12. E' POSSIBILE, NOTA UNA DELLE QUATTRO FUNZIONI GONIOMETRICHE DI UN ANGOLO, DETERMINARE LE ALTRE?

La risposta è sostanzialmente affermativa; ci può essere, però, ambiguità nel segno.

Ad esempio, supponiamo di sapere che

$$\operatorname{sen}\alpha = 0.23\,.$$

La Prima Relazione Fondamentale della Trigonometria ci consente di scrivere

$$\cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$$

quindi

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \pm\sqrt{1-(0.23)^2} = \pm\sqrt{1-0.0529} = \pm\sqrt{0.9471} \approx \pm 0.9732$$

Dei due possibili valori, il positivo e il negativo, quale sarà quello giusto?
Beh, dipende:
se si sa per certo che l'angolo α è compreso fra 0° e 90°, il valore che va bene sarà quello positivo;
se l'angolo α è compreso fra 90° e 180°, dei valori trovati si prenderà quello negativo;
insomma, la scelta del $+$ o del $-$ va fatta a seconda dell'intervallo
nel quale sappiamo, o supponiamo, o desideriamo, che possa variare l'ampiezza dell'angolo.
Eventualmente, si potrà scegliere di lasciare il doppio segno
se si vogliono considerare, per l'ampiezza, tutte le possibilità.

Dunque, vediamo come si risolve il problema in generale.

- Noto $\operatorname{sen}\alpha$, si può ricavare $\cos\alpha$ con la formula $\boldsymbol{\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$,

  dopodiché si avrà subito $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$ e $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ oppure $\boldsymbol{\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$.

  Nel nostro esempio, nel quale era inizialmente noto $\operatorname{sen}\alpha = 0.23$,

  dopo aver ricavato $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \approx \pm 0.9732$ calcoleremo:

  $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \approx \frac{0.23}{\pm 0.9732} \approx \pm 0.2363 \quad \text{e poi} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{1}{\pm 0.2363} \approx \pm 4.23$$

- Nel caso sia noto $\cos\alpha$, il procedimento è del tutto analogo:

  $\boldsymbol{\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$, poi $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$ e $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ oppure $\boldsymbol{\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$.

- E se invece la funzione angolare che si conosce inizialmente è $\operatorname{tg}\alpha$?

  Supponiamo di sapere che $\operatorname{tg}\alpha = m$, essendo m un valore noto.

  Allora avremo $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = m$; ma sappiamo pure che è $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

  quindi possiamo impostare il sistema

  $$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = m \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

  che consentirà di determinare $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

  Supponiamo ad esempio che sia $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$. Potremo scrivere

  $$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4} \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{4}\cos\alpha \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{4}\cos\alpha \\ \dfrac{9}{16}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \dfrac{25}{16}\cos^2\alpha = 1;\ \cos^2\alpha = \dfrac{16}{25};\ \cos\alpha = \pm\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

  $$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{4}{5} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{\cancel{4}}\cdot\dfrac{\cancel{4}}{5} = \dfrac{3}{5} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{4}{5} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{\cancel{4}}\cdot\left(-\dfrac{\cancel{4}}{5}\right) = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

  Ovviamente, da $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ segue subito $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{4}{3}$.

ESERCIZI

1) E' noto che $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ e che $0 < \alpha < 90°$. Determinare $\text{sen}\,\alpha,\ \text{tg}\,\alpha,\ \text{cotg}\,\alpha$

2) E' noto che $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$ e che $90 < \alpha < 180°$. Determinare $\cos\alpha,\ \text{tg}\,\alpha,\ \text{cotg}\,\alpha$

3) E' noto che $\cos\alpha = -0.8$ e che $180° < \alpha < 270°$. Determinare $\text{sen}\,\alpha,\ \text{tg}\,\alpha,\ \text{cotg}\,\alpha$

4) Se si sa che $\text{tg}\,\alpha = \frac{7}{24}$. Determinare $\text{sen}\,\alpha,\ \cos\alpha$

5) $\text{tg}\,x = -0.5,\quad \pi < x < 2\pi$. Quanto valgono $\text{sen}\,x,\ \cos x$?

6) Si sa che $\cos x = 0$. Quanto valgono $\text{sen}\,x$ e $\text{tg}\,x$?

Stabilisci quali sono, nell'ambito del **primo giro** ($0 \le x \le 2\pi$),
le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche (scrivi le soluzioni in **radianti**).

7) $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 8) $\text{sen}\,x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 9) $\cos x = -1$ 10) $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

11) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 12) $\text{sen}\,x = -1$ 13) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$ 14) $\text{sen}\,x = -\cos x$

15) $\cos x = -\sqrt{3}/2$ 16) $\text{cotg}\,x = \sqrt{3}$ 17) $\text{tg}\,x = -1$ 18) $\text{sen}\,x = 1$

19) Elenca gli angoli individuati dalla scrittura $60° + \text{k}\cdot 360°,\ \text{con k} = -1, 0, 1, 2, 3$

20) Elenca gli angoli individuati dalla scrittura $30° + \text{k}\cdot 180°,\ \text{con k} = -1, 0, 1, 2, 3$

21) Elenca gli angoli individuati dalla scrittura $\text{k}\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{con k} = 0, 1, 2, 3, 4$

22) Elenca gli angoli individuati dalla scrittura $\frac{\pi}{4} + \text{k}\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{con k} = 0, 1, 2, 3$

23) Sapresti scrivere un'equazione goniometrica che sia soddisfatta da tutti e soli gli archi $x = \frac{\pi}{4} + \text{k}\pi,\ \text{k} \in \mathbb{Z}$?

24) Sapresti scrivere un'equazione goniometrica che sia soddisfatta da tutti e soli gli archi $x = \frac{3}{2}\pi + 2\text{k}\pi,\ \text{k} \in \mathbb{Z}$?

RISPOSTE

1) $\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17},\ \text{tg}\,\alpha = \frac{15}{8},\ \text{cotg}\,\alpha = \frac{8}{15}$

2) $\cos\alpha = -\frac{12}{13},\ \text{tg}\,\alpha = -\frac{5}{12},\ \text{cotg}\,\alpha = -\frac{12}{5}$

3) $\text{sen}\,\alpha = -0.6,\ \text{tg}\,\alpha = 0.75,\ \text{cotg}\,\alpha = 1.33333...$

4) $\text{sen}\,\alpha = \frac{7}{25}$ e $\cos\alpha = \frac{24}{25}$ oppure $\text{sen}\,\alpha = -\frac{7}{25}$ e $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$

5) $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

6) $\text{sen}\,x$ può valere $+1$ oppure -1. In entrambi i casi, $\text{tg}\,x$ non esiste.

7) $x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2}{3}\pi$ 8) $x = \frac{5}{4}\pi,\ x = \frac{7}{4}\pi$ 9) $x = \pi$

10) $x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{7}{6}\pi$ 11) $x = \frac{3}{4}\pi,\ x = \frac{5}{4}\pi$ 12) $x = \frac{3}{2}\pi$

13) $x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{4}{3}\pi$ 14) $x = \frac{3}{4}\pi,\ x = \frac{7}{4}\pi$ 15) $x = \frac{5}{6}\pi,\ x = \frac{7}{6}\pi$

16) $x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{7}{6}\pi$ 17) $x = \frac{3}{4}\pi,\ x = \frac{7}{4}\pi$ 18) $x = \frac{\pi}{2}$

19) $-300°, 60°, 420°, 780°, 1140°$ 20) $-150°, 30°, 210°, 390°, 570°$

21) $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ 22) $\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

23) $\text{tg}\,x = 1$ (oppure $\text{sen}\,x = \cos x$) 24) $\text{sen}\,x = -1\quad \left(\frac{3}{2}\pi + 2\text{k}\pi = \frac{3}{2}\pi + \text{k}\cdot 2\pi\right)$