonferenza goniometrica**".

Cos'è, dunque, la "**CIRCONFERENZA GONIOMETRICA**"?

E' una circonferenza

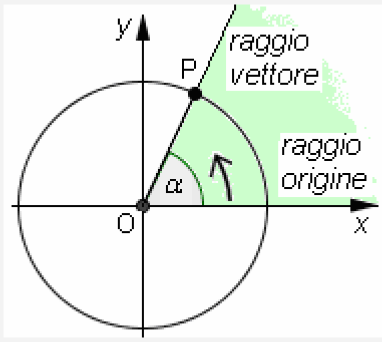
- **avente il centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani**
- **e (importantissimo!) RAGGIO UGUALE A 1**
  (cioè, raggio uguale all'unità di misura del sistema di riferimento).



S'intende che sulla circonferenza goniometrica
gli ANGOLI vadano sempre riportati

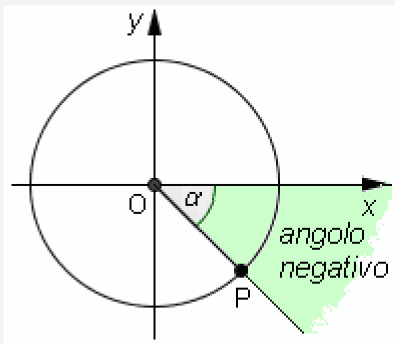
- **con vertice nel centro (= nell'origine)**
- **a partire dal semiasse delle ascisse positive**
  (che sarà dunque sempre il "primo lato" dell'angolo)
- **e in SENSO ANTIORARIO ↺.**

Il "primo lato" dell'angolo, ossia il semiasse delle ascisse positive,
viene anche detto "**raggio origine**" dell'angolo, mentre
il secondo lato (semiretta OP nella figura) è detto "**raggio vettore**".



Agli angoli riportati in senso ORARIO si assegna MISURA NEGATIVA:

ad esempio,
l'angolo qui a fianco raffigurato misurerà $-45°$
(oppure, in radianti, $-\frac{\pi}{4}$).

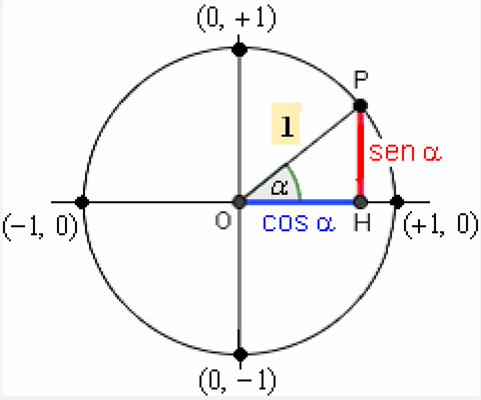


3. SENO E COSENO DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo un certo angolo α
(che di norma sarà compreso fra 0° e 360°, ma potrebbe pure essere negativo, o maggiore di 360°):
cosa intendiamo per "seno di α ($\operatorname{sen}\alpha$)" e per "coseno di α ($\cos\alpha$)" ?

Andiamo a considerare il punto P in cui il raggio vettore di α interseca la circonferenza goniometrica:

- ♪ **il SENO di α è, per definizione, l'ORDINATA di P,**
- ♫ **mentre il COSENO di α è, per definizione, l'ASCISSA di P.**



$\color{red}{\text{sen}\,\alpha}$ = ordinata di P = misura (con segno) di HP
$\color{blue}{\cos\alpha}$ = ascissa di P = misura (con segno) di OH

La circonferenza goniometrica ha, come abbiamo detto, centro nell'origine e raggio 1; quindi i suoi punti hanno

- ascissa che può andare da un minimo di -1 a un max di $+1$;
- ordinata che può andare, anch'essa, da un minimo di -1 a un massimo di $+1$.

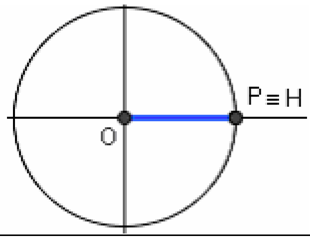
Pertanto **il seno e il coseno di un angolo α sono sempre compresi fra -1 e $+1$**:

$$\boxed{\forall\alpha,\quad -1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1 \quad -1 \le \cos\alpha \le 1}$$

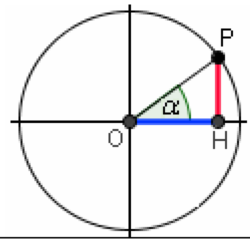
Si ha subito (Pitagora) la **1ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA**: qualunque sia l'angolo α (anche, eventualmente, con $\alpha > 360°$, o $\alpha < 0°$), è sempre

$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ NOTA: $\text{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ sono scritture abbreviate di: $(\text{sen}\,\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$

Per $\alpha = 0°$ (0 radianti)
$\text{sen}\,\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$

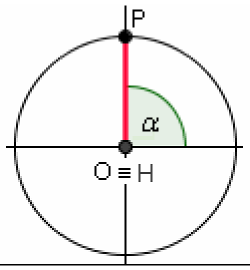


Nel $\boxed{1° \text{ quadrante}}$, ossia per $0° < \alpha < 90°$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, è $\boxed{\text{sen}\,\alpha > 0,\ \cos\alpha > 0}$

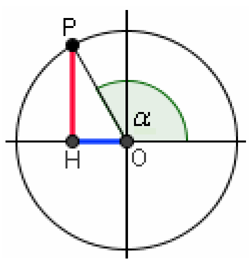


… e quando α cresce da 0° a 90°,
$\text{sen}\,\alpha$ cresce (da 0 a 1)
$\cos\alpha$ decresce (da 1 a 0)

Per $\alpha = 90°$ ($\pi/2$ radianti)
$\text{sen}\,\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$

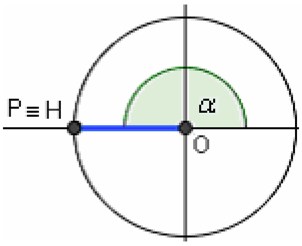


Nel $\boxed{2° \text{ quadrante}}$, ossia per $90° < \alpha < 180°$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, è $\boxed{\text{sen}\,\alpha > 0,\ \cos\alpha < 0}$

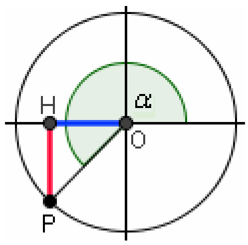


… e quando α cresce da 90° a 180°,
$\text{sen}\,\alpha$ decresce (da 1 a 0)
$\cos\alpha$ decresce (da 0 a -1)

Per $\alpha = 180°$ (π radianti)
$\text{sen}\,\alpha = 0$; $\cos\alpha = -1$

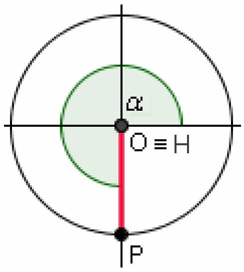


Nel $\boxed{3° \text{ quadrante}}$, ossia per $180° < \alpha < 270°$ $\left(\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi\right)$, è $\boxed{\text{sen}\,\alpha < 0,\ \cos\alpha < 0}$

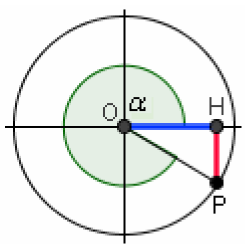


… e quando α cresce da 180° a 270°,
$\text{sen}\,\alpha$ decresce (da 0 a -1)
$\cos\alpha$ cresce (da -1 a 0)

Per $\alpha = 270°$ $\left(\dfrac{3}{2}\pi \text{ radianti}\right)$
$\text{sen}\,\alpha = -1$; $\cos\alpha = 0$



Nel $\boxed{4° \text{ quadrante}}$, ossia per $270° < \alpha < 360°$ $\left(\dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$, è $\boxed{\text{sen}\,\alpha < 0,\ \cos\alpha > 0}$

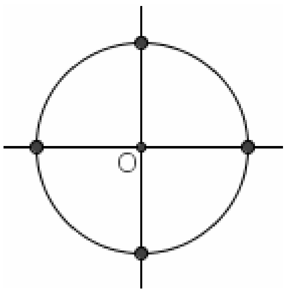


… e quando α cresce da 270° a 360°,
$\text{sen}\,\alpha$ cresce (da -1 a 0)
$\cos\alpha$ cresce (da 0 a 1)

Quando α raggiunge e poi supera i 360°, i valori di $\text{sen}\,\alpha$ e di $\cos\alpha$ "ripartono come se si ripartisse da 0°"; cioè, **le funzioni "seno" e "coseno" sono "periodiche di periodo 360°"**. Ne riparleremo.

Clicca QUI ⇨ per una bella figura "dinamica" (GeoGebra) sulla variazione di seno e coseno al variare dell'arco

ESERCIZI



1) Nella circonferenza goniometrica in figura

I) scrivi la coppia delle coordinate di ciascuno dei cinque punti evidenziati

II) disegna: a) l'angolo di 135°; b) quello che misura $\frac{7}{6}\pi$; c) quello di $-80°$

III) e disegna inoltre una coppia di angoli fra loro complementari: α e $90°-\alpha$ (potrebbero essere, ad esempio, 25° e 65° …) per constatare un fatto importante, che vale poi per qualsiasi valore di α, anche maggiore di 90° o di 180° o di 360°, anche negativo: si ha sempre

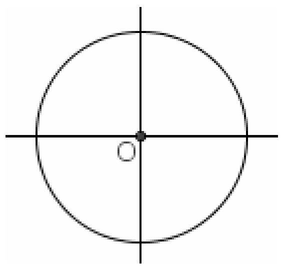
$\boxed{sen(90°-\alpha)=cos\,\alpha}$ e $\boxed{cos(90°-\alpha)=sen\,\alpha}$

PASSANDO DA UN ANGOLO AL SUO COMPLEMENTARE, I VALORI DI SENO E COSENO SI SCAMBIANO FRA LORO.

2) Sapendo che $sen\,43°\approx 0.68$, $cos\,43°\approx 0.73$, riempi i puntini: $sen\,47°\approx ...$, $cos\,47°\approx ...$

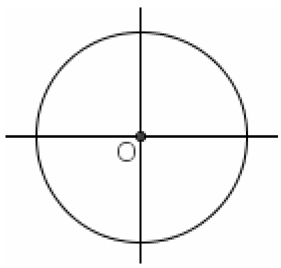
3) a) Noto il valore $sen\,\alpha$ del seno di un angolo, ci sono due modi per ricavare $cos\,\alpha$. Quali?
b) Determina: il coseno di un angolo ottuso il cui seno vale 0.39
c) Determina il seno di un angolo acuto il cui coseno vale 0.14

4) Quali sono gli angoli, compresi fra 0° e 360°,
a) il cui seno è uguale a 0? b) il cui coseno è uguale a 0? c) il cui seno è uguale a 1?
d) il cui coseno è uguale a 1? e) il cui seno è uguale a -1? f) il cui coseno è uguale a -1?
g) il cui seno è uguale al coseno? h) il cui seno è l'opposto del coseno?
i) Se un angolo α compreso fra 0° e 360° ha coseno <0, in quale intervallo di ampiezze può trovarsi?



5)

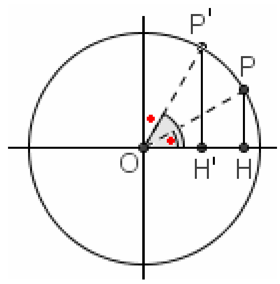
$sen\,122°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$cos\,122°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$sen\,180°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$cos\,180°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$sen\,214°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$cos\,214°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$sen\,270°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$cos\,270°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$sen\,355°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$
$cos\,355°$	è:	a) >0	b) <0	c) $=0$	d) $=+1$	e) $=-1$



6) Utilizzando una matita e una circonf. goniometrica, individua la risposta corretta:

$sen(\alpha+180°)=?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$sen(180°-\alpha)=?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$sen(90°-\alpha)=?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$sen(90°+\alpha)=?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$sen(-\alpha)=?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$cos(180°-\alpha)=?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$

RISPOSTE



1) III) In effetti, nella figura qui a destra, si ha: $P\hat{O}H=\alpha$, $P'\hat{O}H'=90°-\alpha$,
$PH=sen\,\alpha$, $OH=cos\,\alpha$, $P'H'=sen(90°-\alpha)$, $OH'=cos(90°-\alpha)$
e si può osservare (e dimostrare) che è $P'H'=OH$, $OH'=PH$

2) $sen\,47°=cos(90°-47°)=cos\,43°\approx 0.73$
$cos\,47°=sen(90°-47°)=sen\,43°\approx 0.68$

3) a) Primo modo: $cos\,\alpha=\pm\sqrt{1-sen^2\,\alpha}$ *dove il segno dev'essere deciso in base all'ampiezza dell'angolo*

Secondo modo: con la macchinetta, risalire dal seno all'angolo (tasto sen^{-1}), poi calcolare il coseno (cos)

b) ≈ -0.92 c) ≈ 0.99

4) a) 0°, 180°, 360° b) 90°, 270° c) 90° d) 0°, 360° e) 270°
f) 180° g) 45°, 225° h) 135°, 315° i) $90°<\alpha<270°$

5) $sen\,122°>0$, $cos\,122°<0$, $sen\,180°=0$, $cos\,180°=-1$, $sen\,214°<0$,
$cos\,214°<0$, $sen\,270°=-1$, $cos\,270°=0$, $sen\,355°<0$, $cos\,355°>0$

6) $sen(\alpha+180°)=-sen\,\alpha$, $sen(180°-\alpha)=sen\,\alpha$, $sen(90°-\alpha)=cos\,\alpha$,
$sen(90°+\alpha)=cos\,\alpha$, $sen(-\alpha)=-sen\,\alpha$, $cos(180°-\alpha)=-cos\,\alpha$