

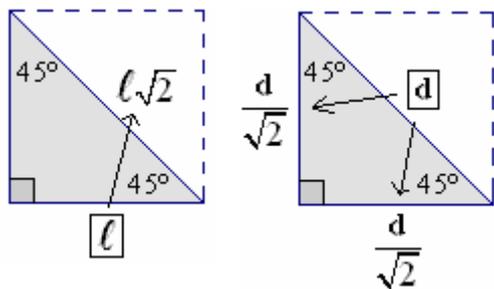
8. ALCUNE FORMULE UTILI

I valori delle funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente) degli angoli multipli di 30° o di 45° si possono trovare utilizzando le formule qui sotto riportate (facilmente ottenibili con semplici considerazioni di geometria elementare e utilizzando il T. di Pitagora). Esse permettono, nei cosiddetti “triangoli rettangoli particolari” (=quelli con gli angoli acuti di 30° e 60° , o di 45°), di ricavare tutti i lati conoscendo uno solo di essi.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 45°

(che può essere visto come la metà di un quadrato):

- L'IPOTENUSA E' UGUALE AL CATETO MOLTIPLICATO $\sqrt{2}$
- IL CATETO E' UGUALE ALL'IPOTENUSA DIVISO $\sqrt{2}$



Ricordiamo che

$$\sqrt{2} = 1.414213... \approx 1.4$$

L'espressione $\frac{d}{\sqrt{2}}$ viene di norma “razionalizzata”:

$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

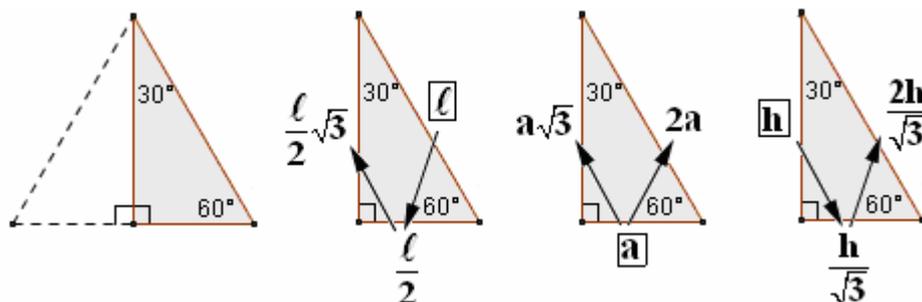
$$\text{Scrivendo } \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

noi non abbiamo alterato il valore dell'espressione di partenza $d/\sqrt{2}$, perché l'abbiamo moltiplicata per 1! L'abbiamo invece “razionalizzata”, cioè ci siamo liberati della radice a denominatore, ritenuta per varie ragioni fastidiosa.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 30° e 60°

(che può essere visto come la metà di un triangolo equilatero):

- IL CATETO MINORE E' META' DELL'IPOTENUSA e quindi l'ipotenusa è il doppio del cateto minore
- IL CATETO MAGGIORE E' UGUALE AL MINORE MOLTIPLICATO $\sqrt{3}$ e quindi: il cateto maggiore è uguale a metà ipotenusa moltiplicato $\sqrt{3}$ mentre il cateto minore è uguale al cateto maggiore diviso $\sqrt{3}$



Ricordiamo che

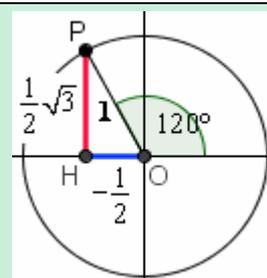
$$\sqrt{3} = 1.73205... \approx 1.7$$

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{3}$$

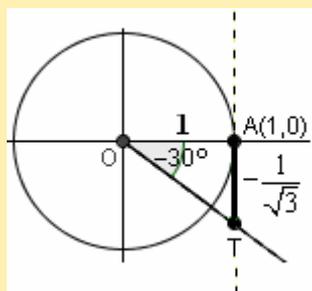
□ Quanto valgono $\sin 120^\circ$ e $\cos 120^\circ$?

Facciamo un disegno e ricordiamo che il raggio della circonf. goniometrica vale 1. I lati del triangolo rett. particolare OPH ($\widehat{POH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$) valgono dunque: 1 (l'ipotenusa OP); $\frac{1}{2}$ (il cateto minore OH); $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (il cateto maggiore HP).

Allora avremo, tenendo conto dei segni: $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

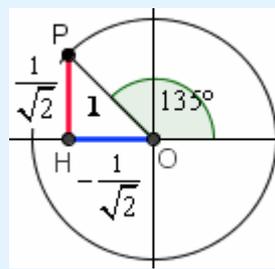


□ Quanto vale $\text{tg}(-30^\circ)$?



Questa volta il segmento noto è $OA = \text{raggio} = 1$.
Si trae subito, tenendo conto che T ha ordinata negativa, $\text{tg}(-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

□ Quanto valgono seno e coseno di 135° ?



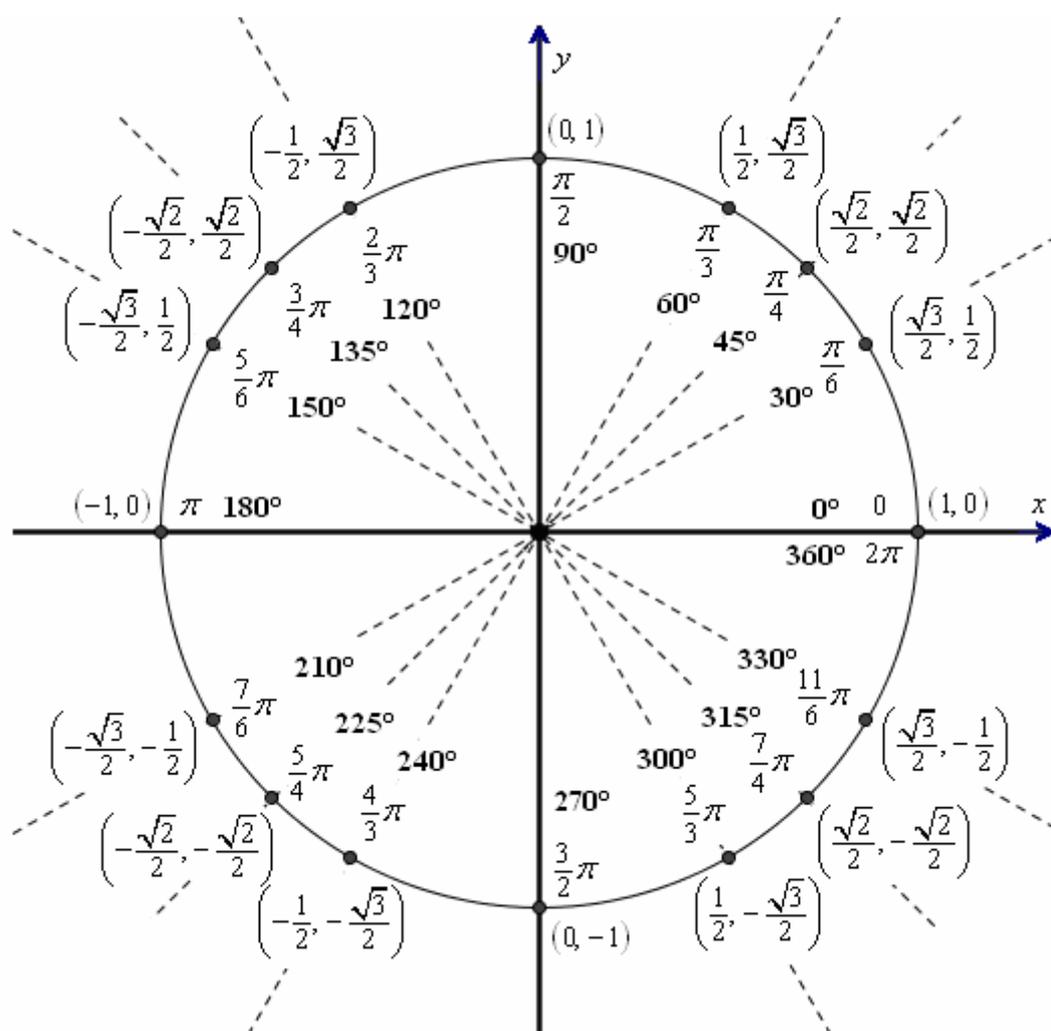
Il segmento noto è qui $OP = \text{raggio} = 1$. Il triangolo rett. POH ha gli angoli acuti di 45° . P ha ascissa negativa e ordinata positiva ...

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La seguente figura mostra i

VALORI DEL SENO E DEL COSENO DI ALCUNI ANGOLI "PARTICOLARI".



Il coseno

è la 1^a coordinata, ossia l'ascissa del punto; il seno è la 2^a coordinata, ossia l'ordinata.

Tanto per fare un esempio: l'angolo di 120° ha come misura in radianti

$$\frac{2}{3}\pi,$$

e, dato che il punto associato è

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

risulta

$$\begin{aligned} \cos 120^\circ &= \\ &= \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \\ &= \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ESERCIZI (risposte a pag. 16)

Tenendo coperta la figura qui sopra ☺, determina i valori seguenti:

- | | | | | | |
|-----------------------------|--|-----------------------------------|---|--|-----------------------------------|
| 1) $\sin 30^\circ$ | 2) $\cos 30^\circ$ | 3) $\operatorname{tg} 30^\circ$ | 4) $\sin 60^\circ$ | 5) $\cos 60^\circ$ | 6) $\operatorname{tg} 60^\circ$ |
| 7) $\sin 45^\circ$ | 8) $\cos 45^\circ$ | 9) $\operatorname{tg} 45^\circ$ | 10) $\sin 120^\circ$ | 11) $\cos 120^\circ$ | 12) $\operatorname{tg} 120^\circ$ |
| 13) $\sin 150^\circ$ | 14) $\cos 150^\circ$ | 15) $\operatorname{tg} 150^\circ$ | 16) $\sin 135^\circ$ | 17) $\cos 135^\circ$ | 18) $\operatorname{tg} 135^\circ$ |
| 19) $\sin 0^\circ$ | 20) $\cos 0^\circ$ | 21) $\sin 90^\circ$ | 22) $\cos 90^\circ$ | 23) $\sin 180^\circ$ | 24) $\cos 180^\circ$ |
| 25) $\sin 225^\circ$ | 26) $\cos 225^\circ$ | 27) $\operatorname{tg} 225^\circ$ | 28) $\sin 210^\circ$ | 29) $\cos 210^\circ$ | 30) $\operatorname{tg} 210^\circ$ |
| 31) $\sin 240^\circ$ | 32) $\cos 240^\circ$ | 33) $\operatorname{tg} 240^\circ$ | 34) $\sin 270^\circ$ | 35) $\cos 270^\circ$ | 36) $\operatorname{tg} 270^\circ$ |
| 37) $\cos 270^\circ$ | 38) $\sin 315^\circ$ | 39) $\cos 315^\circ$ | 40) $\sin(-60^\circ)$ | 41) $\cos 300^\circ$ | 42) $\operatorname{tg} 330^\circ$ |
| 43) $\operatorname{tg} \pi$ | 44) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | 45) $\sin \frac{\pi}{6}$ | 46) $\cos \frac{2}{3}\pi$ | 47) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{2}$ | 48) $\sin \frac{5}{4}\pi$ |
| 49) $\cos \frac{9}{4}\pi$ | 50) $\operatorname{tg} 780^\circ$ | 51) $\sin 630^\circ$ | 52) $\operatorname{tg} \frac{11}{6}\pi$ | 53) $\sin \frac{7}{6}\pi$ | 54) $\cos \frac{5}{3}\pi$ |

Stabilisci quali sono, nell'ambito del **primo giro** ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$), le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche (scrivi le soluzioni in **gradi**).

- | | | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 55) $\sin x = \frac{1}{2}$ | 56) $\sin x = -\frac{1}{2}$ | 57) $\cos x = \frac{1}{2}$ | 58) $\cos x = -\frac{1}{2}$ |
| 59) $\operatorname{tg} x = -1$ | 60) $\sin x = 0$ | 61) $\cos x = 0$ | 62) $\operatorname{tg} x = 0$ |
| 63) $\sin x = \cos x$ | 64) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ | 65) $\cos x = \sqrt{2}/2$ | 66) $\sin x + \cos x = 0$ |

RISPOSTE agli esercizi di pag. 15

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) $\sqrt{3}$
 7) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 8) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 9) 1 10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 11) $-\frac{1}{2}$ 12) $-\sqrt{3}$
 13) $\frac{1}{2}$ 14) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 15) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 16) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 17) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 18) -1
 19) 0 20) 1 21) 1 22) 0 23) 0 24) -1
 25) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 26) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 27) 1 28) $-\frac{1}{2}$ 29) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 30) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 31) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 32) $-\frac{1}{2}$ 33) $\sqrt{3}$ 34) -1 35) 0 36) non esiste
 37) 0 38) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 39) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 40) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 41) $\frac{1}{2}$ 42) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
 43) 0 44) -1 45) $\frac{1}{2}$ 46) $-\frac{1}{2}$ 47) non esiste 48) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
 49) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 50) $\sqrt{3}$ 51) -1 52) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 53) $-\frac{1}{2}$ 54) $\frac{1}{2}$

- 55) $x = 30^\circ, x = 150^\circ$
 56) $x = 210^\circ, x = 330^\circ$
 57) $x = 60^\circ, x = 300^\circ$
 58) $x = 120^\circ, x = 240^\circ$
 59) $x = 135^\circ, x = 315^\circ$
 60) $x = 0^\circ, x = 180^\circ, x = 360^\circ$
 61) $x = 90^\circ, x = 270^\circ$
 62) $x = 0^\circ, x = 180^\circ, x = 360^\circ$
 63) $x = 45^\circ, x = 225^\circ$
 64) $x = 120^\circ, x = 300^\circ$
 65) $x = 45^\circ, x = 315^\circ$
 66) $x = 135^\circ, x = 315^\circ$

5. Find to the *nearest degree*, the measure of an acute angle formed by the x -axis and the line containing the points (4,3) and (8,9).

Immagine a fianco:
 da www.regentsprep.org

*Grab your calculator
 for this question.*



Choose: 57 34 56

Answer