ESERCIZI sulle equazioni goniometriche lineari in seno e coseno

1) $sen\,x + cos\,x + 1 = 0$ 2) $sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 1$ 3) $sen\,x + \sqrt{3}\,(cos\,x - 1) = 0$

4) $sen\,x - cos\,x + \sqrt{2} = 0$ 5) $sen\,x + cos\,x = 0$ 6) $cos\,x - sen\,x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

7) $sen\,x - 2cos\,x = 2$ 8) $\sqrt{3}\,sen\,x = cos\,x$ 9) $4sen\,x + 2\sqrt{3}\,cos\,x = 5$

RISPOSTE

1) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \left(opp.\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right) \vee x = \pi + 2k\pi$ 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

3) $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ 4) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \left(opp.\ \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right)$ 5) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \left(opp.\ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right)$

6) $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \left(opp.\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \left(opp.\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right)$

7) $x = 2\,arctg\,2 + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$ 8) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 9) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = 2arctg\,\frac{14-3\sqrt{3}}{13} + 2k\pi$

32. EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO (O RICONDUCIBILI A QUESTA TIPOLOGIA)

I) Omogenee di 2° grado in seno e coseno

$$a\,sen^2x + b\,sen\,x\,cos\,x + c\,cos^2x = 0$$

Se $a = 0$ o $c = 0$ si può risolvere per scomposizione in fattori;
supponiamo dunque $a \neq 0, c \neq 0$.

Divideremo allora per cos^2x, ottenendo un'equazione di 2° grado nell'incognita $tg\,x$.

$$\frac{a\,sen^2x + b\,sen\,x\,cos\,x + c\,cos^2x}{cos^2x} = \frac{0}{cos^2x}$$

$$a\frac{sen^2x}{cos^2x} + b\frac{sen\,x\,\cancel{cos\,x}}{cos^{\cancel{2}}x} + c\frac{\cancel{cos^2x}}{\cancel{cos^2x}} = 0$$

$$a\,tg^2x + b\,tg\,x + c = 0$$

Osserviamo che questo procedimento esclude gli archi x per i quali $cos\,x = 0$;
ma ciò a ben guardare risulta non restrittivo,
perché comunque tali archi non potrebbero essere soluzione!
Infatti, se un arco ha il coseno nullo, allora ha il seno che può valere +1 o −1,
e per un arco con coseno uguale a 0 e seno uguale a ± 1 l'equazione NON è verificata:

$$a\,sen^2x + b\,sen\,x\,cos\,x + c\,cos^2x = 0$$

diventa infatti

$$a\cdot(\pm 1)^2 + b\cdot(\pm 1)\cdot 0 + c\cdot 0 = 0$$
$$a\cdot 1 + 0 + 0 = 0$$
$$a = 0\ \ uguaglianza\ falsa\ (stiamo\ supponendo\ a \neq 0 \wedge c \neq 0)$$

- Esempio: $\boxed{3\,sen^2x + 2\,sen\,x\,cos\,x - cos^2x = 0}$

Dividendo per cos^2x si ottiene

$$3tg^2x + 2tg\,x - 1 = 0$$

$$(tg\,x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ 1/3 \end{array} \right.$$

$$tg\,x = -1 \quad \vee \quad tg\,x = 1/3$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = arctg\,\frac{1}{3} + k\pi}$$

II) Equazioni di 2° grado in seno e coseno, riconducibili ad omogenee

Sono quelle della forma

$$a\,sen^2x + b\,sen\,x\cos x + c\cos^2x + d = 0\,,$$

nelle quali l'omogeneità è "rovinata" dalla presenza del termine noto d,
ma può essere ripristinata moltiplicando d per la quantità $sen^2x + cos^2x$,
che è sempre uguale a 1 per ogni *x*.

- Esempio: $\boxed{sen^2x + sen\,x\cos x + 4\cos^2x - 2 = 0}$

$$sen^2x + sen\,x\cos x + 4\cos^2x - 2\left(sen^2x + cos^2x\right) = 0$$
$$sen^2x + sen\,x\cos x + 4\cos^2x - 2\,sen^2x - 2\cos^2x = 0$$
$$-sen^2x + sen\,x\cos x + 2\cos^2x = 0$$
$$sen^2x - sen\,x\cos x - 2\cos^2x = 0$$
$$tg^2x - tg\,x - 2 = 0$$
$$(tg\,x + 1)(tg\,x - 2) = 0$$
$$tg\,x = -1 \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \qquad \vee \qquad tg\,x = 2 \quad \boxed{x = arctg\,2 + k\pi}$$

III) Omogenee di 4° grado in seno e coseno

$$a\,sen^4x + b\,sen^3x\,\cos x + c\,sen^2x\,\cos^2x + d\,sen\,x\,\cos^3x + e\cos^4x = 0$$

Per risolverle, basterà dividere per cos^4x ottenendo un'equazione di 4° grado in $tg\,x$.
Il caso di gran lunga più frequente negli esercizi è

$$a\,sen^4x + c\,sen^2x\cos^2x + e\cos^4x = 0 \qquad (b = d = 0)$$

nel quale la divisione per cos^4x porta a ottenere un'equazione biquadratica nell'incognita $tg\,x$.

- Esempio: $\boxed{sen^4x + 2\sqrt{2}\,sen^2x\,\cos^2x + 3\left(2\sqrt{2} - 3\right)\cos^4x = 0}$

$$tg^4x + 2\sqrt{2}\,tg^2x + 3\left(2\sqrt{2} - 3\right) = 0$$
$$\left(tg^2x\right)_{1,2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 3\left(2\sqrt{2} - 3\right)} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 6\sqrt{2} + 9} =$$
$$= -\sqrt{2} \pm \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(3 - \sqrt{2}\right)^2} = -\sqrt{2} \pm \left(3 - \sqrt{2}\right) = \left\langle \begin{array}{l} -3 \\ 3 - 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$
$$tg^2x = -3 \quad IMPOSSIBILE$$
$$tg^2x = 3 - 2\sqrt{2} \quad tg\,x = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = \pm\left(\sqrt{2} - 1\right) \qquad \boxed{x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi}$$

IV) Riconducibili a omogenee di 4° grado in seno e coseno

$$a\,sen^4x + b\,sen^3x\cos x + c\,sen^2x\cos^2x + d\,sen\,x\cos^3x + e\cos^4x + f = 0$$

Qui, per ottenere un'equazione omogenea, basterà moltiplicare il termine noto f per

$$\left(sen^2x + cos^2x\right)^2 = 1$$

ESERCIZI sulle equazioni goniometriche omogenee in seno e coseno

1) $3sen^2x - 5sen\,x\cos x + 6\cos^2x = 2$ 2) $sen^2x + \left(\sqrt{3} + 1\right)sen\,x\cos x + \sqrt{3}\cos^2x = 0$

3) $4sen^2x - cos^2x = 0$ 4) $4sen^2x - sen\,x\cos x = 0$ 5) $4sen\,x\cos x = \sqrt{3}$

6) $sen^4x - 4sen^2x\cos^2x + 3\cos^4x = 0$ 7) $2sen^4x - 2\cos^4x = 1$ 8) $16sen^4x - 32sen^2x\cos^2x + 5 = 0$

RISPOSTE

1) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = arctg\,4 + k\pi$ 2) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ 3) $x = \pm arctg\frac{1}{2} + k\pi$

4) $x = k\pi \vee x = arctg\frac{1}{4} + k\pi$ 5) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 6) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

7) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ 8) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \pm arctg\frac{\sqrt{35}}{7} + k\pi$