

28. LE FORMULE PARAMETRICHE

Trovano applicazione nella risoluzione delle cosiddette “equazioni goniometriche lineari”, che vedremo.

Esprimono $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ in funzione di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (che di solito viene poi indicata brevemente con t).

$$\sin \alpha \underset{\text{NOTA 1}}{=} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \underset{\text{NOTA 2}}{=} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \underset{\text{NOTA 3}}{=} \frac{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

NOTA 1:

formula di duplicazione
per il seno,
con angoli dimezzati

NOTA 2:

è lecito dividere per $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$,
perché $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \quad \forall \alpha$
(Prima Relazione Fondamentale)

NOTA 3:

per la proprietà invariante delle frazioni,
il valore di una frazione resta invariato
se si dividono
sia il numeratore che il denominatore
per uno stesso numero diverso da 0

CONDIZIONI DI VALIDITÀ:

La formula introduce $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, quindi vale a condizione di supporre questa esistente: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$

Inoltre, il procedimento per costruire la formula ha richiesto

la divisione per $\cos \frac{\alpha}{2}$, operazione effettuabile a patto di supporre $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$,

condizione che però equivale a quella già posta prima: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \dots = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{(stesso procedimento di prima, e stesse condizioni di validità)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

ottenibile dividendo membro a membro le due formule precedenti;
Le condizioni di validità sono qui

- l'esistenza di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, quindi $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$
- l'esistenza di $\operatorname{tg} \alpha$, quindi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- e inoltre (per il fatto che si è diviso per $\frac{1-t^2}{1+t^2}$)

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} \neq 0 \quad \text{ossia} \quad 1-t^2 \neq 0, \quad t^2 \neq 1, \quad t \neq \pm 1$$

$$\text{ovvero} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \neq \pm 1, \quad \frac{\alpha}{2} \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$$

che è poi, a ben guardare, equivalente ad $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, già posta prima.

RIASSUNTO
DELLE
FORMULE
PARAMETRICHE

$$\left(t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$	$\alpha \neq \pi + 2k\pi$
$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\alpha \neq \pi + 2k\pi$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$	$\alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

ESERCIZIO

Verifica che eseguendo il calcolo $\sin^2 x + \cos^2 x$ per il tramite delle formule parametriche, si ottiene 1.