

17. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Sono quelle della forma

$$\operatorname{sen} x = q \quad \operatorname{cos} x = q \quad \operatorname{tg} x = q \quad \operatorname{cotg} x = q$$

essendo q un numero reale assegnato.

Facciamo qualche esempio.

a) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

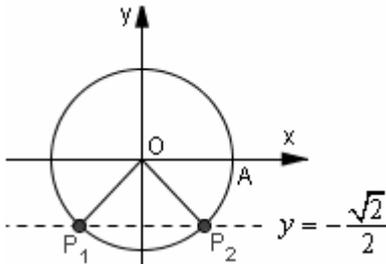
Devo trovare quegli archi x il cui seno è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Disegno dunque, o comunque mi figuro nella mente, la circonferenza goniometrica:

il seno è un' ORDINATA, è l'ordinata di un punto (l'estremo dell'arco) sulla circonferenza goniometrica, quindi

si tratta di andare a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ordinata $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ per stabilire quali sono gli archi di cui questi punti rappresentano l'estremo terminale.

Volendo, a tale scopo, si può pensare di trovare le intersezioni fra la circonferenza goniometrica (di raggio 1) e la retta di ordinata costante $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$ vale circa -0.7):



Ricordandoci a questo punto anche le formule sui triangoli rettangoli particolari,

comprendiamo che i due archi in questione sono $\frac{5}{4}\pi$ (arco $\widehat{AP_1}$) e $\frac{7}{4}\pi$ (arco $\widehat{AP_2}$)

e scriviamo in definitiva, tenendo conto che il seno è una funzione periodica di periodo 2π

(quindi il suo valore non cambia se l'arco viene aumentato o diminuito di 2π o di un multiplo di 2π):

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \text{ essendo } k \text{ un intero relativo arbitrario } (k \in \mathbb{Z}).$$

In alternativa, potevamo anche “vedere” il punto P_2 come il secondo estremo dell'arco negativo $-\frac{\pi}{4}$,

scrivendo dunque le soluzioni sotto la forma alternativa

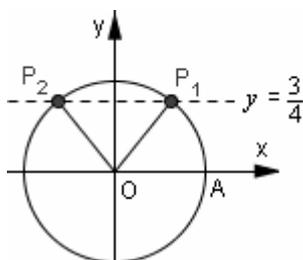
$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Controlliamo bene: in effetti le due scritture $\frac{7}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

“generano”, al variare di k , lo stesso insieme di valori:

k	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	..
$\frac{7}{4}\pi + 2k\pi$...	$-\frac{17}{4}\pi$	$-\frac{9}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$	$\frac{23}{4}\pi$	$\frac{31}{4}\pi$...
$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$...	$-\frac{25}{4}\pi$	$-\frac{17}{4}\pi$	$-\frac{9}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$	$\frac{23}{4}\pi$...

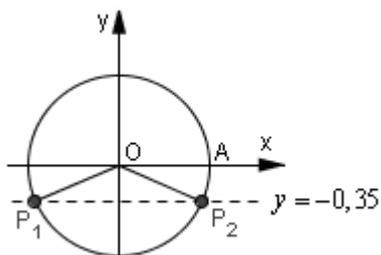
b) $\operatorname{sen} x = \frac{3}{4}$



$$x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{4} + 2k\pi$$

In figura: $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{4} = \widehat{AP_1}$, $\pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{4} = \widehat{AP_2}$

c) $\text{sen } x = -0,35$



Puoi controllare che anche in questo caso si ha, come nell'es. b),

$$x = \text{arc sen}(-0,35) + 2k\pi \vee x = \pi - \text{arc sen}(-0,35) + 2k\pi$$

$$\text{arc sen}(-0,35) = \widehat{AP_2} \text{ (da A fino a } P_2 \text{ in verso orario = negativo)}$$

$$\pi - \text{arc sen}(-0,35) = \widehat{AP_1}$$

Ricordando che $\text{arc sen}(-t) = -\text{arc sen } t$,

le soluzioni si possono, più elegantemente, riscrivere come

$$x = -\text{arc sen } 0,35 + 2k\pi \vee x = \pi + \text{arc sen } 0,35 + 2k\pi$$

I precedenti tre esempi a), b), c)
mostrano che, in generale,

l'equazione goniometrica elementare $\boxed{\text{sen } x = q \quad (-1 \leq q \leq 1)}$

avrà come soluzioni $\boxed{x = \text{arc sen } q + 2k\pi \vee x = \pi - \text{arc sen } q + 2k\pi}$

d) $\text{sen } x = 2$ Evidentemente, questa equazione è IMPOSSIBILE

e) $\text{sen } x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

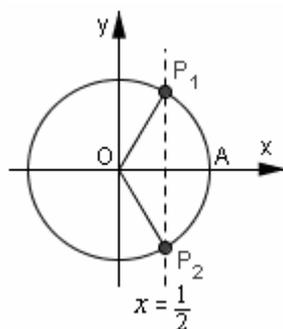
f) $\text{sen } x = 0$ Le soluzioni di questa equazione si possono scrivere sotto la forma $x = k\pi$

g) $\text{sen } x = -1$ $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

h) $\text{cos } x = \frac{1}{2}$

Il coseno è un'ASCISSA, è l'ascissa di un punto (l'estremo dell'arco) sulla circonferenza goniometrica, quindi si tratta di andare a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ascissa $1/2$ per stabilire quanto valgono, in radianti, gli archi corrispondenti.

Tali punti sono le intersezioni fra la circonferenza goniometrica e la retta di ascissa costante $x = 1/2$.



Ricordandoci a questo punto anche le formule sui triangoli rettangoli particolari, comprendiamo che i due archi in questione sono

$$\frac{\pi}{3} \text{ (arco } \widehat{AP_1} \text{)} \text{ e } -\frac{\pi}{3} \text{ (arco } \widehat{AP_2} \text{), pensando di andare da A a } P_2 \text{ in senso orario;}$$

$$\text{volendo si può anche pensare all'arco positivo } \frac{5}{3}\pi$$

e scriviamo in definitiva, tenendo conto della periodicità del coseno,

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ essendo } k \text{ un intero relativo arbitrario } (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Alternativa meno elegante: } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

i) $\text{cos } x = 0,81$ $x = \pm \text{arc cos } 0,81 + 2k\pi$

j) $\text{cos } x = -0,2$ $x = \pm \text{arc cos}(-0,2) + 2k\pi = \pi \mp \text{arc cos } 0,2 + 2k\pi$

I precedenti tre esempi h), i), j)
mostrano che, in generale,

l'equazione goniometrica elementare $\boxed{\text{cos } x = q \quad (-1 \leq q \leq 1)}$

avrà come soluzioni $\boxed{x = \pm \text{arc cos } q + 2k\pi}$

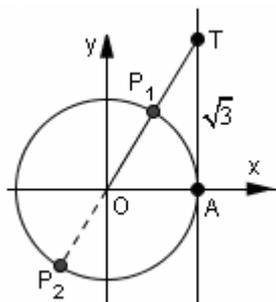
k) $\text{cos } x = 2$ IMPOSSIBILE

l) $\text{cos } x = 1$ $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

m) $\text{cos } x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

n) $\text{cos } x = -1$ $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, ossia: multipli dispari di π

o) $tg x = \sqrt{3}$



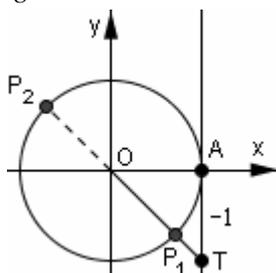
Nell'ambito del 1° giro, le soluzioni sono i due archi

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4}{3}\pi;$$

in generale, tenendo conto del fatto che la tangente è periodica di periodo “mezzo giro” (π) le soluzioni saranno rappresentabili dalla scrittura

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

p) $tg x = -1$



Fra gli archi soluzione,

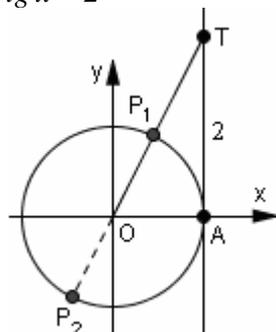
quello che è più spontaneo considerare è senz'altro $x = -\pi/4$.

L'altro arco soluzione in figura è $x = \frac{3}{4}\pi = -\frac{\pi}{4} + \pi$.

La tangente è periodica di periodo “mezzo giro” (π) per cui le soluzioni possono essere indicate dalla scrittura

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

q) $tg x = 2$



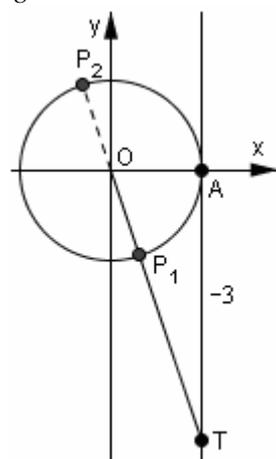
$$x = \text{arc tg } 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Nella figura,

$$\widehat{AP_1} = \text{arc tg } 2$$

$$\widehat{AP_2} = \text{arc tg } 2 + \pi$$

r) $tg x = -3$



$$x = \text{arc tg } (-3) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Nella figura,

$$\widehat{AP_1} \text{ (senso orario)} = \text{arc tg } (-3)$$

$$\widehat{AP_2} = \text{arc tg } (-3) + \pi$$

Tenendo presente che $\text{arc tg } (-q) = -\text{arc tg } q$

Possiamo riscrivere l'insieme delle soluzioni nella forma più elegante

$$x = -\text{arc tg } 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

I precedenti quattro esempi o), p), q), r) mostrano che, in generale,

per risolvere l'equazione goniometrica elementare $tg x = q$

“BASTA GUARDARE LA SOLA METÀ DESTRA DELLA TORTA”

(quella che si riferisce agli archi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$)

e scrivere che le soluzioni sono $x = \text{arc tg } q + k\pi$

s) $tg x = 0 \quad x = 0 + k\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

In questa rassegna di equazioni elementari, **volutamente evitiamo di inserire la tipologia $\cotg x = q$** ;

d'altronde, per la 3ª Rel. Fond., **$\cotg x = q$ si può risolvere trasformandola nell'equivalente $tg x = 1/q$** .

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari (soluzioni in radianti, anche fuori dal "1° giro"):

- | | | | |
|---|---|--|--|
| 1) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 2) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | 3) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 4) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ |
| 5) $\operatorname{sen} x = 1$ | 6) $\operatorname{sen} x = 0$ | 7) $\operatorname{sen} x = -1$ | 8) $\operatorname{sen} x = -2$ |
| 9) $\operatorname{sen} x = 0.6$ | 10) $\operatorname{sen} x = -0.3$ | 11) $\operatorname{sen} x = 0.5$ | 12) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| 13) $\operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$ | 14) $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{2}$ | 15) $\operatorname{cos} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 16) $\operatorname{cos} x = 1$ |
| 17) $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 18) $\operatorname{cos} x = \sqrt{3}$ | 19) $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 20) $\operatorname{cos} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 21) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 22) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 23) $\operatorname{tg} x = 1$ | 24) $\operatorname{tg} x = 0$ |
| 25) $\operatorname{tg} x = 1000$ | 26) $\operatorname{tg} x = -0,01$ | 27) $\operatorname{cotg} x = 1/\sqrt{3}$ | 28) $\operatorname{cotg} x = -1$ |
| 29) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{4}$ | 30) $\operatorname{cos} x = \frac{1}{4}$ | 31) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$ | 32) $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{4}$ |
| 33) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{4}$ | 34) $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{4}$ | 35) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}$ | 36) $\operatorname{cotg} x = -\frac{1}{4}$ |

SOLUZIONI (s'intende che k sia un intero relativo arbitrario: $k \in \mathbb{Z}$)

- | | | | |
|---|---|--------------------------------------|-----------------------------|
| 1) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ | 2) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ | | |
| 3) $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$ (oppure: $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$) | | | |
| 4) $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ (oppure: $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$) | | | |
| 5) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ | 6) $x = k\pi$ | 7) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ | 8) impossibile |
| 9) $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.6 + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.6 + 2k\pi$ | | | |
| 10) $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (-0.3) + 2k\pi = -\operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.3 + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} (-0.3) + 2k\pi = \pi + \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.3 + 2k\pi$ | | | |
| 11) $0.5 = \frac{1}{2}$ quindi: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ | | | |
| 12) $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2k\pi = -\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2k\pi = \pi + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi$ | | | |
| 13) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ | 14) $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ | 15) $x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ | 16) $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$ |
| 17) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ | 18) impossibile | | |
| 19) $x = \pm \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{\sqrt{3}}{3} + 2k\pi$ | 20) $x = \pm \operatorname{arc} \operatorname{cos} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2k\pi = \pi \mp \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{\sqrt{3}}{3} + 2k\pi$ | | |
| 21) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ | 22) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ | 23) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ | 24) $x = k\pi$ |
| 25) $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1000 + k\pi$ | 26) $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-0.01) + k\pi = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0.01 + k\pi$ | | |
| 27) $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ | 28) $\operatorname{cotg} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ | | |
| 29) $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + 2k\pi$ | 30) $x = \pm \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{1}{4} + 2k\pi$ | | |
| 31) $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + k\pi$ | 32) $x = \operatorname{arctg} 4 + k\pi$ | | |
| 33) $x = -\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + 2k\pi \vee x = \pi + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + 2k\pi$ | 34) $x = \pi \mp \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{1}{4} + 2k\pi$ | | |
| 35) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + k\pi$ | 36) $x = -\operatorname{arctg} 4 + k\pi$ | | |