25. LE FORMULE DI BISEZIONE

Esprimono le funzioni dell'angolo metà $\alpha/2$ mediante le funzioni dell'angolo α ;
oppure, le funzioni di α per mezzo di quelle di 2α .
Risolvono, in pratica, **il problema inverso di quello che è risolto dalla formule di duplicazione**.

Per ricavarle, consideriamo due fra le "formule di duplicazione ad angoli dimezzati", e precisamente

$$\cos\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 .$$

Invertendole, otteniamo

$$\cos\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \;\rightarrow\; 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha \;\rightarrow\; \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \;\rightarrow\; \boxed{\mathbf{sen}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \;\rightarrow\; 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha \;\rightarrow\; \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \;\rightarrow\; \boxed{\mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

… e a questo punto potremo anche scrivere:

$$\boxed{\mathbf{tg}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} =} \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \underset{\text{NOTA 1}}{=} \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1+\cos\alpha}} \underset{\text{NOTA 2}}{=} \boxed{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

NOTA 1:
la frazione che precede porta un doppio segno $\pm$ a numeratore ed un altro a denominatore.
Non deve però intendersi che il "+ sopra" corrisponda necessariamente al "+ sotto", e altrettanto per i due "–";
le combinazioni di segno possono invece essere qualsiasi,
per cui il "$\pm$" deve rimanere, anche nel passaggio successivo.

NOTA 2:
questa formula è una "identità condizionata",
ossia vale ad eccezione di casi particolari, nei quali perde invece significato.

Affinché la formula sussista deve innanzitutto esistere $tg\,\frac{\alpha}{2}$, deve cioè essere $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ ossia $\alpha \neq \pi+2k\pi$;
inoltre deve essere diverso da 0 il denominatore introdotto, ovvero $1+cos\,\alpha$;
ma $1+cos\,\alpha \neq 0$ equivale a $cos\,\alpha \neq -1,\;\; \alpha \neq \pi+2k\pi$
e quindi non c'è altra condizione che si affianchi alla precedente.

La formula $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ ha però due alternative, che sono senz'altro più comode ed efficienti, perché

- non contengono il doppio segno
- e per giunta sono "razionali", nel senso che non contengono nemmeno la radice.

Vediamole.

$$\boxed{\mathbf{tg}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} =} \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{2}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{1}+\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}}$$

Condizioni di validità:
esistenza di $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $\left(\boxed{\alpha \neq \pi+2k\pi}\right)$
$1+\cos\alpha \neq 0 \quad \cos\alpha \neq -1,\;\; \alpha \neq \pi+2k\pi$ già scritta

$$\boxed{\mathbf{tg}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} =} \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\cancel{2}}}{\operatorname{sen}\alpha} = \boxed{\frac{\mathbf{1}-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}}$$

Condizioni di validità:
esistenza di $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(\alpha \neq \pi+2k\pi)$
$\operatorname{sen}\alpha \neq 0,$ $\boxed{\alpha \neq k\pi}$ condizione che "contiene" la precedente, rendendola quindi inutile

ESERCIZI

Verifica, con "bisezione", che: $sen\left(\frac{60°}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad cos\left(\frac{90°}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad tg\left(\frac{60°}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, e similari.