

23. LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Partiamo dunque dalla “madre di tutte le formule”

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Essa ci permette di scrivere la seguente catena:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \\ &= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \stackrel{\text{NOTA}}{=} \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha (-\sin \beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

NOTA

Sappiamo che

il coseno è una funzione PARI: $\cos(-x) = \cos x$
mentre il seno è DISPARI: $\sin(-x) = -\sin x$

Nelle due catene che seguono utilizzeremo il fatto che il coseno di un angolo è uguale al seno del complementare, e viceversa:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Per la tangente:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cancel{\cos \beta} + \cancel{\cos \alpha} \sin \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta}}}{\frac{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta} - \sin \alpha \sin \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta}}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

NOTA Dividiamo a questo punto sia il numeratore che il denominatore per $\cos \alpha \cos \beta$;

il procedimento è finalizzato a far comparire, dopo successiva semplificazione, $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{tg} \beta$.

Osserviamo che questa divisione è effettuabile solo nel caso $\cos \alpha \neq 0 \wedge \cos \beta \neq 0$, ossia nel caso

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Queste ultime, d'altronde, sono poi anche le condizioni di esistenza di $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{tg} \beta$.

In definitiva, la formula ricavata qui sopra è valida sotto le condizioni

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}_{\text{condizione di esistenza di } \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} & \underbrace{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}_{\text{condizione di esistenza di } \operatorname{tg} \alpha, \text{ e anche condizione necessaria per poter effettuare un passaggio nella costruzione della formula}} & \underbrace{\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}_{\text{condizione di esistenza di } \operatorname{tg} \beta, \text{ e anche condizione necessaria per poter effettuare un passaggio nella costruzione della formula}} \end{array}$$

Allo stesso modo, è possibile ottenere

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

la cui validità è soggetta alle condizioni

$$\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Ricapitoliamo:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \text{FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL COSENO}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \text{FORMULA DI ADDIZIONE PER IL COSENO}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \text{FORMULA DI ADDIZIONE PER IL SENO}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \text{FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL SENO}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \left[\alpha + \beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right] \quad \text{FORMULA DI ADDIZIONE PER LA TANGENTE}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \left[\alpha - \beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right] \quad \text{FORMULA DI SOTTRAZIONE PER LA TANGENTE}$$

ESEMPI di applicazione

$$\square \quad \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Ricorderai che nella parte finale del paragrafo precedente lo stesso valore era stato ricavato per $\cos 15^\circ$.
E' naturale: il seno di un angolo è uguale al coseno del complementare.

$$\square \quad \sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Controlla tu che si ottiene lo stesso valore, per $\operatorname{tg} 15^\circ$, anche facendo $\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ coi valori prima trovati.

$$\square \quad \cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

valore che era già stato determinato in altro modo nelle pagine precedenti, e che ovviamente coincide col valore di $\sin 15^\circ$ determinato qui sopra: $\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ$

$$\square \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin^2 x - \cancel{\frac{1}{2} \sin x \cos x} + \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \cancel{\frac{1}{2} \sin x \cos x} =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x) - \cancel{\sin x \cos x} + \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x) + \cancel{\sin x \cos x} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ESERCIZI

Puoi costruirti tu stesso tantissimi esercizi semplicemente "riciclando" valori già noti: ad esempio, puoi calcolare $\sin(60^\circ + 30^\circ)$ con la formula di addizione per il seno, sapendo già che, se il procedimento è corretto, dovrà uscire come risultato il valore di $\sin 90^\circ$ e cioè 1.

Altri spunti di questo tipo:

a) ritrova, con le formule di addizione e sottrazione, qualcuna fra le funzioni goniometriche di $30^\circ + 30^\circ$, $45^\circ + 45^\circ$, $90^\circ \pm 30^\circ$, $90^\circ \pm 60^\circ$, $180^\circ \pm 45^\circ$, ...

b) calcola, con le formule di addizione e sottrazione,
 $\sin(90^\circ - x)$ sapendo già che il risultato sarà $\cos x$,
 $\cos(x + 90^\circ)$ sapendo che dovrà uscire $-\sin x$,
 $\cos(180^\circ + x)$ sapendo che il risultato dev'essere $-\cos x$,
 ecc. ecc.