

36. DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

A. ELEMENTARI

□ La disequazione $\boxed{\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}}$

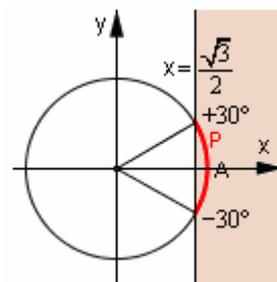
ci chiede di stabilire quali sono gli archi il cui coseno è maggiore di $\sqrt{3}/2$. Per determinarli, possiamo disegnare una circonferenza goniometrica ed evidenziare i suoi punti aventi **ascissa** maggiore di $\sqrt{3}/2$, per stabilire di quali archi essi costituiscono l'estremo terminale.

Nell'ambito del primo giro, gli archi-soluzione sono dunque, in gradi,
 $0^\circ \leq x < 30^\circ$ come pure $330^\circ < x \leq 360^\circ$;

e l'insieme di *tutte* le soluzioni, anche quelle fuori dal 1° giro, è
 $k \cdot 360^\circ \leq x < 30^\circ + k \cdot 360^\circ \vee 330^\circ + k \cdot 360^\circ < x \leq 360^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Una scrittura equivalente, ma preferibile perché più elegante e compatta, è
 $-30^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 30^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Invece scrivere $330^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ sarebbe SBAGLIATO: prova a porre, ad esempio, $k = 0$ e vedrai che si otterrebbe $330^\circ < x < 30^\circ$ il che comporterebbe la disuguaglianza $330^\circ < 30^\circ$, evidentemente falsa.



Qui in figura possiamo vedere la retta di equazione $x = \sqrt{3}/2$ e, ombreggiati, i punti del piano cartesiano la cui ascissa è $> \sqrt{3}/2$. Prendi un punto P sull'arco evidenziato, e disegna, o immagina, il coseno di \widehat{AP} ! Esso risulterà $> \sqrt{3}/2$.

□ Risolviamo ora la $\boxed{\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

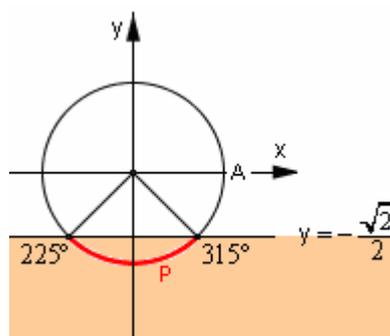
Si tratta di individuare i punti della circonferenza goniometrica

che hanno **ordinata** minore di $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Essi sono evidenziati nella figura qui a fianco: sono le intersezioni fra la circonferenza goniometrica e il semipiano che nella figura è stato ombreggiato.

Gli archi, il cui secondo estremo cade in uno di questi punti, sono

$$225^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 315^\circ + k \cdot 360^\circ$$



I punti P dell'arco evidenziato sono quelli per i quali il seno dell'arco \widehat{AP} (disegnalo, o immaginalo nella tua mente!) è $< -\frac{\sqrt{2}}{2}$

□ E se avessimo $\boxed{\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}}$?

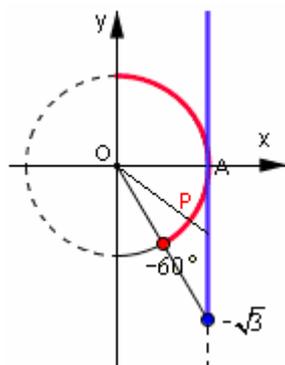
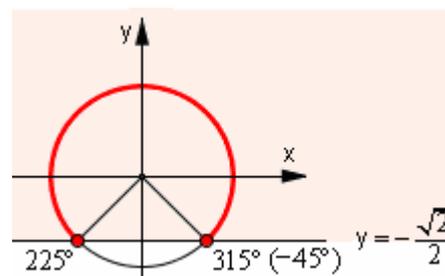
Allora la parte di circonferenza goniometrica che interessa sarebbe quella evidenziata nel disegno, estremi compresi.

Soluzioni:

$$-45^\circ + k \cdot 360^\circ \leq x \leq 225^\circ + k \cdot 360^\circ,$$

o anche

$$k \cdot 360^\circ \leq x \leq 225^\circ + k \cdot 360^\circ \vee 315^\circ + k \cdot 360^\circ \leq x \leq 360^\circ + k \cdot 360^\circ.$$



Le soluzioni della disequazione $\boxed{\tan x \geq -\sqrt{3}}$ sono quegli archi \widehat{AP} per i quali la retta OP va a intersecare la retta verticale di destra in un punto di ordinata $\geq -\sqrt{3}$

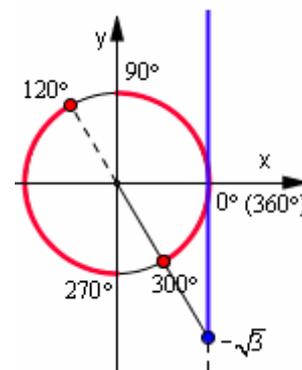
□ $\boxed{\tan x \geq -\sqrt{3}}$

Per le disequazioni goniometriche elementari che coinvolgono la TANGENTE, un SUGGERIMENTO PREZIOSO

è quello di considerare sempre soltanto ← la “META’ DESTRA DELLA TORTA” (archi da -90° a $+90^\circ$, esclusi naturalmente $\pm 90^\circ$ perché a $\pm 90^\circ$ la tangente non esiste) e utilizzare il fatto che la tangente è periodica di periodo “mezzo giro” (180°).

Le soluzioni della disequazione $\boxed{\tan x \geq -\sqrt{3}}$ sono dunque:

$$-60^\circ + k \cdot 180^\circ \leq x < 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$



Questa figura mostra le soluzioni in tutto il “primo giro”:
 $0 \leq x < 90^\circ$
 $120^\circ \leq x < 270^\circ$
 $300^\circ \leq x \leq 360^\circ$

B. DI 2° GRADO

- $8\sin^2 x - 6\sin x + 1 < 0$ Questa è una disequazione di 2° grado in $\sin x$.

Poniamo $\sin x = z$ e la disequazione diventerà $8z^2 - 6z + 1 < 0$

L'equazione associata è $8z^2 - 6z + 1 = 0$ e, risolvendola, si trovano le soluzioni $z = 1/4 \vee z = 1/2$.

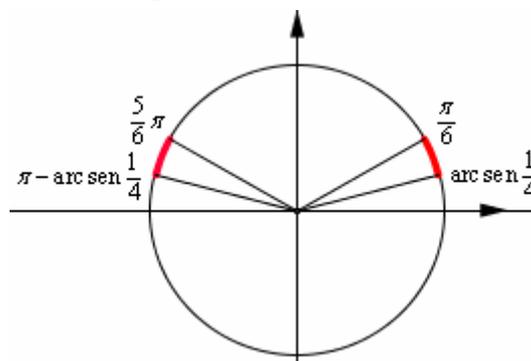
Allora avremo (poiché si devono prendere i valori interni) $1/4 < z < 1/2$ quindi $1/4 < \sin x < 1/2$.

Gli archi z il cui seno è compreso fra $1/4$ e $1/2$ sono evidenziati in figura.

Le soluzioni della disequazione proposta sono dunque

$$\arcsen \frac{1}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \pi - \arcsen \frac{1}{4} + 2k\pi$$



La posizione $\sin x = z$ può, volendo, essere evitata; basta operare sul blocco $\sin x$ come se fosse una singola lettera:

$$8\sin^2 x - 6\sin x + 1 < 0 \quad (\sin x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{8} = \left\langle \frac{1}{4} \right. \text{ da cui (valori interni) } \frac{1}{4} < \sin x < \frac{1}{2} \text{ e da qui } x.$$

soluzioni equazione associata

- $2\cos^2 x + \cos x > 0$

Pongo $\cos x = z$ e ottengo $2z^2 + z > 0$, $z(2z+1) > 0$,

da cui si trae che le soluzioni dell'equazione associata sono 0 e $-1/2$.

Pertanto (valori esterni) avremo $z < -1/2 \vee z > 0$, ossia $\cos x < -1/2 \vee \cos x > 0$

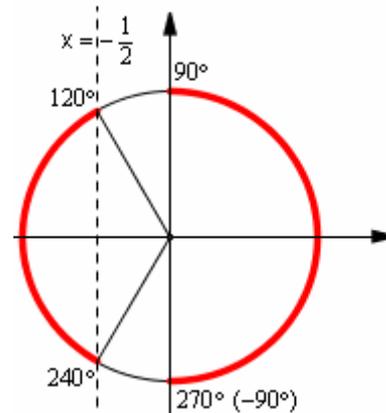
Gli archi z il cui coseno è minore di $-1/2$ o, in alternativa, maggiore di 0 , sono evidenziati in figura. Soluzioni:

$$-90^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$120^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 240^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Se ti riesce, cerca di evitare, per maggiore brevità, la posizione $\cos x = z$, semplicemente trattando il blocco $\cos x$ come se fosse una singola lettera:

$$2\cos^2 x + \cos x > 0 \quad \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{si annulla} \\ \text{per} \\ \cos x = 0}} \underbrace{(2\cos x + 1)}_{\substack{\text{si annulla} \\ \text{per} \\ \cos x = -1/2}} > 0 \quad \underbrace{\cos x < -\frac{1}{2} \vee \cos x > 0}_{\text{valori esterni}}$$



- $3\lg^2 x - 1 \geq 0$ Immediatamente: $3\lg^2 x \geq 1 \quad \lg^2 x \geq \frac{1}{3} \quad |\lg x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \lg x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee \lg x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Essendo coinvolta la tangente, consideriamo soltanto
 ← la “metà destra della torta”
 (angoli da -90° a $+90^\circ$)
 e teniamo presente che la tangente è periodica di periodo 180° :

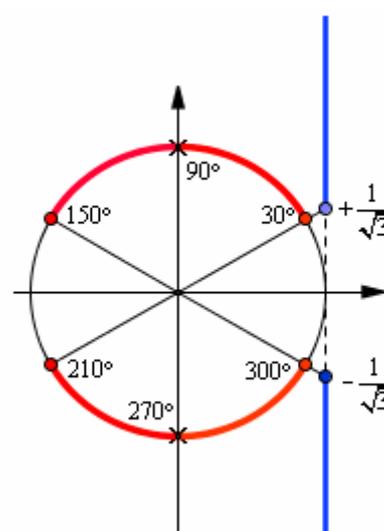
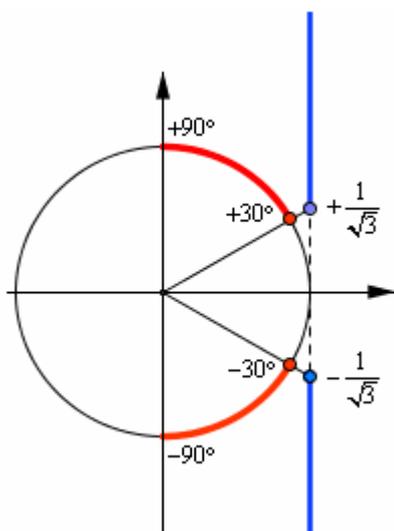
Le soluzioni sono:

$$-90^\circ + k \cdot 180^\circ < x \leq -30^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$30^\circ + k \cdot 180^\circ \leq x < 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Qui a destra sono rappresentate →
 le soluzioni del “1° giro”:
 $30^\circ \leq x \leq 150^\circ$ ma $x \neq 90^\circ$;
 $210^\circ \leq x \leq 300^\circ$ ma $x \neq 270^\circ$

Le “crocette” servono a escludere
 gli archi di 90° e 270° ,
 per i quali la tangente non esiste.



C. DI GRADO SUERIORE AL 2°

$$\square 4\operatorname{sen}^3x\cos x + 2\operatorname{sen}^3x < 2\operatorname{sen}^2x\cos x + \operatorname{sen}^2x$$

Portiamo tutto a 1° membro e scomponiamo in fattori: otteniamo

$$4\operatorname{sen}^3x\cos x + 2\operatorname{sen}^3x - 2\operatorname{sen}^2x\cos x - \operatorname{sen}^2x < 0$$

$$\operatorname{sen}^2x(4\operatorname{sen}x\cos x + 2\operatorname{sen}x - 2\cos x - 1) < 0$$

$$\operatorname{sen}^2x[2\cos x(2\operatorname{sen}x - 1) + (2\operatorname{sen}x - 1)] < 0$$

$$\text{e infine } \operatorname{sen}^2x(2\operatorname{sen}x - 1)(2\cos x + 1) < 0$$

Ci rendiamo conto che qui la situazione è più complicata perché compaiono funzioni goniometriche diverse. In casi come questo

- si studierà il segno di ogni singolo fattore**, mediante la disequazione ausiliaria $\text{fattore} > 0$
 - che porta a determinare quei valori di x per i quali il fattore considerato è positivo,
 - e permette anche di riconoscere i valori di x per i quali il fattore considerato si annulla, o non esiste,
 - quindi rivela pure (per esclusione) i valori di x per i quali il fattore considerato è negativo
- poi **si disegnerà uno schema riassuntivo** per il “confronto dei segni” (si può scegliere se dare a questo schema riassuntivo un aspetto “**circolare**” oppure “**lineare**”)
- e infine dallo schema riassuntivo, che servirà per avere un comodo “colpo d’occhio complessivo” sulla situazione dei segni dei vari fattori in corrispondenza dei vari valori di x , **si trarranno le conclusioni**.

a) STUDIO DEL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE

$$\boxed{1^\circ f. > 0} \quad \operatorname{sen}^2x > 0 \quad \boxed{\operatorname{sen}x \neq 0} \quad (\text{NOTA})$$

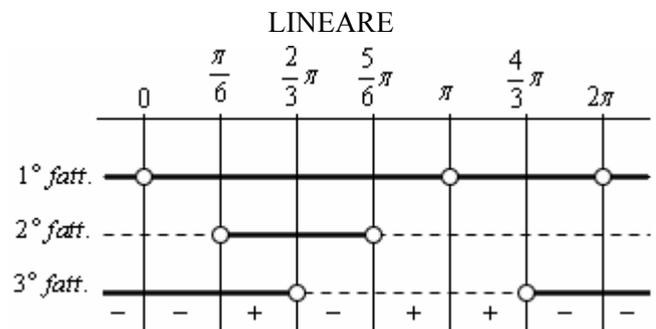
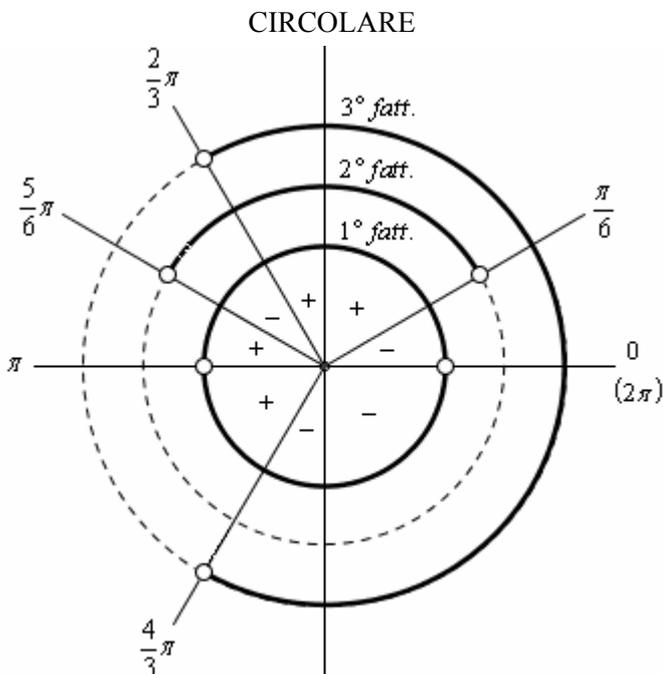
$$\boxed{2^\circ f. > 0} \quad 2\operatorname{sen}x - 1 > 0 \quad \boxed{\operatorname{sen}x > 1/2} \quad (\text{NOTA})$$

$$\boxed{3^\circ f. > 0} \quad 2\cos x + 1 > 0 \quad \boxed{\cos x > -1/2} \quad (\text{NOTA})$$

NOTA

Non stiamo a specificare qui i valori di x per cui questa condizione è verificata; questi valori, li evidenzieremo direttamente nello schema (circolare o lineare che sia) attraverso una linea a tratto continuo

b) SCHEMA RIASSUNTIVO



In entrambi gli schemi, circolare e lineare,

la **simbologia** da noi usata è:

LINEA CONTINUA — FATTORE POSITIVO
 PALLINO VUOTO ○ FATTORE NULLO
 LINEA TRATTEGGIATA --- FATTORE NEGATIVO
 (eventualmente, crocetta × per “fattore non esistente”)

SUGGERIMENTO:

In uno schema lineare, è sempre opportuno estendere la linea (continua o tratteggiata, a seconda dei casi) anche “un pochino a sinistra” rispetto a 0 e “un pochino a destra” rispetto a 2π . L’utilità sarà particolarmente evidente in un contesto di “studio di funzione”.

c) CONCLUSIONI

Dallo schema riassuntivo si trae facilmente che la disequazione $\operatorname{sen}^2x(2\operatorname{sen}x - 1)(2\cos x + 1) < 0$

ammette, nel primo giro, le soluzioni $0 < x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{2}{3}\pi < x < \frac{5}{6}\pi \vee \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$.

Per le soluzioni in generale, basterà riscrivere tutto con “ $+2k\pi$ ” dopo ciascun estremo di intervallo.

D. FRATTE

□ $\frac{\sin x}{\cos x(1+\cos x)} \geq 0$ Questa è una disequazione fratta, e si risolve anch'essa studiando il segno dei vari fattori in gioco per poi tracciare uno schema (circolare o lineare) per il confronto dei segni

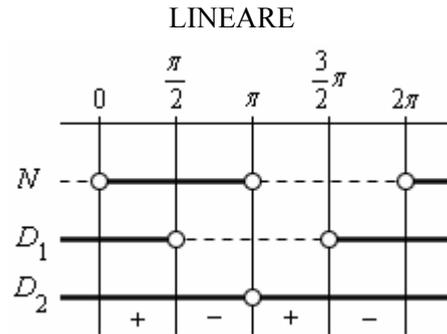
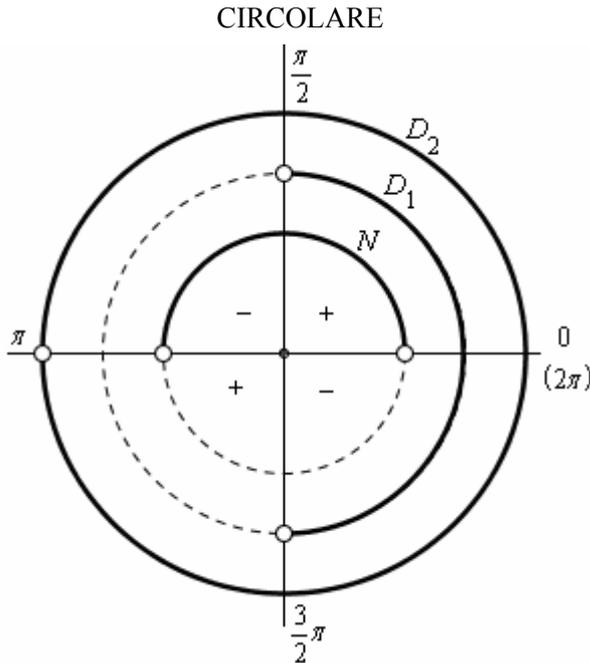
a) **STUDIO DEL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE**

$N > 0$ $\sin x > 0$ (NOTA)
 $D_1 > 0$ $\cos x > 0$ (NOTA)
 $D_2 > 0$ $1 + \cos x > 0$ $\cos x > -1$ (NOTA)

NOTA

Non stiamo a specificare qui i valori di x per cui questa condizione è verificata; questi valori, li evidenzieremo direttamente nello schema (circolare o lineare che sia) attraverso una linea a tratto continuo

b) **SCHEMA RIASSUNTIVO**



$0, 2\pi$ sono soluzioni
 (annullano il numeratore, e non annullano il denominatore)
 π NON è soluzione
 (annulla il numeratore, ma anche il denominatore!)

La disequazione porta il \geq .

In questi casi, conviene pensare prima alla disequazione "stretta" ($>$) poi aggiungere alle soluzioni trovate anche i valori che rendono la frazione $= 0$.

E una frazione è uguale a 0 quando si annulla il suo NUMERATORE (purché non si annulli contemporaneamente anche il denominatore):

$\frac{0}{a} = 0$ $\frac{a}{0} = \text{IMPOSS.}$ $\frac{0}{0} = \text{INDET.}$

c) **CONCLUSIONI**

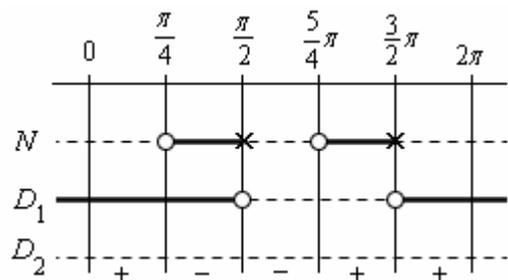
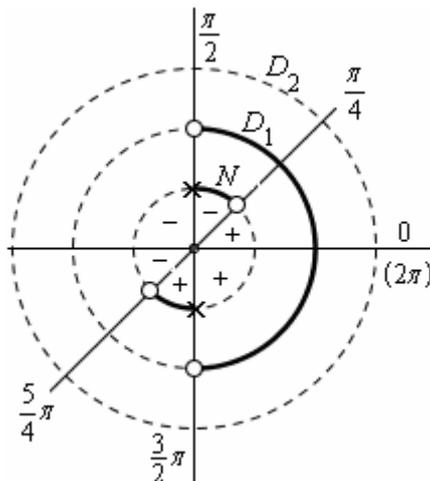
Dallo schema riassuntivo si trae facilmente che la disequazione proposta ammette, nel primo giro, le soluzioni $0 \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \pi < x < \frac{3}{2}\pi \vee x = 2\pi$.

Per le soluzioni in generale, basterà riscrivere tutto con "+2kπ" dopo ciascun estremo di intervallo.

□ $\frac{\tan x - 1}{\cos x(\sin x - 2)} \leq 0$

Osserviamo che $\sin x - 2 > 0$
 $\sin x > 2$
 è IMPOSSIBILE!
 Il seno è sempre compreso fra -1 e 1, e il fattore $\sin x - 2$ è negativo per ogni x !

Soluzioni nel 1° giro:
 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ ma $x \neq \frac{\pi}{2}$



La "crocetta" ha il significato di "non esistenza", di "esclusione": per $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ la tangente non esiste!

E. LINEARI ($a \sin x + b \cos x + c \geq 0$)

□ $\sqrt{3} \sin x + \cos x < 1$ Questa è una disequazione goniometrica LINEARE ($\sqrt{3} \sin x + \cos x - 1 < 0$)

1° modo: con le formule parametriche

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x < 1$$

$$\sqrt{3} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} < 1 \quad (\text{NOTA 1})$$

$$2t\sqrt{3} - 1 - t^2 < 1 + t^2 \quad (\text{NOTA 2})$$

$$-2t^2 + 2t\sqrt{3} < 0$$

$$t^2 - t\sqrt{3} > 0 \quad (\text{NOTA 3})$$

$$t(t - \sqrt{3}) > 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono 0 e $\sqrt{3}$
e le soluzioni della disequazione sono $t < 0 \vee t > \sqrt{3}$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} < 0 \vee \operatorname{tg} \frac{x}{2} > \sqrt{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} < 0 + k\pi \vee \frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{NOTA 4})$$

$$-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (\text{NOTA 5})$$

Abbiamo applicato le formule parametriche,
e questo ha comportato di escludere gli archi $\pi + 2k\pi$,
i quali, d'altra parte, potrebbero benissimo essere soluzioni.
Andiamo dunque a verificare direttamente,
sostituendo nella disequazione data,
se il valore π ne è soluzione oppure no
(la stessa risposta si estenderà, com'è ovvio,
a tutti i valori $\pi + 2k\pi$).

$$\sqrt{3} \sin \pi + \cos \pi < 1$$

$$\sqrt{3} \cdot 0 + (-1) < 1$$

$$-1 < 1 \quad \text{OK}$$

Sì, anche π è soluzione della nostra disequazione,
e pertanto pure tutti i valori $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ lo sono.

Ricapitoliamo: in definitiva,

- possiamo andare da $\frac{2}{3}\pi$ fino a π ($\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$),
- prendere anche il valore π ($\pi + 2k\pi$),
- e poi ricominciare col "mezzo giro inferiore" ($-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$, che per $k = 1$ diventa $\pi < x < 2\pi$).

In pratica, possiamo allora dire che le **soluzioni** sono

- nel 1° giro, tutti gli archi da $\frac{2}{3}\pi$ fino a 2π ($\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$)

- e in generale, tutti gli archi x tali che $\boxed{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

NOTA 1

Come sappiamo, l'applicazione delle formule parametriche è possibile sotto la condizione $x \neq \pi + 2k\pi$

NOTA 2

Nonostante si tratti di una disequazione, qui abbiamo potuto, eccezionalmente, sbarazzarci dal denominatore mediante moltiplicazione per esso, essendo $1+t^2 > 0$ per qualsiasi valore di t

NOTA 3

Abbiamo diviso per -2 , cambiando ovviamente il verso perché $-2 < 0$.

NOTA 4

Quando è coinvolta la tangente, è di solito conveniente pensare innanzitutto alla "metà destra della torta" (archi da $-\pi/2$ a $\pi/2$) aggiungendo poi $+k\pi$ per tener conto della periodicità.

NOTA 5

Come è evidente, quest'ultimo passaggio è stato ottenuto moltiplicando il passaggio precedente per 2.

2° modo: con un "sistema misto"

La coppia $(\sin x, \cos x)$ di cui stiamo andando alla caccia soddisferà anche alla 1ª Relazione Fondamentale della Goniometria, quindi avremo il sistema ("misto", perché composto da una disequazione e un'equazione)

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin x + \cos x < 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

il quale, se poniamo

$$\sin x = Y$$

$$\cos x = X$$

diventerà

$$\begin{cases} \sqrt{3} Y + X < 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

e potrà essere risolto graficamente.

La seconda condizione è rappresentata, com'è noto, da una circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

La prima condizione potrà essere riscritta come $\sqrt{3} Y < -X + 1$ e infine $Y < -\frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Una coppia (X, Y) soddisfa dunque a tale condizione

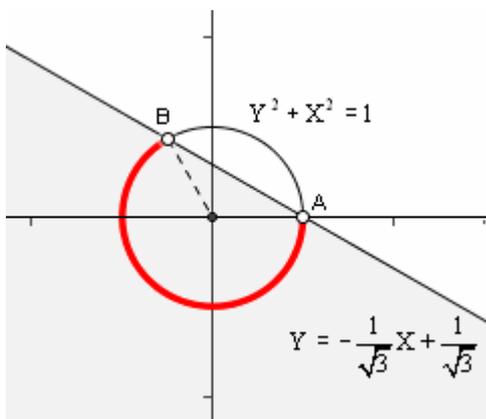
se e solo se il punto di coordinate (X, Y) è tale che la sua Y sia minore di $-\frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{3}}$;

ma ciò equivale a richiedere che il punto (X, Y) stia AL DI SOTTO della retta $Y = -\frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Insomma, la risoluzione grafica di $\begin{cases} \sqrt{3} Y + X < 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$

consiste nella ricerca di quei punti della circonferenza $Y^2 + X^2 = 1$

che stanno al di sotto della retta $Y = -\frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{3}}$ (intersezione circonferenza/semipiano).



Ecco dunque il grafico.

L'arco evidenziato è l'intersezione cercata, e i suoi punti coincidono con gli estremi degli archi che sono soluzione della disequazione proposta (puoi andare a rivedere pagina 58 per una motivazione accurata di questo fatto).

Per determinare le coordinate di A e di B si può risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \sqrt{3} Y + X = 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

Si trova $A(1, 0)$ e $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

da cui gli archi di 0 (2π) radianti e di $\frac{2}{3}\pi$ radianti,

e la conclusione: $\boxed{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

3° modo: con l'arco ausiliario

Così come abbiamo fatto a pagina 59, dividiamo per il numero $\sqrt{a^2 + b^2}$ onde "normalizzare" la coppia dei coefficienti (a, b) e andare poi alla ricerca dell' "arco ausiliario".

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

dunque avremo

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x < 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x < \frac{1}{2}$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (\text{NOTA 1})$$

$$-\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$-\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \quad (\text{NOTA 2})$$

NOTA 1

Perché mai abbiamo utilizzato un arco negativo? Semplicemente per avere la possibilità di scrivere le soluzioni in una forma molto compatta.

NOTA 2

Prova a porre $k = 1$ e otterrai

$$\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi.$$

Insomma, l'insieme di soluzioni trovato coincide perfettamente con quello determinato per mezzo dei due metodi precedenti.

4° modo: con una "classica" risoluzione grafica

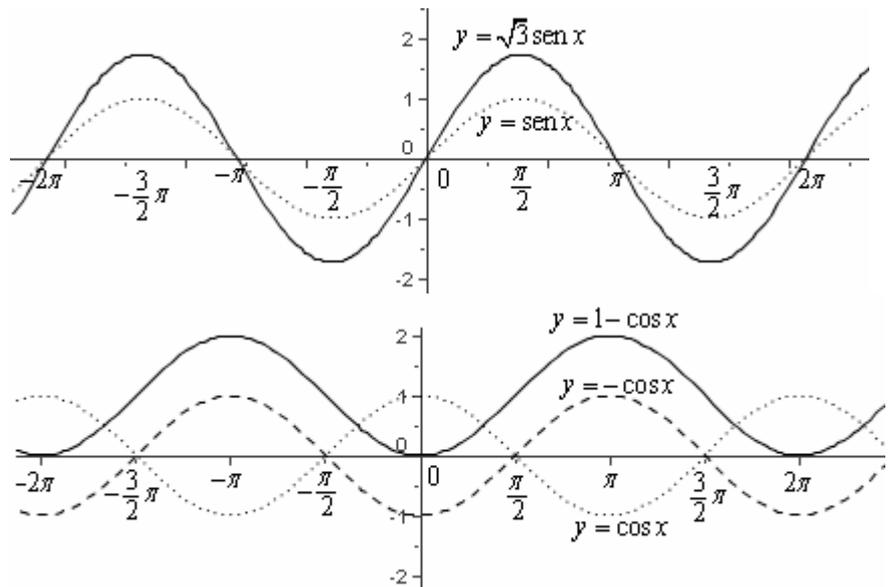
La disequazione data è $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x < 1$.

Riscrivendola come $\sqrt{3} \operatorname{sen} x < 1 - \cos x$ la si può risolvere graficamente con buona facilità.

Il grafico della funzione $y = \sqrt{3} \operatorname{sen} x$ si può ottenere dal grafico ben noto della $y = \operatorname{sen} x$ moltiplicando ciascuna ordinata per $\sqrt{3}$ ("effetto fisarmonica verticale").

Il grafico della $y = 1 - \cos x$ si può costruire passando

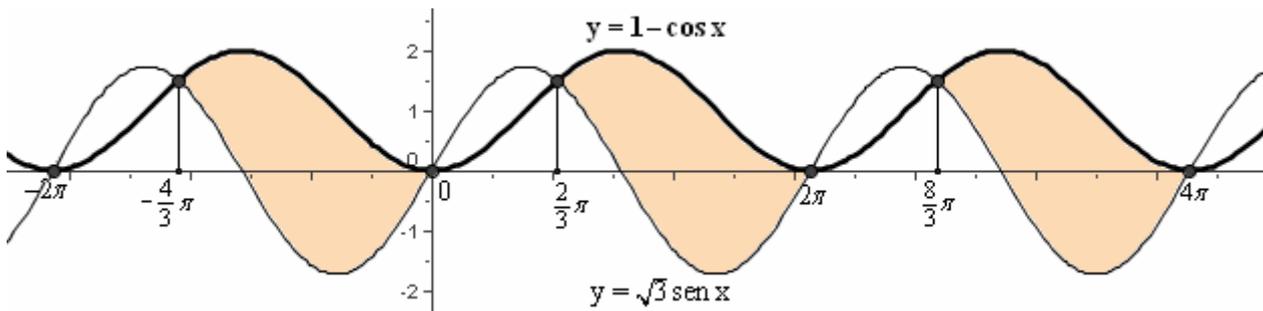
- dapprima da $\cos x$ a $-\cos x$ (simmetrizzazione rispetto all'asse delle ascisse)
- poi da $-\cos x$ a $-\cos x + 1$ (traslazione verso l'alto di 1 unità).



Tracciando le due curve sullo stesso riferimento cartesiano, è fatta!

Basta andare a vedere per quali valori di x

il grafico della $y = \sqrt{3} \operatorname{sen} x$ VA A FINIRE AL DI SOTTO del grafico della $y = 1 - \cos x$



I punti di intersezione fra i due grafici si possono determinare risolvendo l'equazione $\sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1 - \cos x$.

$$\square \quad \sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0$$

ATTENZIONE!

Questa è una disequazione goniometrica lineare **OMOGENEA**, ma, trattandosi appunto di una disequazione e non di un'equazione, risolvere tramite divisione per $\cos x$, per far comparire la tangente, sarebbe **SBAGLIATO!**

Infatti la quantità $\cos x$ può assumere anche valori negativi, e in una disequazione sappiamo che **NON** si può moltiplicare o dividere ambo i membri per una stessa quantità, a meno che questa sia sempre strettamente positiva.

Non potendosi dunque dividere per $\cos x$, dovremo risolvere come abbiamo fatto per la lineare non omogenea dell'esempio precedente (ci puoi provare!).

Oppure ...

... oppure potremmo, sì, pensare a una risoluzione tramite divisione per $\cos x$, ma distinguendo i casi:

- $\cos x > 0$, nel quale la divisione è possibile, mantenendo il verso invariato
- $\cos x < 0$, nel quale è possibile dividere, se però simultaneamente si cambia il verso
- $\cos x = 0$, nel quale ovviamente la divisione per $\cos x$ non è possibile in alcun modo;

ma $\cos x$ è uguale a 0 esclusivamente quando x vale (nel 1° giro) $\frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi$,

e allora basterà andare a vedere, per sostituzione diretta,

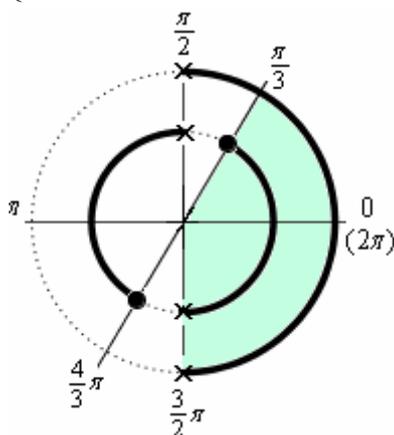
se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione, e fare poi altrettanto per $x = \frac{3}{2}\pi$

Caso a)

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\cos x} \leq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x - \sqrt{3} \leq 0; \tan x \leq \sqrt{3} \\ \cos x > 0 \end{cases}$$



$$0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

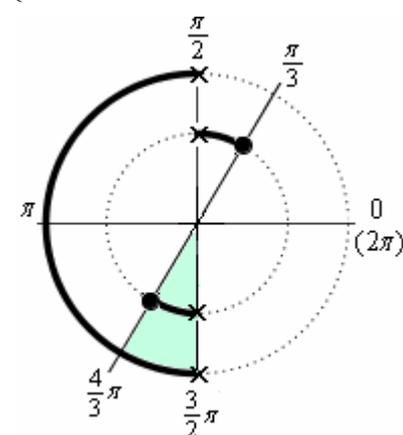
$$\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Caso b)

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\cos x} \geq 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x - \sqrt{3} \geq 0; \tan x \geq \sqrt{3} \\ \cos x < 0 \end{cases}$$



$$\frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Caso c)

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

Il coseno si annulla quando
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$.

Ora, $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione? Vediamo.

$$\sin \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$1 - \sqrt{3} \cdot 0 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$1 \leq 0$ **NO, falsa**: $\frac{\pi}{2}$ non è soluzione

E $x = \frac{3}{2}\pi$ è soluzione? Vediamo.

$$\sin \frac{3}{2}\pi - \sqrt{3} \cdot \cos \frac{3}{2}\pi \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$-1 - \sqrt{3} \cdot 0 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$-1 \leq 0$ **OK, vera!**,

sì, $\frac{3}{2}\pi$ è soluzione

Ciascuna delle due figure mostra uno “schema di SISTEMA circolare”.

Simbologia:	Condizione verificata	Linea spessa, pallino pieno
	Condizione non verificata	Linea tratteggiata (o nessuna linea), crocetta di esclusione

In definitiva, le soluzioni sono gli x tali che $0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$

oppure (l'utilizzo di un arco negativo permette una scrittura più compatta)

$$-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

F. OMOGENEE (= tutti i termini dello stesso grado) IN $\sin x, \cos x$

$$\square \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x > 0$$

Di fronte a questa disequazione “di 2° grado omogenea in $\sin x$ e $\cos x$ ”
si può tranquillamente risolvere dividendo per $\cos^2 x$, allo scopo di far comparire la tangente.

Infatti in una disequazione è sempre possibile (lasciando il verso inalterato)
 dividere ambo i membri per uno stesso numero *positivo*,
 e $\cos^2 x$ **non può mai (in quanto quadrato) assumere valore negativo;**

**occorrerà soltanto ricordarsi, alla fine, di prendere in considerazione
 in modo “speciale” i valori di x per i quali il coseno si annulla,
 e di verificare attraverso una sostituzione diretta se siano soluzione oppure no.**

$$\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x > 0$$

$$\frac{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x}{\cos^2 x} > 0 \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 4 > 0$$

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - 4) > 0$$

$$\operatorname{tg} x < 1 \vee \operatorname{tg} x > 4$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \operatorname{arctg} 4 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Il coseno si annulla quando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. Perciò, domandiamoci:

$x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione? $\sin^2 \frac{\pi}{2} - 5 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{2} > 0$ $1^2 - 5 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 > 0$ $1 > 0$ OK: $\frac{\pi}{2}$ è soluzione	$x = \frac{3}{2}\pi$ è soluzione? $\sin^2 \frac{3}{2}\pi - 5 \sin \frac{3}{2}\pi \cos \frac{3}{2}\pi + 4 \cos^2 \frac{3}{2}\pi > 0$ $(-1)^2 - 5 \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 0 > 0$ $1 > 0$ OK: $\frac{3}{2}\pi$ è soluzione (quindi anche $-\frac{\pi}{2}$)
---	--

In definitiva, le soluzioni sono: $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \operatorname{arctg} 4 + k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\square \sqrt{\sin x} > 2 \sin x - 1$$

Poniamo $\sin x = z$ e otterremo la disequazione irrazionale

$$\sqrt{z} > 2z - 1$$

che risolveremo rispetto alla sua incognita z ;
 alla fine, dai valori trovati per z risaliremo ai valori di x .

$\sqrt{z} > 2z - 1$ è “del 2° tipo” e si riconduce a una coppia di sistemi, separati dal connettivo logico “vel”.

$$\begin{cases} 2z - 1 < 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2z - 1 \geq 0 \\ z^2 > (2z - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z < 1/2 \\ z \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} z \geq 1/2 \\ z^2 > 4z^2 - 4z + 1; \quad 3z^2 - 4z + 1 < 0; \quad 1/3 < z < 1 \end{cases}$$

$$0 \leq z < \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \leq z < 1$$

La disequazione in z è quindi verificata per $0 \leq z < 1$ e di conseguenza si avrà:

$$0 \leq \sin x < 1$$

$$2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, \text{ ma } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ESERCIZI sulle disequazioni goniometriche
(sono richieste le soluzioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$)

- 1) $\operatorname{sen} x + 8 < 3(4 - \operatorname{sen} x)$
- 2) $4\cos^2 x - 17\cos x + 4 < 0$
- 3) $\frac{1}{\cos^2 x} < 4\operatorname{tg} x$
- 4) $\operatorname{sen} x + \cos x > 0$
- 5) $4\cos^4 x < \cos^2 x$
- 6) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x < 0$
- 7) $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x(2\operatorname{sen} x - \sqrt{2})} \leq 0$
- 8) $2\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x < 0$
- 9) $\operatorname{sen} x + \cos x < 1$
- 10) $2\operatorname{sen} x - 2\cos x < \sqrt{3} - 1$
- 11) $\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2\cos^2 x - 1} \geq 0$
- 12) $1 + \operatorname{sen} 2x > 4\cos^2 x$
- 13) $\cos x - \cos 3x < \operatorname{sen} 2x$
- 14) $\operatorname{sen} x + \cos 2x > \operatorname{sen} 3x$
- 15) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

SOLUZIONI

- 1) $x \neq \frac{\pi}{2}$ 2) $0 \leq x < \arccos \frac{1}{4} \vee 2\pi - \arccos \frac{1}{4} < x \leq 2\pi$
- 3) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5}{12}\pi \vee \frac{13}{12}\pi < x < \frac{17}{12}\pi$ 4) $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$
- 5) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$ ma $x \neq \frac{\pi}{2} \vee \frac{4}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$ ma $x \neq \frac{3}{2}\pi$
- 6) $\frac{2}{3}\pi < x < \pi \vee \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$ 7) $0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi$
- 8) $\frac{\pi}{4} < x < \pi - \operatorname{arctg} 2 \vee \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi - \operatorname{arctg} 2$ 9) $\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$
- 10) $0 \leq x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{7}{6}\pi < x \leq 2\pi$ 11) $0 \leq x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \pi \leq x < \frac{5}{4}\pi \vee \frac{3}{2}\pi \leq x < \frac{7}{4}\pi$
- 12) $\frac{\pi}{4} < x < \pi - \operatorname{arctg} 3 \vee \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi - \operatorname{arctg} 3$
- 13) $0 < x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi \vee \pi < x < \frac{3}{2}\pi$
- 14) $0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{5}{6}\pi < x < \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$
- 15) $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{23}{12}\pi$