24. LE FORMULE DI DUPLICAZIONE

Se riscriviamo le formule di addizione nel caso particolare $\beta=\alpha$, otteniamo le **formule di duplicazione**:

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta \quad \text{diventa} \quad \mathbf{sen\,2\alpha}=\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha=\mathbf{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta \quad \text{diventa} \quad \mathbf{\cos 2\alpha}=\cos\alpha\cos\alpha-\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha=\mathbf{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}\,.$$

Quest'ultima formula può anche essere modificata nei due modi seguenti:

- $\mathbf{\cos 2\alpha}=\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha+\mathrm{sen}^2\alpha-2\,\mathrm{sen}^2\alpha=\mathbf{1-2\,sen^2\alpha}$
- $\mathbf{\cos 2\alpha}=\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha+\mathrm{sen}^2\alpha)=\mathbf{2\cos^2\alpha-1}$

Passiamo ora a ricavare, dalla formula di addizione per la tangente, la rispettiva formula di duplicazione:

$$\mathbf{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}} \quad \text{diventa, quando } \beta=\alpha, \quad \mathbf{tg\,2\alpha}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}=\mathbf{\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

Ricapitoliamo:

$\mathbf{sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\cos\alpha}$ FORMULA DI DUPLICAZIONE PER IL SENO

$$\mathbf{\cos 2\alpha}=\begin{cases}\mathbf{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}\\ \mathbf{1-2\,sen^2\alpha}\\ \mathbf{2\cos^2\alpha-1}\end{cases}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE PER IL COSENO
(nelle sue tre versioni alternative)

$$\mathbf{tg\,2\alpha=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE PER LA TANGENTE ,

valida sotto le condizioni $\boxed{\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$; $2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ *cioè* $\boxed{\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}$

- Se il seno di un angolo acuto vale 0.4, quanto varrà il seno dell'angolo doppio?

  Per rispondere, applicheremo la formula $sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha$,
  ma prima abbiamo bisogno di determinare $cos\,\alpha$.
  $cos\,\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}$ dove siamo certi che il segno davanti al radicale è un +
  perché è evidente che un angolo acuto con seno uguale a 0.4 è tale che
  anche il suo doppio appartiene certamente al 1° quadrante e perciò ha coseno positivo.
  Dunque $cos\,\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}=\sqrt{1-(0.4)^2}=\sqrt{1-0.16}=\sqrt{0.84}\approx 0.9165$
  Ora $sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha\approx 2\cdot 0.4\cdot 0.9165=0.7332$

Eh sì ...
Questo esercizio ribadisce, se ce ne fosse bisogno, che raddoppiando l'angolo il seno NON raddoppia!

A volte interessano le "formule di duplicazione ad angoli dimezzati",
quelle che si ottengono "passando agli angoli metà", ossia mutando α in $\alpha/2$, e 2α in α :

$$\mathrm{sen}\,2\alpha=2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \;\to\; \mathbf{sen\,\alpha=2\,sen\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha=\begin{cases}\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha\\ 1-2\,\mathrm{sen}^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha-1\end{cases} \;\to\; \mathbf{\cos\alpha}=\begin{cases}\mathbf{\cos^2\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}}\\ \mathbf{1-2\,sen^2\frac{\alpha}{2}}\\ \mathbf{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}\end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \;\to\; \mathbf{tg\,\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE CON ANGOLI DIMEZZATI
(si ottengono dalle "normali" formule di duplicazione, mutando α in $\alpha/2$, e 2α in α)

ESERCIZI

Verifica, con "duplicazione", che: $sen\,(2\cdot 30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\,(2\cdot 60°)=-\frac{1}{2}$, $tg\,(2\cdot 60°)=-\sqrt{3}$ e similari.