

## 17. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Sono quelle della forma

$$\text{sen } x = q \quad \text{cos } x = q \quad \text{tg } x = q \quad \text{cotg } x = q$$

essendo  $q$  un numero reale assegnato.

Facciamo qualche esempio.

a)  $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

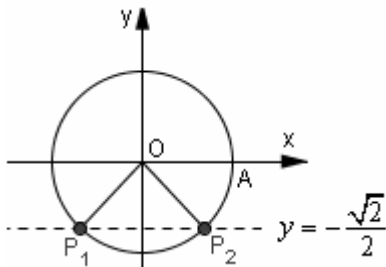
Devo trovare quegli archi  $x$  il cui seno è  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Disegno dunque, o comunque mi figuro nella mente, la circonferenza goniometrica:

il seno è un' ORDINATA, è l'ordinata di un punto (l'estremo dell'arco) sulla circonferenza goniometrica, quindi

*si tratta di andare a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ordinata  $-\sqrt{2}/2$  per stabilire quali sono gli archi di cui questi punti rappresentano l'estremo terminale.*

Volendo, a tale scopo, si può pensare di trovare le intersezioni fra la circonferenza goniometrica (di raggio 1) e la retta di ordinata costante  $y = -\sqrt{2}/2$  ( $-\sqrt{2}/2$  vale circa  $-0.7$ ):



Ricordandoci a questo punto anche le formule sui triangoli rettangoli particolari,

comprendiamo che i due archi in questione sono  $\frac{5}{4}\pi$  (arco  $\widehat{AP_1}$ ) e  $\frac{7}{4}\pi$  (arco  $\widehat{AP_2}$ )

e scriviamo in definitiva, tenendo conto che il seno è una funzione periodica di periodo  $2\pi$

(quindi il suo valore non cambia se l'arco viene aumentato o diminuito di  $2\pi$  o di un multiplo di  $2\pi$ ):

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \text{ essendo } k \text{ un intero relativo arbitrario } (k \in \mathbb{Z}).$$

In alternativa, potevamo anche “vedere” il punto  $P_2$  come il secondo estremo dell'arco negativo  $-\frac{\pi}{4}$ ,

scrivendo dunque le soluzioni sotto la forma alternativa

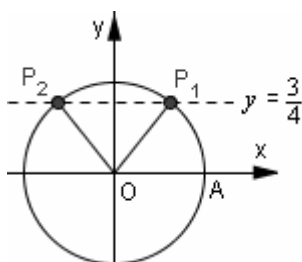
$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Controlliamo bene: in effetti le due scritture  $\frac{7}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  e  $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

“generano”, al variare di  $k$ , lo stesso insieme di valori:

$k$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	..
$\frac{7}{4}\pi + 2k\pi$	...	$-\frac{17}{4}\pi$	$-\frac{9}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$	$\frac{23}{4}\pi$	$\frac{31}{4}\pi$	...
$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$	...	$-\frac{25}{4}\pi$	$-\frac{17}{4}\pi$	$-\frac{9}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$	$\frac{23}{4}\pi$	...

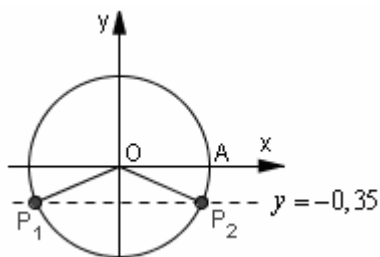
b)  $\text{sen } x = \frac{3}{4}$



$$x = \text{arc sen } \frac{3}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \text{arc sen } \frac{3}{4} + 2k\pi$$

In figura:  $\text{arc sen } \frac{3}{4} = \widehat{AP_1}$ ,  $\pi - \text{arc sen } \frac{3}{4} = \widehat{AP_2}$

c)  $\text{sen } x = -0,35$



Puoi controllare che anche in questo caso si ha, come nell'es. b),

$$x = \text{arc sen}(-0,35) + 2k\pi \vee x = \pi - \text{arc sen}(-0,35) + 2k\pi$$

$$\text{arc sen}(-0,35) = \widehat{AP_2} \text{ (da A fino a } P_2 \text{ in verso orario = negativo)}$$

$$\pi - \text{arc sen}(-0,35) = \widehat{AP_1}$$

Ricordando che  $\text{arc sen}(-t) = -\text{arc sen } t$ ,

le soluzioni si possono, più elegantemente, riscrivere come

$$x = -\text{arc sen } 0,35 + 2k\pi \vee x = \pi + \text{arc sen } 0,35 + 2k\pi$$

**I precedenti tre esempi a), b), c)**  
mostrano che, in generale,

l'equazione goniometrica elementare  $\text{sen } x = q \quad (-1 \leq q \leq 1)$

avrà come soluzioni  $x = \text{arc sen } q + 2k\pi \vee x = \pi - \text{arc sen } q + 2k\pi$

d)  $\text{sen } x = 2$  Evidentemente, questa equazione è IMPOSSIBILE

e)  $\text{sen } x = 1$   $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

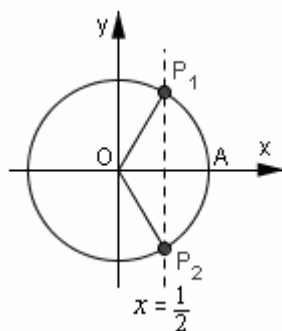
f)  $\text{sen } x = 0$  Le soluzioni di questa equazione si possono scrivere sotto la forma  $x = k\pi$

g)  $\text{sen } x = -1$   $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

h)  $\text{cos } x = \frac{1}{2}$

Il coseno è un'ASCISSA, è l'ascissa di un punto (l'estremo dell'arco) sulla circonferenza goniometrica, quindi si tratta di andare a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ascissa  $1/2$  per stabilire quanto valgono, in radianti, gli archi corrispondenti.

Tali punti sono le intersezioni fra la circonferenza goniometrica e la retta di ascissa costante  $x = 1/2$ .



Ricordandoci a questo punto anche le formule sui triangoli rettangoli particolari, comprendiamo che i due archi in questione sono

$$\frac{\pi}{3} \text{ (arco } \widehat{AP_1}) \text{ e } -\frac{\pi}{3} \text{ (arco } \widehat{AP_2}), \text{ pensando di andare da A a } P_2 \text{ in senso orario;}$$

$$\text{volendo si può anche pensare all'arco positivo } \frac{5}{3}\pi$$

e scriviamo in definitiva, tenendo conto della periodicità del coseno,

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ essendo } k \text{ un intero relativo arbitrario } (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Alternativa meno elegante: } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

i)  $\text{cos } x = 0,81$   $x = \pm \text{arc cos } 0,81 + 2k\pi$

j)  $\text{cos } x = -0,2$   $x = \pm \text{arc cos}(-0,2) + 2k\pi = \pi \mp \text{arc cos } 0,2 + 2k\pi$

**I precedenti tre esempi h), i), j)**  
mostrano che, in generale,

l'equazione goniometrica elementare  $\text{cos } x = q \quad (-1 \leq q \leq 1)$

avrà come soluzioni  $x = \pm \text{arc cos } q + 2k\pi$

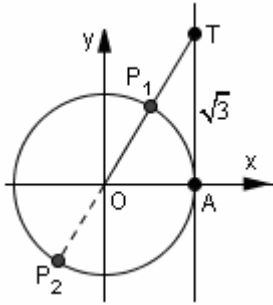
k)  $\text{cos } x = 2$  IMPOSSIBILE

l)  $\text{cos } x = 1$   $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

m)  $\text{cos } x = 0$   $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

n)  $\text{cos } x = -1$   $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$ , ossia: multipli dispari di  $\pi$

o)  $tg x = \sqrt{3}$



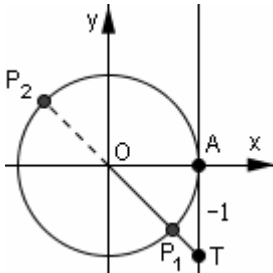
Nell'ambito del 1° giro, le soluzioni sono i due archi

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4}{3}\pi;$$

in generale, tenendo conto del fatto che la tangente è periodica di periodo “mezzo giro” ( $\pi$ ) le soluzioni saranno rappresentabili dalla scrittura

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

p)  $tg x = -1$



Fra gli archi soluzione,

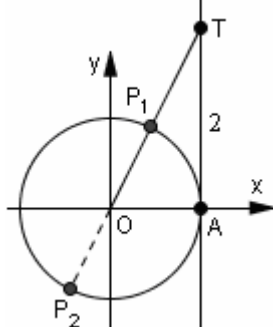
quello che è più spontaneo considerare è senz'altro  $x = -\pi/4$ .

L'altro arco soluzione in figura è  $x = \frac{3}{4}\pi = -\frac{\pi}{4} + \pi$ .

La tangente è periodica di periodo “mezzo giro” ( $\pi$ ) per cui le soluzioni possono essere indicate dalla scrittura

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

q)  $tg x = 2$



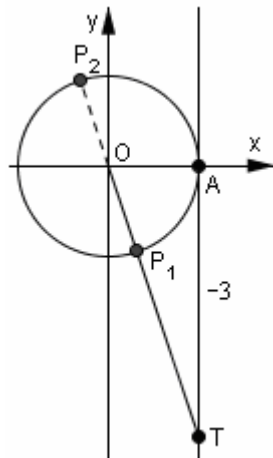
$$x = \text{arc tg } 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Nella figura,

$$\widehat{AP_1} = \text{arc tg } 2$$

$$\widehat{AP_2} = \text{arc tg } 2 + \pi$$

r)  $tg x = -3$



$$x = \text{arc tg } (-3) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Nella figura,

$$\widehat{AP_1} \text{ (senso orario)} = \text{arc tg } (-3)$$

$$\widehat{AP_2} = \text{arc tg } (-3) + \pi$$

Tenendo presente che  $\text{arc tg } (-q) = -\text{arc tg } q$

Possiamo riscrivere l'insieme delle soluzioni nella forma più elegante

$$x = -\text{arc tg } 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**I precedenti quattro esempi o), p), q), r) mostrano che, in generale,**

**per risolvere l'equazione goniometrica elementare  $tg x = q$**

**“BASTA GUARDARE LA SOLA METÀ DESTRA DELLA TORTA”**

**(quella che si riferisce agli archi tra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$ )**

**e scrivere che le soluzioni sono  $x = \text{arc tg } q + k\pi$**

s)  $tg x = 0 \quad x = 0 + k\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

In questa rassegna di equazioni elementari, **volutamente evitiamo di inserire la tipologia  $\cotg x = q$** ;

d'altronde, per la 3ª Rel. Fond.,  **$\cotg x = q$  si può risolvere trasformandola nell'equivalente  $tg x = 1/q$** .

**ESERCIZI**

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari (soluzioni in radianti, anche fuori dal "1° giro"):

- |   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 1) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  | 2) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  | 3) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  | 4) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$         |
| 5) $\operatorname{sen} x = 1$                   | 6) $\operatorname{sen} x = 0$                   | 7) $\operatorname{sen} x = -1$                   | 8) $\operatorname{sen} x = -2$                   |
| 9) $\operatorname{sen} x = 0.6$                 | 10) $\operatorname{sen} x = -0.3$               | 11) $\operatorname{sen} x = 0.5$                 | 12) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| 13) $\operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$        | 14) $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{2}$       | 15) $\operatorname{cos} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 16) $\operatorname{cos} x = 1$                   |
| 17) $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 18) $\operatorname{cos} x = \sqrt{3}$           | 19) $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  | 20) $\operatorname{cos} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 21) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  | 22) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 23) $\operatorname{tg} x = 1$                    | 24) $\operatorname{tg} x = 0$                    |
| 25) $\operatorname{tg} x = 1000$                | 26) $\operatorname{tg} x = -0,01$               | 27) $\operatorname{cotg} x = 1/\sqrt{3}$         | 28) $\operatorname{cotg} x = -1$                 |
| 29) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{4}$        | 30) $\operatorname{cos} x = \frac{1}{4}$        | 31) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$          | 32) $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{4}$        |
| 33) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{4}$       | 34) $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{4}$       | 35) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}$         | 36) $\operatorname{cotg} x = -\frac{1}{4}$       |

**SOLUZIONI** (s'intende che  $k$  sia un intero relativo arbitrario:  $k \in \mathbb{Z}$ )

- |   |   |                                      |                             |
|---|---|--------------------------------------|-----------------------------|
| 1) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$  | 2) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$  |                                      |                             |
| 3) $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$ (oppure: $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ )   |   |                                      |                             |
| 4) $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ (oppure: $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ )  |   |                                      |                             |
| 5) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  | 6) $x = k\pi$   | 7) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$      | 8) impossibile              |
| 9) $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.6 + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.6 + 2k\pi$   |   |                                      |                             |
| 10) $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (-0.3) + 2k\pi = -\operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.3 + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} (-0.3) + 2k\pi = \pi + \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.3 + 2k\pi$   |   |                                      |                             |
| 11) $0.5 = \frac{1}{2}$ quindi: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$   |   |                                      |                             |
| 12) $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2k\pi = -\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2k\pi = \pi + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi$ |   |                                      |                             |
| 13) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$   | 14) $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$  | 15) $x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ | 16) $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$ |
| 17) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$   | 18) impossibile   |                                      |                             |
| 19) $x = \pm \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{\sqrt{3}}{3} + 2k\pi$  | 20) $x = \pm \operatorname{arc} \operatorname{cos} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2k\pi = \pi \mp \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{\sqrt{3}}{3} + 2k\pi$ |                                      |                             |
| 21) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  | 22) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$   | 23) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$       | 24) $x = k\pi$              |
| 25) $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1000 + k\pi$  | 26) $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-0.01) + k\pi = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0.01 + k\pi$   |                                      |                             |
| 27) $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; x = \frac{\pi}{3} + k\pi$   | 28) $\operatorname{cotg} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  |                                      |                             |
| 29) $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + 2k\pi$  | 30) $x = \pm \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{1}{4} + 2k\pi$   |                                      |                             |
| 31) $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + k\pi$   | 32) $x = \operatorname{arctg} 4 + k\pi$   |                                      |                             |
| 33) $x = -\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + 2k\pi \vee x = \pi + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + 2k\pi$   | 34) $x = \pi \mp \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{1}{4} + 2k\pi$   |                                      |                             |
| 35) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + k\pi$  | 36) $x = -\operatorname{arctg} 4 + k\pi$  |                                      |                             |