29. IDENTITA' GONIOMETRICHE

RICAPITOLAZIONE DELLE FORMULE

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL COSENO
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	FORMULA DI ADDIZIONE PER IL COSENO
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	FORMULA DI ADDIZIONE PER IL SENO
$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL SENO
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\quad\left[\alpha+\beta,\ \alpha,\ \beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$	FORMULA DI ADDIZIONE PER LA TANGENTE
$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\quad\left[\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$	FORMULA DI SOTTRAZIONE PER LA TANGENTE

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE PER IL SENO

$$\cos 2\alpha=\begin{cases}\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\\ 1-2\operatorname{sen}^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE PER IL COSENO

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE PER LA TANGENTE , $\boxed{\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$ $\boxed{\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}$

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\ \rightarrow\ \operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha=\begin{cases}\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\\ 1-2\operatorname{sen}^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha-1\end{cases}\ \rightarrow\ \cos\alpha=\begin{cases}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\\ 1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\end{cases}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE CON ANGOLI DIMEZZATI

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\ \rightarrow\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$ $\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$

$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=}=\boxed{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=}\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}}$ $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=}\boxed{\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}$ $\boxed{\alpha\neq k\pi}$

FORMULE PARAMETRICHE $\left(t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$

$\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\boxed{\alpha\neq\pi+2k\pi}$ $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}$ $\boxed{\alpha\neq\pi+2k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$

Più avanti, presenteremo anche le formule seguenti:

FORMULE DI PROSTAFERESI

$\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	$\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$
$\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	$\cos p-\cos q=-2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$

FORMULE DI WERNER

$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$	
$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$	$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

Gli esercizi proposti qui di seguito sono IDENTITA' a base di funzioni goniometriche.

La richiesta, in esercizi di questo tipo, è di controllare che l'uguaglianza proposta è effettivamente una identità, ossia è verificata per qualsiasi valore dell'arco (o degli archi) coinvolti,
eccettuati al più quei valori per i quali il primo membro, o il secondo, o entrambi, dovessero perdere significato.

Per verificare la correttezza di una identità si svolgono i calcoli a 1° membro e, separatamente, a 2° membro, con l'obiettivo di far vedere che essi possono essere ricondotti ad una medesima espressione.

Ma è pure possibile, nel procedimento, trasportare termini da un membro all'altro cambiandoli di segno, oppure moltiplicare o dividere ambo i membri per una stessa quantità diversa da 0,
perché, se così facendo si perviene ad una uguaglianza vera,
allora ciò implica che era vera anche l'uguaglianza da cui si era partiti.

Esempio: verificare l'identità $\dfrac{1}{1+tg^2 x}=(1+sen\,x)(1-sen\,x)$

$$\frac{1}{1+tg^2 x}=(1+sen\,x)(1-sen\,x)$$

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{sen\,x}{cos\,x}\right)^2}=1-sen^2 x$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{sen^2 x}{cos^2 x}}=cos^2 x$$

$$\frac{1}{\dfrac{cos^2 x+sen^2 x}{cos^2 x}}=cos^2 x$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{cos^2 x}}=cos^2 x$$

$$cos^2 x=cos^2 x,\ OK!!!$$

a) Identità che richiedono di utilizzare le tre Relazioni Fondamentali della Goniometria

1) $cos^2\alpha-sen^2\alpha=2cos^2\alpha-1$ 2) $tg\,\alpha\cdot cotg\,\alpha-sen^2\alpha=cos^2\alpha$ 3) $tg^2\,\alpha-sen^2\alpha=tg^2\,\alpha\cdot sen^2\alpha$

4) $\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}\cdot\dfrac{(cos\,x-sen\,x)^2}{cos^2 x-sen^2 x}=1$ 5) $\dfrac{cotg^2\alpha}{1+cotg^2\alpha}=cos^2\alpha$ 6) $\dfrac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{cotg\,\alpha+cotg\,\beta}=tg\,\alpha\ tg\,\beta$

7) $\dfrac{sen\,\alpha}{1+cos\,\alpha}=\dfrac{1-cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$ 8) $cos^4\alpha-sen^4\alpha=1-2sen^2\alpha$ 9) $\dfrac{sen\,\alpha+sen\,\beta}{cos\,\alpha+cos\,\beta}+\dfrac{cos\,\alpha-cos\,\beta}{sen\,\alpha-sen\,\beta}=0$

b) Identità che richiedono di utilizzare gli archi "associati", complementari, o che differiscono di $\dfrac{\pi}{2}$ o $\dfrac{3}{2}\pi$

10) $sen(\pi-\alpha)+cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=2sen\,\alpha$ 11) $sen(\pi+\alpha)-cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=0$

12) $sen(90°-\alpha)+sen(180°-\alpha)+sen(270°-\alpha)+sen(360°-\alpha)=0$

13) $sen(\alpha+90°)+sen(\alpha+180°)+sen(\alpha+270°)+sen(\alpha+360°)=0$

14) $tg(\alpha+90°)cotg(\alpha-90°)=1$ 15) $sen\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-cos(\alpha+\pi)+sen\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=cos\,\alpha$

16) $sen^2(\alpha-\pi)+cos^2(\alpha+\pi)=1$ 17) $\dfrac{1}{tg(90°-\alpha)-tg(180°-\alpha)}=sen(90°-\alpha)sen(180°-\alpha)$

18) $\left[sen(-\alpha)+cos(-\alpha)\right]^2=1-2sen\,\alpha\,cos\,\alpha$ 19) $cos(2\pi-\alpha)-tg\,\alpha\cdot sen(\alpha+3\pi)=\dfrac{1}{cos\,\alpha}$

20) $sen\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-sen\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)=2cos\,\alpha$ 21) $\left[1-cos(\alpha+270°)\right]\left[1-cos(90°+\alpha)\right]=cos^2\alpha$

c) Identità che richiedono di utilizzare le formule di addizione e sottrazione

22) $\dfrac{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}=tg\,\alpha$

23) $\dfrac{sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)}=-cotg\,\alpha$

24) $\dfrac{sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}$

25) $sen(\alpha+30°)-sen(\alpha-30°)=cos\,\alpha$

26) $cos(\alpha+60°)+cos(\alpha-60°)=cos\,\alpha$

27) $sen(\alpha+45°)+cos(\alpha-45°)=\sqrt{2}(sen\,\alpha+cos\,\alpha)$

28) $cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+sen\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=cos\alpha$

29) $tg\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\cdot tg\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

30) $tg(45°+\alpha)tg(45°-\alpha)=1$

d) Identità che richiedono di utilizzare le formule di duplicazione

31) $\dfrac{1+sen\,2\alpha}{sen\,\alpha+cos\,\alpha}=sen\,\alpha+cos\,\alpha$

32) $\dfrac{cos\,2\alpha-cos^2\alpha}{cos\,\alpha+1}+1=cos\,\alpha$

33) $\dfrac{cos\,2\alpha}{cos\,\alpha-sen\,\alpha}=sen\,\alpha+cos\,\alpha$

34) $\dfrac{1-cos\,2\alpha}{sen\,2\alpha}=tg\,\alpha$

35) $sen\,3\alpha=3sen\,\alpha-4sen^3\alpha$ $\quad [NOTA:\ sen\,3\alpha=sen(2\alpha+\alpha)=...]$

36) $cos\,3\alpha=4cos^3\alpha-3cos\,\alpha$

37) $sen\,\alpha+cos\,\alpha=1-2\,sen\dfrac{\alpha}{2}\left(sen\dfrac{\alpha}{2}-cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$

38) $\left(1-tg\dfrac{\alpha}{2}\right)tg\,\alpha=\dfrac{2\,tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg\dfrac{\alpha}{2}}$

39) $sen^2\dfrac{\alpha}{2}cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-cos\,2\alpha}{8}$

40) $\dfrac{cos\,\alpha}{1+sen\,\alpha}=tg\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

e) Identità che richiedono di utilizzare le formule di bisezione

41) $sen\,\alpha\left(1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\,tg\dfrac{\alpha}{2}$

42) $(1+cos\,\alpha)^2\,tg^2\dfrac{\alpha}{2}+cos^2\alpha=1$

43) $\dfrac{tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}sen\,\alpha$

44) $\dfrac{cotg\dfrac{\alpha}{2}-tg\dfrac{\alpha}{2}}{cotg\dfrac{\alpha}{2}+tg\dfrac{\alpha}{2}}=cos\,\alpha$