30. EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Le ripartiremo in tipologie.

1) Equazioni goniometriche elementari

Sono quelle della forma $sen\,x = q$ $cos\,x = q$ $tg\,x = q$ essendo q un numero reale assegnato.
Ce ne siamo già occupati; pertanto, ci limitiamo qui ad aggiungere qualche ulteriore esempio.

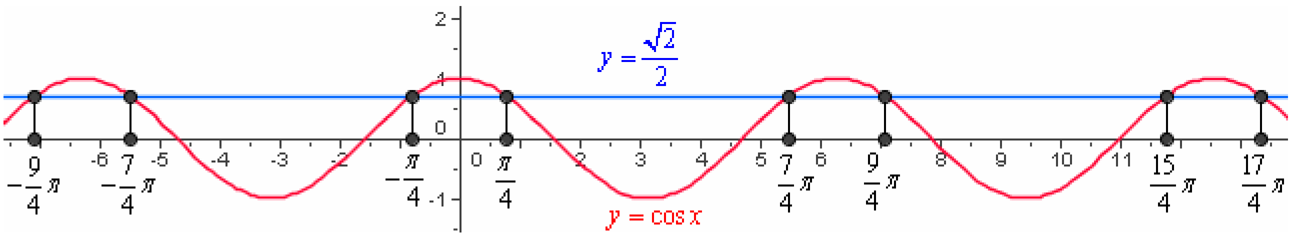
a) $2cos\,x - \sqrt{2} = 0 \quad 2cos\,x = \sqrt{2} \quad cos\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$

b) $4sen\,x + 1 = \sqrt{5} \quad 4sen\,x = \sqrt{5} - 1 \quad sen\,x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \boxed{x = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \ \vee \ x = \underbrace{\frac{9}{10}\pi}_{\pi-\frac{\pi}{10}} + 2k\pi}$

c) $tg\,x = 1 - \sqrt{2}$ (*soluzioni in gradi*) $\boxed{x = -22°30' + k \cdot 180°}$

d) $5sen\,x - 1 = 0 \quad sen\,x = \frac{1}{5} \quad \boxed{x = arc\,sen\frac{1}{5} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - arc\,sen\frac{1}{5} + 2k\pi}$

Osserviamo che, volendo, una equazione goniometrica elementare può essere risolta graficamente pensando di intersecare il grafico della sinusoide, o cosinusoide, o tangentoide, con una retta orizzontale.
Ad esempio, l'equazione a) ammette la seguente interpretazione grafica:



2) Equazioni goniometriche simili alle elementari

a) $2\,sen(2x + 7°) - 1 = 0$

$2\,sen(2x + 7°) = 1$

$sen(2x + 7°) = \frac{1}{2}$

$2x + 7° = 30° + k \cdot 360° \quad \vee \quad 2x + 7° = 150° + k \cdot 360°$

$2x = 23° + k \cdot 360° \quad \vee \quad 2x = 143° + k \cdot 360°$

$\boxed{x = 11°30' + k \cdot 180° \quad \vee \quad x = 71°30' + k \cdot 180°}$

Se interessassero solo le soluzioni nel "primo giro" $(0° \le x \le 360°)$, *daremmo a* $k \in \mathbb{Z}$ *quei valori che permettono di restare nell'ambito del "primo giro", ottenendo*
$x = 11°30' \quad x = 71°30'$
$x = 191°30' \quad x = 251°30'$

b) $\sqrt{3}\,tg(10° - 4x) + 1 = 0$

$tg(10° - 4x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$10° - 4x = -30° + k \cdot 180°$

$-4x = -40° + k \cdot 180°$

$x = 10° - k \cdot 45°$

$\boxed{x = 10° + k \cdot 45°}$ (NOTA)

… e nel 1° giro soltanto, le soluzioni sono
10°, 55°, 100°, 145°,
190°, 235°, 280°, 325°

NOTA

Spieghiamo l'ultimo passaggio, quando abbiamo cambiato un segno.
Cosa indicava all'inizio il simbolo k?
k indicava un intero relativo arbitrario.
Ma se k è un intero relativo arbitrario,
allora anche il suo opposto $-k$ *sarà un intero relativo arbitrario,*
quindi nulla ci impedisce, a questo punto,
di indicare tale moltiplicatore intero arbitrario ancora con k.

Volendo essere formalmente impeccabili,
si potrebbe usare nell'ultimo passaggio un simbolo nuovo,
ad esempio k_1, *per indicare l'intero arbitrario* $-k$
scrivendo dunque le soluzioni sotto la forma $x = 10° + k_1 \cdot 45°$;
oppure, all'incontrario, appiccicare un indice 1 al "k" iniziale,
ponendo poi alla fine $-k_1 = k$ *; ossia,*

$tg(10° - 4x) = -1/\sqrt{3}$

$10° - 4x = -30° + k_1 \cdot 180°; \quad -4x = -40° + k_1 \cdot 180°;$

$x = 10° - k_1 \cdot 45°; \quad x = 10° + k \cdot 45°$

c) $sen\frac{x}{5}=1$ (*soluzioni in radianti*)

$\frac{x}{5}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\boxed{x=\frac{5}{2}\pi+10k\pi}$

Nessuna soluzione, in questo caso, nel "primo giro"!

d) $cos\,4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$4x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \quad \vee \quad 4x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$ (NOTA)

$\boxed{x=\frac{5}{24}\pi+k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x=\frac{7}{24}\pi+k\frac{\pi}{2}}$

NOTA $\textit{oppure}:\ 4x=\pm\frac{5}{6}\pi+2k\pi$

$x=\pm\frac{5}{24}\pi+k\frac{\pi}{2}$

e) $sen\,2x=\frac{1}{3}$

$2x=arc\,sen\frac{1}{3}+2k\pi \ \vee\ 2x=\pi-arc\,sen\frac{1}{3}+2k\pi$

$\boxed{x=\frac{1}{2}arc\,sen\frac{1}{3}+k\pi \ \vee\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}arc\,sen\frac{1}{3}+k\pi}$

f) $cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}x\right)=\frac{1}{4}$

$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}x=\pm arc\,cos\frac{1}{4}+2k\pi$

$-\frac{1}{3}x=\pm arc\,cos\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\frac{1}{3}x=\underbrace{\pm}_{\substack{\textit{sarebbe}\\ \textit{stato } \mp,\\ \textit{ma}\\ \textit{ovviamente}\\ \textit{è lo stesso}}} arc\,cos\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}\underbrace{+2k\pi}_{\substack{\textit{non abbiamo}\\ \textit{cambiato il segno,}\\ \textit{essendo } k \textit{ un}\\ \textit{intero relativo}\\ \textit{arbitrario (NOTA)}}}$

$\boxed{x=\pm 3\,arc\,cos\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\pi+6k\pi}$

NOTA: *ci siamo comportati, insomma,*
secondo la NOTA relativa
al precedente esercizio b).
Sostituendo il simbolo k al posto di $-k$,
nulla cambia,
perché,
al variare di k nell'insieme $\mathbb{Z}$
degli interi relativi,
sia $-k$ *che* $+k$ *assumono gli stessi valori.*

g) $tg\,2x=2$

$2x=arc\,tg\,2+k\pi$

$\boxed{x=\frac{1}{2}arc\,tg\,2+k\frac{\pi}{2}}$

Osserviamo che $arc\,tg\,2$ *vale circa* 63 *gradi e mezzo*

h) $sen\,3x=0$

$3x=k\pi$

$\boxed{x=k\frac{\pi}{3}}$

i) $cos\frac{x}{4}=0$

$\frac{x}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\boxed{x=2\pi+4k\pi}$

Vediamo ora qualche variante, come le equazioni della forma

- $sen(...) = sen(...)$ ossia $sen\, f(x) = sen\, g(x)$
- $cos(...) = cos(...)$
- $tg(...) = tg(...)$

k) $sen(7x + 30°) = sen 3x$

Due angoli hanno lo stesso seno quando sono uguali (a meno di interi giri) ma anche quando sono supplementari (sempre "a meno di interi giri").

Quindi:

$$7x + 30° = 3x + k \cdot 360° \quad \vee \quad 7x + 30° = 180° - 3x + k \cdot 360°$$
$$7x - 3x = -30° + k \cdot 360° \quad \vee \quad 7x + 3x = 180° - 30° + k \cdot 360°$$
$$4x = -30° + k \cdot 360° \quad \vee \quad 10x = 150° + k \cdot 360°$$
$$x = \frac{-30° + k \cdot 360°}{4} \quad \vee \quad x = \frac{150° + k \cdot 360°}{10}$$
$$\boxed{x = -7°30' + k \cdot 90° \quad \vee \quad x = 15° + k \cdot 36°}$$

Nel primo giro, le soluzioni sono dunque:

82° 30' 172° 30'
262° 30' 352° 30'
15° 51° 87° 123° 159°
195° 231° 267° 303° 339°

l) $cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

Due angoli hanno lo stesso coseno quando sono uguali (a meno di interi giri) ma anche quando sono opposti (sempre "a meno di interi giri").

Quindi:

$$\frac{\pi}{3} - x = 3x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{3} - x = -3x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$-x - 3x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad -x + 3x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$-4x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$4x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \quad \vee \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$$
$$x = \frac{\pi}{24} - k\frac{\pi}{2}$$

che, data l'arbitrarietà di $k \in \mathbb{Z}$, possiamo riscrivere come

$$\boxed{x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}}$$

m) $tg\, 5x = tg\, 2x$

Due angoli hanno la stessa tangente quando sono uguali, a meno di multipli di 180°.

Quindi:

$$5x = 2x + k\pi \qquad 3x = k\pi \qquad \boxed{x = k\frac{\pi}{3}}$$

n) $sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cos\, 2x$

Qui converrà mutare il coseno in seno (o viceversa) passando al complementare!

$$sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$
$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad \vee \quad x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi$$

...

$$\boxed{x = \frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} \;\vee\; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

3) Equazioni goniometriche riconducibili alle elementari

a) $6\cos^2 x+\cos x=1$

$\boxed{6\cos^2 x+\cos x-1=0}$

Questa è sostanzialmente un'equazione di 2° grado in cui fa da incognita la quantità $\cos x$.
A questo punto potremmo indicare questo blocco incognito $\cos x$ con una singola lettera, ad esempio z, ottenendo l'equazione $6z^2+z-1=0$
dalla quale si ricaverebbe z per poi, infine, da z risalire a x;
oppure, più rapidamente, possiamo scrivere

$$(\cos x)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12}=\left\langle\begin{matrix}-1/2\\1/3\end{matrix}\right.$$

Ora: $\cos x=-\frac{1}{2}\ \to\ \boxed{x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\ \vee\ x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi}$ **;** $\cos x=\frac{1}{3}\ \to\ \boxed{x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi}$

C'è anche la possibilità di risolvere l' "equaz. di 2° grado nell'incognita cos x" scomponendo in fattori:

$6\cos^2 x+\cos x-1=0;\quad 6\cos^2 x+3\cos x-2\cos x-1=0;\quad 3\cos x(2\cos x+1)-(2\cos x+1)=0$

$(2\cos x+1)(3\cos x-1)=0\quad\to\quad \cos x=-\frac{1}{2}\ \vee\ \cos x=\frac{1}{3}\quad ...\quad$ *eccetera*

b) $\mathrm{sen}\,x+\cos^2 x+1=0$

$\mathrm{sen}\,x+1-\mathrm{sen}^2 x+1=0;\quad -\mathrm{sen}^2 x+\mathrm{sen}\,x+2=0$

$\mathrm{sen}^2 x-\mathrm{sen}\,x-2=0$

$(\mathrm{sen}\,x+1)(\mathrm{sen}\,x-2)=0$ (NOTA)

$\mathrm{sen}\,x=-1\quad\vee\ \mathrm{sen}\,x=2$ (*IMPOSSIBILE*)

$\boxed{x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi}$ *o, indifferentemente,* $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

NOTA
Qui la scomposizione in fattori è preferibile perché particolarmente rapida; è evidente che si sarebbe potuta, in alternativa, applicare la formula ottenendo gli stessi valori:

$$(\mathrm{sen}\,x)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$$

c) $\mathrm{sen}\,2x+\cos x=0$ (*soluzioni in gradi*)

$2\,\mathrm{sen}\,x\cos x+\cos x=0$ ... **e a questo punto basta scomporre in fattori!**

$\cos x(2\,\mathrm{sen}\,x+1)=0$

$\cos x=0\to\boxed{x=90°+k\cdot 180°}\ \vee\ \mathrm{sen}\,x=-\frac{1}{2}\to\boxed{x=210°+k\cdot 360°\ \vee\ x=\underset{(oppure\ -30°)}{330°}+k\cdot 360°}$

ESERCIZI sulle equazioni goniometriche elementari o ad esse affini.

1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$ 2) $\cos x+\sqrt{3}=0$ 3) $\sqrt{3}\cos x+1=0$ 4) $\cos 4x=-1$ 5) $\cos(150°-x)=\cos 2x$

6) $\mathrm{sen}\,2(x+\pi)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ 7) $\mathrm{sen}\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 8) $\mathrm{sen}\,x(\mathrm{sen}\,x+2)+\cos^2 x=0$

9) $tg^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$ 10) $\cos^2 x+\cos x=0$ 11) $8\mathrm{sen}^2 x+1=6\mathrm{sen}x$ 12) $\mathrm{sen}(4x+20°)+\mathrm{sen}(2x+10°)=0$

RISPOSTE

1) $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi\vee x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$ 2) *imposs.* 3) $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2k\pi=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2k\pi$

4) $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ 5) $x=50°+k\cdot 120°\vee x=-150°+k\cdot 360°$ (*opp.* $x=210°+k\cdot 360°$) 6) $x=2k\pi\vee x=\frac{\pi}{5}+k\cdot\frac{2}{5}\pi$

7) $x=\frac{7}{36}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi\vee x=\frac{13}{36}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$ 8) $x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi\vee x=\frac{11}{6}\pi+2k\pi\left(o-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$ 9) $x=k\frac{\pi}{4}$

10) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\vee x=\pi+2k\pi$ 11) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi\vee x=\mathrm{arc\,sen}\frac{1}{4}+2k\pi\vee x=\pi-\mathrm{arc\,sen}\frac{1}{4}+2k\pi$

12) $x=-5°+k\cdot 60°\vee x=85°+k\cdot 180°$