33. FORMULE DI PROSTAFERESI

"**Prostaféresi**" significa "**somma e differenza**", e le formule di prostaferesi si possono applicare quando si ha una somma, o una differenza, di due seni, o di due coseni.

$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q =$
$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q =$
$\cos p + \cos q =$
$\cos p - \cos q =$

Vengono impiegate molto di frequente in Fisica (es. studio delle onde) e **sono utili quando per qualche ragione si desidera trasformare la somma o la differenza in prodotto**.

Le formule di prostaferesi si ricavano dalle formule di addizione e sottrazione, sommando o sottraendo membro a membro due opportune formule e poi ponendo $\alpha+\beta=p,\ \alpha-\beta=q$.

Sommiamo …	Sottraiamo …
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ (*)	$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ (**)
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ (***)	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ (****)

Poniamo ora $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$. Avremo $\begin{matrix}(1)+(2)\\(1)-(2)\end{matrix}\begin{cases}2\alpha=p+q\\ 2\beta=p-q\end{cases}$ e infine $\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$

per cui le nostre quattro formule (*) , (**) , (***) e (****) diventeranno rispettivamente

$\mathbf{sen\,p+sen\,q=2\,sen\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}}$	$\mathbf{sen\,p-sen\,q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\,sen\dfrac{p-q}{2}}$	**LE QUATTRO FORMULE DI PROSTAFERESI**
$\mathbf{\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}}$	$\mathbf{\cos p-\cos q=-2\,sen\dfrac{p+q}{2}\,sen\dfrac{p-q}{2}}$	

Osserviamo che il nostro procedimento è stato di partire da due angoli arbitrari α, β per giungere *alla fine* ai due angoli $\alpha+\beta=p,\ \alpha-\beta=q$.
D'altra parte, se sono dati *in partenza* due qualsiasi angoli p, q, è comunque sempre possibile trovare due altri angoli α, β tali che si abbia $\alpha+\beta=p,\ \alpha-\beta=q$: si tratta degli angoli $\alpha=\dfrac{p+q}{2},\ \beta=\dfrac{p-q}{2}$.
Questa semplice considerazione mostra che le formule trovate valgono *qualunque sia* la coppia di angoli p, q alle quali noi vogliamo riferirle.

E se avessimo invece $\operatorname{sen} p \pm \cos q$, e desiderassimo trasformare la somma o differenza in prodotto?

Nessun problema! Basterà scrivere $\mathbf{sen\,p\pm\cos q} = \left\langle \begin{matrix}\mathbf{sen\,p\pm sen(90°-q)}=\text{ecc.}\\ \text{oppure}\\ \mathbf{\cos(90°-p)\pm\cos q}=\text{ecc.}\end{matrix}\right.$

- Esempio 1: risolvere (soluzioni in gradi) l'equazione $\boxed{\cos 4x+\cos 2x=\cos 3x}$

$2\cos\dfrac{4x+2x}{2}\cos\dfrac{4x-2x}{2}=\cos 3x$
$2\cos\dfrac{6x}{2}\cos\dfrac{2x}{2}=\cos 3x$
$2\cos 3x\cos x=\cos 3x$ (NOTA)
$2\cos 3x\cos x-\cos 3x=0$
$\cos 3x(2\cos x-1)=0$
$\cos 3x=0 \quad 3x=90°+k\cdot 180° \quad \boxed{x=30°+k\cdot 60°}$
$2\cos x-1=0 \quad 2\cos x=1 \quad \cos x=1/2 \quad \boxed{x=\pm 60°+k\cdot 360°}$

NOTA
Qui possiamo portare tutto a 1° membro, raccogliendo poi $\cos 3x$, oppure anche semplificare per $\cos 3x$ tenendo conto però che i valori di x per i quali è verificata l'uguaglianza $\cos 3x=0$ saranno anch'essi soluzioni dell'equazione ("soluzioni trovate per strada")

- Esempio 2: risolvere (soluzioni in radianti) l'equazione $\boxed{sen\,4x + sen\,3x + sen\,2x + sen\,x = 0}$

$(sen\,4x + sen\,2x) + (sen\,3x + sen\,x) = 0$

$2\,sen\frac{4x+2x}{2}\cdot cos\frac{4x-2x}{2} + 2\,sen\frac{3x+x}{2}\cdot cos\frac{3x-x}{2} = 0$

$\cancel{2}\,sen\,3x\cdot cos\,x + \cancel{2}\,sen\,2x\cdot cos\,x = 0$

$cos\,x\,(sen\,3x + sen\,2x) = 0$

$cos\,x = 0 \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

$sen\,3x + sen\,2x = 0$ (NOTA) $\boxed{x = \frac{2}{5}k\pi \vee x = \pi + 2k\pi}$

NOTA
Questa equazione si può risolvere in due modi:

- ancora con prostaferesi

  $2\,sen\frac{3x+2x}{2}\cdot cos\frac{3x-2x}{2} = 0$

  $sen\frac{5x}{2} = 0 \vee cos\frac{x}{2} = 0 \;\; ecc.$

- oppure scrivendo

  $sen\,3x = -sen\,2x$

  $sen\,3x = sen(-2x)$

  $3x = -2x + 2k\pi \vee 3x = \pi + 2x + 2k\pi \quad ecc.$

34. FORMULE DI WERNER

Queste **fanno il servizio inverso rispetto alle formule di prostaferesi**,
perché **trasformano un prodotto in una somma o differenza**.
Si ricavano anch'esse sommando o sottraendo due opportune formule di addizione e sottrazione;
in pratica, se andiamo a rivedere il lavoro fatto per ricavare le formule di prostaferesi,
e ci fermiamo a metà strada, ci ritroviamo di fronte
LE TRE FORMULE DI WERNER, che sono **quelle in grassetto nel riquadro sottostante**.

$\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)=2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta$ (*) $\downarrow$ $\boldsymbol{\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)]}$	$\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ (**) $\downarrow$ $\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)]$	La formula ottenuta è però sostanzialmente una replica della precedente!
$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\,\cos\beta$ (***) $\downarrow$ $\boldsymbol{\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]}$	$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$ (****) $\downarrow$ $\boldsymbol{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]}$	

- Esempio: risolvere (soluzioni in radianti) l'equazione $\boxed{sen\,4x\;sen\,3x = sen\,2x\;sen\,x}$

$-\frac{1}{2}[cos(4x+3x) - cos(4x-3x)] = -\frac{1}{2}[cos(2x+x) - cos(2x-x)]$

$cos\,7x \cancel{-cos\,x} = cos\,3x \cancel{-cos\,x}$

$7x = 3x + 2k\pi \vee 7x = -3x + 2k\pi$

$4x = 2k\pi \qquad \vee 10x = 2k\pi$

$\boxed{x = k\frac{\pi}{2} \qquad \vee x = k\frac{\pi}{5}}$

ESERCIZI sulle formule di prostaferesi e di Werner

1) Dimostra che:

a) $\frac{cos\,3\alpha - cos\,5\alpha}{sen\,3\alpha + sen\,5\alpha} = tg\,\alpha$ b) $\frac{sen\,6\alpha - sen\,2\alpha}{cos\,6\alpha - cos\,2\alpha} = -cotg\,4\alpha$;

c) $cos\,58° = 2\,cos\,74° cos\,16°$ d) $\frac{sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta)}{sen\,2\alpha} = \frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}$

2) Risolvi le equazioni:

a) $cos\,5x - cos\,3x + sen\,x = 0$ b) $sen\,5x + cos\,3x - sen\,x = 0$ c) $sen\,2x + sen4x = 2\,sen\,45°\,cos\,x$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI

1) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}$

2) $x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$

3) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2}{3}\pi$