22. LA "MADRE DI TUTTE LE FORMULE" IN TRIGONOMETRIA

Ci siamo fin qui limitati alle tre "Relazioni Fondamentali":

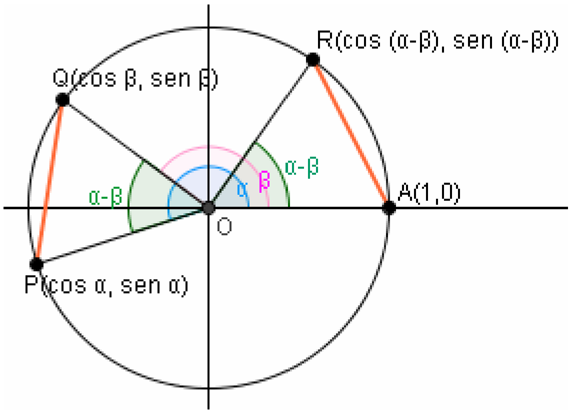
1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ 2) $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ 3) $\text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \dfrac{1}{\text{tg}\, x}$

… ma in aggiunta a queste, la Trigonometria ci presenta poi una rigogliosa "fioritura" di nuove formule.
Il bello è che tutte possono essere costruite a partire da una sola, la "formula di sottrazione per il coseno", la quale perciò a buon diritto potrà fregiarsi del titolo di "madre di tutte le formule" della Trigonometria.

La "**formula di sottrazione per il coseno**" si propone di esprimere il coseno di una differenza
$$\cos(\alpha-\beta)$$
per mezzo di funzioni goniometriche aventi per argomento soltanto α, oppure soltanto β.

Nella figura qui a fianco sono rappresentati:

- un angolo $\alpha = A\hat{O}P$
- un secondo angolo $\beta = A\hat{O}Q$
- e, infine, l'angolo differenza $\alpha-\beta$, che è evidentemente $Q\hat{O}P$, ma è stato poi ridisegnato in posizione "canonica", così da diventare $A\hat{O}R$: insomma, è $\alpha-\beta = A\hat{O}P - A\hat{O}Q = Q\hat{O}P = A\hat{O}R$



Occhio alle coordinate dei tre punti P, Q ed R!
Per definizione di seno e coseno, esse sono le seguenti:
$$P(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$$
$$Q(\cos\beta, \text{sen}\,\beta)$$
$$R\big(\cos(\alpha-\beta), \text{sen}(\alpha-\beta)\big)$$

Ora, poiché in una circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono corde uguali, avremo
$$QP = AR$$
e quindi (formula per la distanza tra due punti sul piano cartesiano)

$$\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\text{sen}\,\alpha-\text{sen}\,\beta)^2} = \sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\text{sen}(\alpha-\beta)-0)^2}$$

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\text{sen}\,\alpha-\text{sen}\,\beta)^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\text{sen}(\alpha-\beta)-0)^2$$

$$\underset{*}{\cos^2\alpha} + \underset{**}{\cos^2\beta} - 2\cos\alpha\cos\beta + \underset{*}{\text{sen}^2\alpha} + \underset{**}{\text{sen}^2\beta} - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \underset{***}{\cos^2(\alpha-\beta)} + 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + \underset{***}{\text{sen}^2(\alpha-\beta)}$$

$$\underset{*}{\cancel{1}} - 2\cos\alpha\cos\beta \underset{**}{\cancel{+1}} - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \underset{***}{\cancel{1}} \cancel{+1} - 2\cos(\alpha-\beta)$$

$$\cancel{2}\cos(\alpha-\beta) = \cancel{2}\cos\alpha\cos\beta + \cancel{2}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\boxed{\mathbf{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}}$$ **formula di sottrazione per il coseno : la "MADRE DI TUTTE LE FORMULE"!!!**

- Fra pochissimo utilizzeremo la "madre di tutte le formule" nel suo ruolo peculiare, per dedurne altre; diamo però prima un esempio di sua applicazione: la determinazione del coseno di 15°.

$$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45° \cos 30° + \text{sen}\,45°\,\text{sen}\,30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ESERCIZI

a) Verifica che anche tramite la catena $\cos 15° = \cos(60°-45°) = \ldots$ si perviene allo stesso risultato.

b) Completa la catena $\cos 75° = \cos(135°-60°) = \ldots$
controlla poi la correttezza del risultato trovato, tenendo conto che si ha $\cos 75° = \text{sen}(90°-75°) = \text{sen}\,15°$ e andando a calcolare $\text{sen}\,15°$ mediante la Prima Relazione Fondamentale: $\text{sen}\,15° = \sqrt{1-\cos^2 15°}$

$$\left[\text{Otterrai } \cos 75° = \text{sen}\,15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]$$