26. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DEGLI ARCHI DI $\frac{\pi}{8}$ (22°30') E $\frac{\pi}{10}$ (18°)

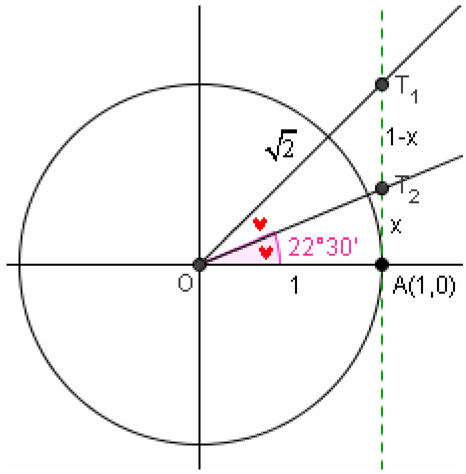
Le formule di bisezione ci permettono di calcolare le **funzioni goniometriche dell'arco** $\boldsymbol{\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}}$:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ \rightarrow\ \boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ \rightarrow\ \boxed{\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\ldots=\boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\ \rightarrow\ \boxed{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\boxed{\sqrt{2}-1}$$

Il valore $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ può anche essere determinato mediante il **Teorema della Bisettrice**: "In un triangolo, la bisettrice di un lato divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati".



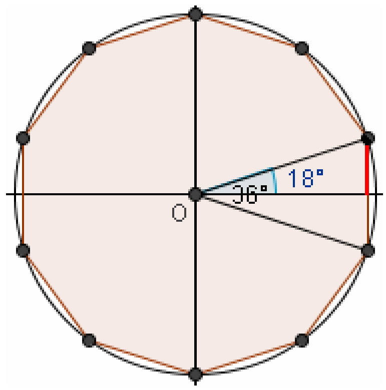
Applicando questo teorema al triangolo AOT_1 della figura, nel quale $A\hat{O}T_1=45°$ e quindi $AT_1=OA=1,\ OT_1=\sqrt{2}$, si ottiene

$$AT_2:T_2T_1=OA:OT_1$$

$$x:(1-x)=1:\sqrt{2}\qquad \left(x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$1-x=x\sqrt{2}\qquad x\sqrt{2}+x=1\qquad x\left(\sqrt{2}+1\right)=1\qquad x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$$

Per quanto riguarda le **funzioni dell'arco di** $\boldsymbol{\frac{\pi}{10}}$ **(18°)** possiamo approfittare del fatto che in un decagono regolare inscritto in una circonferenza gli angoli al centro che insistono sui lati misurano 360°:10=36°.



E' noto che il lato del decagono regolare inscritto è uguale alla sezione aurea del raggio, cioè vale

$\ell_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ (nella circonferenza goniometrica, di raggio 1, $\ell_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

Avremo allora $\boxed{\operatorname{sen}18°}=\frac{1}{2}\ell_{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

A questo punto, $cos18°$ (che corrisponde all'*apotema* del decagono regolare) potrà essere determinato con Pitagora (o, il che è praticamente lo stesso, con la Prima Relazione Fondamentale):

$$\boxed{\cos 18°}=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 18°}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16}}=\sqrt{\frac{16-\left(5+1-2\sqrt{5}\right)}{16}}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\boxed{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

Infine sarà

$$\boxed{\operatorname{tg}18°}=\frac{\operatorname{sen}18°}{\cos 18°}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{5+1-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{25-5}}=\sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{20}}=\boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}\ \mathit{oppure}\ \boxed{\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}}$$