PROBLEMI IN PIU' INCOGNITE - SISTEMI DI EQUAZIONI

1. I SISTEMI DI EQUAZIONI E IL METODO DI "SOSTITUZIONE"

❑ PROBLEMA SVOLTO 1

Trovare due numeri interi sapendo che:
- **se si diminuisce il più grande di 4 unità e si aumenta di 3 unità il più piccolo, il prodotto dei due numeri diminuisce di 8 unità;**
- **se si divide la somma dei due numeri per la loro differenza si ottiene quoziente 6 e resto 2.**

E' subito evidente **la grande difficoltà a cui si andrebbe incontro se si cercasse di risolvere con una sola incognita**.
Infatti, riflettiamo: qualunque numero fra i due decidessimo di indicare con *x*, come faremmo poi ad esprimere l'altro numero per mezzo di *x* ? Sarebbe un bel grattacapo!!!

Pertanto **imposteremo questo problema con DUE INCOGNITE anziché con una sola**.

Quando si risolve con più di una incognita
(e ciò è opportuno specialmente quando non è facile esprimere tutte le quantità in gioco in funzione di una sola di esse)
si scrivono tante equazioni quante sono le incognite poste e le si riunisce entro una "graffa di sistema", che equivale, dal punto di vista logico, a un connettivo "ET".

Risolvere un sistema significa determinare quei valori delle incognite in gioco che soddisfano CONTEMPORANEAMENTE TUTTE le equazioni da cui il sistema è formato.

RISOLUZIONE

x = numero più grande
y = numero più piccolo

$$\boxed{\begin{cases}(x-4)(y+3)=xy-8\\ 6(x-y)+2=x+y\end{cases}}$$

NOTA *a:b dà* 6 *col resto di* 2 *quando* $6b+2=a$ (*e* $2<b$)

Innanzitutto, svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in "**FORMA NORMALE**".
Ciò significa che, in ciascuna equazione, dovremo fare in modo di avere:
- **a primo membro, un termine per ognuna delle incognite poste;**
- **a secondo membro, il termine noto.**

$$\begin{cases}\cancel{xy}+3x-4y-12=\cancel{xy}-8\\ 6x-6y+2=x+y\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-4y=-8+12\\ 6x-x-6y-y=-2\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}3x-4y=4\\ 5x-7y=-2\end{cases}\quad \textbf{FORMA NORMALE}}$$

A questo punto, possiamo proseguire scegliendo a piacere fra:
1) **il metodo di sostituzione** (*il più semplice e generale*)
2) **il metodo di riduzione** (*molto brillante e divertente*)
3) **il metodo di Cramer** (*basato sui "determinanti", completamente "meccanico"; pagg. 201 … 203*)
4) **il metodo del confronto** (*applicabile solo con 2 equazioni e 2 incognite; vedi pag. 200*)

Occupiamoci innanzitutto del metodo 1).

Il metodo di **SOSTITUZIONE** consiste nell'**isolare un'incognita da una delle due equazioni per sostituire poi** l'espressione così ottenuta **nell'altra equazione, che in tal modo si troverà a contenere un'incognita sola**.

$$\begin{cases} 3x-4y=4 \\ 5x-7y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x=4y+4; \quad x=\dfrac{4y+4}{3} \quad (*) \\ 5\cdot\dfrac{4y+4}{3}-7y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4y+4}{3} \\ \dfrac{20y+20}{3}-7y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4y+4}{3} \\ \dfrac{20y+20-21y}{\cancel{3}}=\dfrac{-6}{\cancel{3}} \ ; \ -y=-26 \ ; \ y=26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=26 \\ x=\dfrac{4y+4}{3}=\dfrac{4\cdot 26+4}{3}=\dfrac{104+4}{3}=\dfrac{108}{3}=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=36 \\ y=26 \end{cases}$$

VERIFICA sul sistema (**):

$$\begin{cases} (36-4)(26+3)=36\cdot 26-8 \\ 6(36-26)+2=36+26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32\cdot 29=936-8 \\ 6\cdot 10+2=62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 928=928 \\ 62=62 \end{cases} \quad OK!!!$$

La VERIFICA direttamente sul *problema*
(che poi è la più completa e “sicura”),
è lasciata al lettore.

(*)

♥ **Teoricamente si può isolare un’incognita qualsiasi da un’equazione qualsiasi, ma nella pratica converrà, per comodità di calcolo, privilegiare l’equazione più semplice e soprattutto il termine col coefficiente più semplice,** perché questo coefficiente è poi destinato a passare a denominatore! … E avere un denominatore piccolo è vantaggioso quando poi lo si manda via.

(**)

♥ La **VERIFICA**, in un sistema, si effettua sostituendo, nel sistema iniziale, al posto delle singole incognite, i valori rispettivamente trovati.

TUTTE le equazioni devono trasformarsi in uguaglianze vere, altrimenti c’è qualcosa che non va.

Vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO**? **DAVVERO UTILISSIMO**?

Falla sempre, questa verifica, alla fine della risoluzione! In questo modo sarai davvero sicuro di aver fatto giusto, oppure scoprirai inequivocabilmente che c’è un errore!!!

❑ PROBLEMA SVOLTO 2

Anna dice al fratello Bruno:

“Il numero dei miei fratelli è uguale al doppio del numero delle mie sorelle”.

E Bruno replica:

“Io, invece, ho tanti fratelli quante sorelle”.

Quanti figli maschi e quante figlie femmine ci sono in famiglia?

$x = numero\ \ figlie\ \ femmine$

$y = numero\ \ figli\ maschi$

$$\begin{cases} y=2(x-1) \\ y-1=x \end{cases}$$

NOTA
Il sistema ottenuto è molto elementare,
e con un’equazione già nella forma $y=...$
In casi simili, si potrebbe anche evitare di portare in forma normale;
tuttavia, l’abbiamo fatto ugualmente “per buona abitudine”,
dato che nella maggioranza dei casi è utilissimo,
anche in vista di altri metodi di risoluzione (riduzione, Cramer).

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ -x+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -x+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=x+1 \\ -2x+x+1=-2; \ -x=-3; \ x=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=3 \\ y=x+1=3+1=4 \end{cases}$$

VERIFICA, direttamente sul problema

$3\ \ femmine\ e\ 4\ maschi:\quad \underset{\text{ANNA}}{F}\quad F\quad F\quad M\quad M\quad M\quad \underset{\text{BRUNO}}{M}$

Giusto: Anna può dire che il numero dei suoi fratelli è due volte quello delle sue sorelle ...
... e Bruno ha ragione quando afferma di avere tanti fratelli quante sorelle.

2. LA RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA CON PIU’ DI UNA INCOGNITA: CONSIDERAZIONI GENERALI

Di fronte ad un problema, *di norma è preferibile la risoluzione con una sola incognita,*
la quale, come sappiamo, si svolge in tre fasi:

1) Porre l’incognita
2) Esprimere le varie quantità in gioco per mezzo dell’incognita
3) Impostare l’equazione risolvente

Se, tuttavia, la fase 2) si preannuncia come *particolarmente difficoltosa*, ossia:

**se accade che, comunque si ponga l’incognita,
si prospetti poi molto complicato
esprimere le varie quantità in gioco tramite l’incognita scelta,
allora si passerà ad una impostazione con due o più incognite**.

**Si dovranno in tal caso scrivere tante equazioni quante sono le incognite poste,
e raggruppare queste equazioni nella cosiddetta “graffa di sistema”.**
Vedremo più avanti, in un capitolo apposito (pag. 402), cosa accade quando
il numero delle condizioni non coincide col numero delle incognite.

**Si dice dunque
“SISTEMA DI EQUAZIONI”
un gruppo di due o più equazioni,
contenenti due o più incognite,
rispetto al quale l’obiettivo è
di trovare quei valori delle incognite che verificano
♥ CONTEMPORANEAMENTE TUTTE
le equazioni in gioco, NESSUNA ESCLUSA.**

In lingua Inglese, in effetti, troviamo scritto
“system of equations”
oppure, in alternativa, “SIMULTANEOUS equations”,
ossia equazioni per le quali cerchiamo quei valori delle incognite
che le soddisfino *simultaneamente tutte quante*.

La "graffa di sistema" $\{$
significa "ET":

$$\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases}\quad \textit{è come dire}\quad \begin{array}{c}(1)\\ \textit{ET}\\(2)\\ \textit{ET}\\(3)\end{array}$$

3. SISTEMI DI EQUAZIONI: ALTRI ESEMPI SVOLTI (SOSTITUZIONE)

Ecco qui di seguito due altri esempi svolti e commentati

❑
$$\begin{cases}3x+4y=5\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{y}{6}=\dfrac{1}{2}-x\end{cases};\quad \begin{cases}3x+4y=5\\ \dfrac{2-y}{\cancel{6}}=\dfrac{3-6x}{\cancel{6}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x+4y=5\\ 6x-y=1\end{cases}\quad (*)$$

$$\begin{cases}-y=1-6x;\quad y=6x-1\\ 3x+4(6x-1)=5\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=6x-1\\ 3x+24x-4=5;\quad 27x=9;\quad x=1/3\end{cases}$$

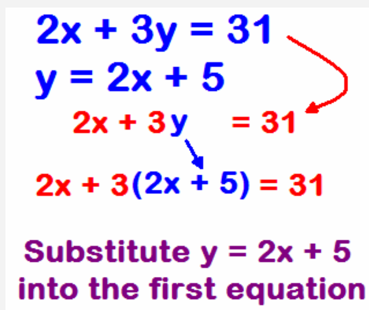
$$\begin{cases}x=1/3\\ y=6x-1=6\cdot\dfrac{1}{3}-1=2-1=1\end{cases}$$

Verifica: $\begin{cases}3\cdot\dfrac{1}{3}+4\cdot 1=5\\ 6\cdot\dfrac{1}{3}-1=1\end{cases};\quad \begin{cases}1+4=5\\ 2-1=1\end{cases}\quad OK$

♥ SE CI SONO DEI DENOMINATORI, ELIMINARLI IN MODO CORRETTO;

PORTARE IN FORMA NORMALE (quasi sempre molto conveniente)

(*) In questo caso è conveniente isolare y
dalla seconda equazione;
infatti questa contiene il termine $-y$,
nel quale y ha come coefficiente -1,
per cui, per isolare la y,
occorrerà a un certo punto effettuare
un cambiamento dei segni,
ma in compenso
non verrà introdotto
alcun denominatore!



Dal sito
http://maths.nayland.school.nz

❑
$$\begin{cases}\dfrac{\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}}{2}=1\\[2ex] \dfrac{x+y-3}{5}=\dfrac{x-y-1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=1 \quad (1)\\[2ex] \dfrac{2x+2y-6}{\cancel{10}}=\dfrac{5x-5y-5}{\cancel{10}} \quad (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x-4y-4-4x+y}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=1\\[1ex] 2x+2y-6=5x-5y-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{-2x-3y-4}{12}=1\\[1ex] 2x-5x+2y+5y=6-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2x-3y-4=12 \quad (3)\\ -3x+7y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2x-3y=16\\ -3x+7y=1\end{cases};\quad \begin{cases}2x+3y=-16\\ 3x-7y=-1\end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases}2x=-16-3y;\quad x=\dfrac{-16-3y}{2}\\[2ex] 3\cdot\dfrac{-16-3y}{2}-7y=-1 \quad (5)\end{cases}$$

$$\frac{-48-9y}{2}-7y=-1$$

$$-48-9y-14y=-2$$

$$-23y=46;\quad y=-2$$

$$\begin{cases}y=-2\\ x=\dfrac{-16-3y}{2}=\dfrac{-16+6}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-5\\ y=-2\end{cases} \quad (6)$$

Per esercizio,
puoi risolvere i sistemi seguenti:

I) $\begin{cases}3x+4y=50\\ 7x+y=0\end{cases}$

II) $\begin{cases}2x-y+10=0\\ 3(x+5)-7y=0\end{cases}$

III) $\begin{cases}3(x-y)=7-y\\ \dfrac{2x+3}{5}+\dfrac{1}{2}y=0\end{cases}$

IV) $\begin{cases}x-2y=\dfrac{1+2y}{3}\\ 4(x-1)-4(y-1)=3x\end{cases}$

facendo poi la
VERIFICA PER SOSTITUZIONE.

(1)

L'equazione $\dfrac{\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}}{2}=1$

è stata riscritta come $\left(\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=1$

allo scopo di eliminare le linee di frazione sovrapposte.

A dire il vero, sarebbe stato qui molto più "furbo"
raggiungere lo stesso obiettivo
moltiplicando per 2 entrambi i membri:

$$\cancel{2}\cdot\frac{\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}}{\cancel{2}}=1\cdot 2;\qquad \frac{x-2y-2}{3}-\frac{4x-y}{6}=2$$

(2)

L'equazione $\dfrac{x+y-3}{5}=\dfrac{x-y-1}{2}$

avrebbe potuto essere privata dei denominatori anche col
♥ **metodo delle "MOLTIPLICAZIONI INCROCIATE"**:

$$\frac{x+y-3}{5}=\frac{x-y-1}{2} \quad\leftrightarrow\quad 2\cdot(x+y-3)=5\cdot(x-y-1)$$

Infatti, in generale, è

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}} \Leftrightarrow \cancel{b}d\cdot\frac{a}{\cancel{b}}=\frac{c}{\cancel{d}}\cdot b\cancel{d} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{ad=bc}}$$

(3)

Qui abbiamo eliminato il denominatore nell'equazione

$$\frac{-2x-3y-4}{12}=1$$

moltiplicandone ambo i membri per 12.

(4)

**E' preferibile, in linea di massima,
fare in modo che
i coefficienti delle incognite
siano prevalentemente positivi
(soprattutto, è ritenuto "elegante", anche se
non è per nulla indispensabile, che sia positivo il primo).**
A tale scopo, è possibile cambiare tutti i segni
(è come moltiplicare sia il 1° che il 2° membro per –1).

(5)

Ecco ottenuta l'equazione risolvente del sistema,
quella a una sola incognita.

Se, come in questo caso,
la sua risoluzione richiede diversi passaggi,
direi che sia inutile trascrivere sempre,
per ciascuno dei passaggi, la graffa di sistema;
risolviamo "a parte" l'equazione,
poi, quando avremo finalmente trovato la soluzione,
ritorneremo al sistema con la sua graffa.

(6)

E' **opportuno** che nell'**ultimo passaggio**
le **incognite** siano **trascritte**
nel loro ordine alfabetico-logico.

4. SISTEMI A DUE INCOGNITE: IL METODO DI "RIDUZIONE" (DETTO ANCHE "DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE")

Si tratta di un metodo che in taluni casi "fortunati"
può rendere la risoluzione di un sistema assai rapida e divertente.

Non ci credi? Considera gli esempi che seguono.

- $\begin{cases} 9x+8y=22 \\ 5x-8y=6 \end{cases}$

Possiamo notare che **nelle due equazioni date, i termini contenenti *y* sono OPPOSTI** ($+8y,\ -8y$).
Se quindi noi andiamo ad ADDIZIONARE MEMBRO A MEMBRO le due equazioni, otterremo un'equazione che non conterrà più la *y*, ma soltanto la *x*!

$$(1)+(2)\begin{cases} 14x=28 & (*) \\ 5x-8y=6 & (**) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ 5\cdot 2-8y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ 10-8y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ -8y=-4;\quad y=1/2 \end{cases}$$

(*)
Questa equazione proviene dalla somma membro a membro delle due equazioni iniziali:

$9x$	$+8y$	$=$	22
$5x$	$-8y$	$=$	6
$14x$	//	$=$	28

(**)
♥ Il sistema, che era partito con due equazioni, deve proseguire sempre con due equazioni. Quindi una (a scelta) fra le due equazioni di partenza va "recuperata". E' chiaro che, siccome si può scegliere, sarà preferibile recuperare la più semplice.

- Vediamo quest'altro esercizio.

$$\begin{cases} 5x+y=2 \\ 5x+4y=-19 \end{cases}$$

Questa volta abbiamo due termini nella stessa incognita (la *x*) che sono UGUALI.
Perciò potremo far scomparire la *x*:
ci basterà SOTTRARRE MEMBRO A MEMBRO le due equazioni.

$$\begin{matrix}(1)-(2) \\ (1)\end{matrix}\begin{cases} -3y=21 & (*) \\ 5x+y=2 & (**) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-7 \\ 5x-7=2;\ 5x=9;\ x=9/5 \end{cases}$$

(*)
Questa equazione proviene dalla sottrazione membro a membro delle due equazioni iniziali:

$5x$	$+y$	$=$	2
$5x$	$+4y$	$=$	-19
//	$-3y$	$=$	21

$y-4y=-3y$

$2-(-19)=2+19=21$

(**)
Equazione "recuperata" scegliendola fra le due di partenza, per completare il sistema.

- Nel caso del sistema seguente:

$$\begin{cases} 12x-5y=14 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$$

il metodo di riduzione sembrerebbe non applicabile,
in quanto né la *x* né la *y* hanno, nelle due equazioni,
ugual coefficiente, o coefficienti opposti.
Possiamo però osservare che i due termini con *x*
hanno coefficienti che sono uno multiplo dell'altro (infatti è $12=4\cdot 3$).
Se dunque **moltiplichiamo la seconda equazione per 4,**
ci porteremo ad avere 12*x* anche nella seconda equazione,
dopodiché potremo sottrarre membro a membro e sbarazzarci di *x*.

$$4\cdot\begin{cases}12x-5y=14\\3x+2y=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}12x-5y=14\\12x+8y=40\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(2)-(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}13y=26\ (*);\ \ y=2\\3x+2y=10\ (**);\ 3x+4=10;\ x=2\end{cases}$$

(*) Abbiamo preferito fare $(2)-(1)$ anziché $(1)-(2)$ esclusivamente per una piccola questione di opportunità: infatti in questo modo abbiamo ottenuto, sottraendo, un termine in *y* con coefficiente positivo ($+13y$)

(**) Delle due equazioni in gioco abbiamo recuperato la più semplice, che era poi la (2), presa PRIMA della moltiplicazione per 4.

- Ed ecco ora una situazione ancora più generale. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases}10x+7y=31\\4x-3y=-5\end{cases}$$

Qui non abbiamo, su di una stessa colonna, né due coefficienti uguali, né due coefficienti opposti, e nemmeno due coefficienti che siano uno multiplo dell'altro.
Tuttavia, **se proprio lo si desidera, il metodo di riduzione è applicabile anche in questo caso. Occorrerà, però, moltiplicare dapprima ENTRAMBE le equazioni, scegliendo i due moltiplicatori in modo che, al termine del procedimento, o la *x* o la *y* si trovi ad avere, nelle due equazioni, coefficienti uguali, o in alternativa opposti.**

A tale scopo:

- se vogliamo eliminare la *x*, moltiplicheremo la prima equazione per 2 e la seconda per 5, così da ottenere il termine 20*x* in entrambe e poi sottrarre membro a membro (oppure, potremmo moltiplicare la prima equazione per 2 e la seconda per –5 e poi *sommare* membro a membro);
- se vogliamo eliminare la *y*, moltiplicheremo la prima equazione per 3 e la seconda per 7, per ottenere +21*y* nella prima equazione e –21*y* nella seconda, e poi sommare membro a membro.

$$\begin{matrix}2\cdot\\5\cdot\end{matrix}\begin{cases}10x+7y=31\\4x-3y=-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}20x+14y=62\\20x-15y=-25\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)-(2)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}29y=87;\ \ y=3\\4x-3y=-5;\ \ 4x-9=-5;\ \ 4x=4;\ \ x=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$$

NOTA
Le annotazioni a sinistra della graffa non sono, evidentemente, obbligatorie, ma sono estremamente utili per fissare le idee e per agevolare la rilettura.
L'annotazione (vedi esempio) "$(1)-(2)$" è opportuno che venga collocata *sulla riga nella quale viene effettuata la combinazione lineare.*

L'ultimo esercizio proposto mostra che, VOLENDO, il metodo di riduzione è applicabile SEMPRE.
Ma, ci si chiederà, IN QUALI CASI questo metodo è effettivamente PIU' CONVENIENTE rispetto al metodo di sostituzione?
La risposta dipende in una certa misura dalle preferenze dello studente …
Tuttavia, direi senz'altro che, almeno nei casi in cui due coefficienti di una stessa incognita risultino, fin dall'inizio, uguali oppure opposti, "riduzione" appare di gran lunga "vincente" rispetto a "sostituzione".

- *Ecco a proposito un ultimissimo esempio:*

$$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{7}=\dfrac{1}{3}y\\4(x+1)-7y+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{6x-3}{\cancel{21}}=\dfrac{7y}{\cancel{21}}\\4x+4-7y+1=0\end{cases}$$

OCCHIO!!! RICORDA che **QUASI SEMPRE, quando si deve risolvere un sistema di equazioni, CONVIENE INNANZITUTTO**
♪ MANDAR VIA GLI EVENTUALI DENOMINATORI
♫ e PORTARE IN "FORMA NORMALE":
in ciascuna equazione si dovrà avere
a 1° membro, un termine per ogni incognita presente;
a 2° membro, il termine noto.

$$\begin{cases}6x-7y=3\\4x-7y=-5\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)-(2)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}2x=8;\ x=4\\16-7y=-5;\ -7y=-21;\ y=3\end{cases}$$

Volendo, nel sistema qui a fianco risolto (preso nella sua "forma normale") avremmo potuto cambiare i segni di una delle due equazioni in gioco, dopodiché, avendosi 7*y* nell'una e –7*y* nell'altra, avremmo *sommato* membro a membro anziché sottratto.

5. SISTEMI CON PIU' DI DUE INCOGNITE: METODO DI SOSTITUZIONE

- Esempio 1

$$\begin{cases} 2(x-z)=1+3y \\ 4x-y-4z=7 \\ \dfrac{x-6}{4}+\dfrac{x+y}{3}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-2z=1+3y \\ 4x-y-4z=7 \\ \dfrac{3x-18+4x+4y}{\cancel{12}}=\dfrac{0}{\cancel{12}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y-2z=1 \\ 4x-y-4z\ =7 \\ 7x+4y\qquad =18 \end{cases}$$ *Così il sistema è in* FORMA NORMALE

$$\begin{cases} (2)\quad -y=-4x+4z+7;\quad y=4x-4z-7 \\ (1)\quad 2x-3(4x-4z-7)-2z=1 \\ (3)\quad 7x+4(4x-4z-7)=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x-4z-7 \\ 2x-12x+12z+21-2z=1 \\ 7x+16x-16z-28=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x-4z-7 \\ -\cancel{10}x+\cancel{10}z=-\cancel{20}^{\,2} \\ 23x-16z=46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x-4z-7 \\ z=x-2 \\ 23x-16(x-2)=46;\ \dots\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ z=2-2=0 \\ y=8-0-7=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

♥ **Coi sistemi in tre o più incognite è più che mai RACCOMANDATA la comoda VERIFICA FINALE sostituendo nel sistema di partenza. TUTTE le equazioni dovranno essere verificate dai valori trovati!**

PRIMO OBIETTIVO:
PORTARE IN "FORMA NORMALE" !!!

♥ Ricordiamo (è davvero importante!) che quando si deve risolvere un sistema di equazioni, quasi sempre conviene **innanzitutto portarlo in "FORMA NORMALE"**.

Insomma, **in ciascuna equazione** si farà in modo di avere:
a 1° membro, un termine per ogni incognita presente;
a 2° membro, il termine noto;
il tutto, SENZA DENOMINATORI.

COME SI APPLICA IL METODO DI SOSTITUZIONE CON PIU' INCOGNITE

Si isola un'incognita da una qualsiasi delle n equazioni e poi **si va a sostituire** nelle n–1 equazioni restanti l'espressione che si è ottenuta a secondo membro.
Si perviene così ad un "**sottosistema**" di n–1 equazioni in n–1 incognite.

Iterando (= ripetendo) eventualmente **il procedimento** su questo sotto-sistema, si può abbassare progressivamente il numero delle equazioni e delle incognite su cui lavorare, fino ad ottenere **un'equazione con un'incognita sola**.

- Esempio 2

$$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 3x+2y+z\ =5 \\ 5x+4y+4z=11 \end{cases}$$ *Questo sistema è già in* FORMA NORMALE

$$\begin{cases} x=5-2y-3z \\ 3(5-2y-3z)+2y+z\ =5;\ \dots;\ -4y-8z=-10; \\ 5(5-2y-3z)+4y+4z=11;\ \dots;\ -6y-11z=-14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y-3z \\ 2y+4z=5 \\ 6y+11z=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y-3z \\ y=\dfrac{5-4z}{2} \\ \cancel{6}^{\,3}\cdot\dfrac{5-4z}{\cancel{2}}+11z=14;\ \ 15-12z+11z=14;\ \ -z=-1;\ \ z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=1 \\ y=\dfrac{5-4}{2}=\dfrac{1}{2} \\ x=5-1-3=1 \end{cases};\quad \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=1 \end{cases}$$

- Esempio 3

Col sistema seguente opereremo ancora sostanzialmente per **sostituzione**, ma con una **variante**.

$$\begin{cases} a-2b=2 \\ b+c=-3 \\ d-b=3 \\ b+2e=1 \\ a+b+c+d+e=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} a=2+2b \\ c=-3-b \\ d=3+b \\ e=\dfrac{1-b}{2} \\ 2+2b\cancel{+b}\cancel{-3}\cancel{-b}\cancel{+3}+b+\dfrac{1-b}{2}=0;\ \dots\ ;\ b=-1 \end{cases}\qquad \begin{cases} a=2-2=0 \\ b=-1 \\ c=-3-(-1)=-3+1=-2 \\ d=3-1=2 \\ e=\dfrac{1-(-1)}{2}=\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$

Avendo notato che tramite le prime 4 equazioni
le 4 incognite *a*, *c*, *d*, *e* potevano essere facilmente espresse per mezzo della sola *b*,
abbiamo operato di conseguenza, col vantaggio che, sostituendo poi nell'ultima equazione, questa si è immediatamente ridotta a contenere un'unica incognita. E vai!

6. SISTEMI CON PIU' DI DUE INCOGNITE: METODO DI RIDUZIONE

- Esempio 1

$$2\cdot\begin{cases}2x-3y-2z=1\\4x\ -y-4z=7\\7x+4y+3z=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x-6y-4z=2\\4x\ -y-4z\ =7\\7x+4y+3z\ =18\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)-(2)\\(1)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}-5y=-5;\ \ y=1\\2x-3y-2z=1\\7x+4y+3z=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1\\2x-3-2z=1\\7x+4+3z=18\end{cases}\qquad\begin{cases}y=1\\\cancel{2}x-\cancel{2}z=\cancel{4}\,2\\7x+3z=14\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1\\x=z+2\\7(z+2)+3z=14;\ \ z=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\y=1\\z=0\end{cases}$$

♥ **L'INCOLONNAMENTO**
dei termini con la stessa incognita dà veramente una marcia in più al metodo di riduzione

- Esempio 2

$$\begin{cases}2y+3z=4\\3x+2y+z=8\\5x+4y+4z=16\end{cases}$$

Per prima cosa, metto in colonna …

$$\begin{cases}\quad\ \ 2y+3z=4\\3x+2y+z\ \ =8\\5x+4y+4z=16\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)+(2)-(3)\\(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}-2x=-4;\ x=2\\2y+3z=4\\3x+2y+z\ =8\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\2y+3z=4\\6+2y+z\ =8\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\2y+3z=4\\2y+z\ =2\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\\(2)-(3)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}x=2\\2z=2\\2y+z\ =2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\z=1\\\ldots\ y=1/2\end{cases}$$

NOTA: cos'è una "combinazione lineare"
Si dice "combinazione lineare" una somma algebrica i cui termini sono oggetti matematici della stessa specie, ciascuno moltiplicato per un suo coefficiente.
Gli "oggetti" in questione potranno essere vettori, equazioni, funzioni, ecc. ecc. ecc.: si possono "combinare linearmente" tutte le entità per le quali abbia senso parlare
(I) di somma
(II) e di moltiplicazione per un coefficiente.
Il risultato della combinazione lineare sarà ancora un oggetto della stessa specie.
Ad esempio, $3\vec{v}+4\vec{w}$ o $-\vec{v}+0{,}3\vec{w}$ sono due fra le infinite possibili combinazioni lineari dei due vettori $\vec{v},\ \vec{w}$.

COME SI APPLICA IL METODO DI RIDUZIONE CON PIU' INCOGNITE

Si tratta di coinvolgere 2 o più equazioni in addizioni o sottrazioni membro a membro, eventualmente dopo aver moltiplicato una o più di queste equazioni per opportuni coefficienti (*combinazione lineare* delle equazioni: vedi NOTA in fondo alla pagina), con lo scopo di pervenire ad un'equazione con 1 sola incognita, o, almeno, di rendere più semplice il sistema.

- OCCHIO AL "RECUPERO" delle equazioni!
  ♥ **Se un'equazione non è stata coinvolta nelle addizioni o sottrazioni, è OBBLIGATORIO recuperarla**.
- Almeno in generale, qualunque sia il metodo di risoluzione, **se il sistema conteneva inizialmente n equazioni,** occorre **procedere ad ogni passaggio sempre con n equazioni. Vedremo più avanti (pag. 400) casi che fanno eccezione.**
- **Dopo aver iniziato a risolvere per riduzione, si può proseguire indifferentemente ancora con riduzione, oppure con sostituzione.**

- Esempio 3

$$\begin{cases}3x+4y+6z=7\\4x+6y+7z=8\\3x+5y+7z=9\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(3)-(1)\\(2)-(3)\\(1)\end{matrix}\begin{cases}y+z=2\\x+y=-1\\3x+4y+6z=7\end{cases}$$

dopodiché, avendo semplificato parecchio il sistema dato, potremo procedere tranquillamente per sostituzione.

- Esempio 4

Concludiamo con un sistema "notevole", molto particolare (il "**sistema delle somme a due a due**"):

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}x+y=1\\y+z=11\\x+z=6\end{cases}$$

Mi conviene innanzitutto INCOLONNARE …

$$\begin{cases}x+y\quad\ =1\\\quad\ y+z=11\\x\quad\ +z=6\end{cases}$$

dopodiché sommo membro a membro le tre equazioni, ottenendo

$$2x+2y+2z=18,$$

da cui, se divido per 2,

$$(4)\ \ x+y+z=9$$

A questo punto, dall'equazione (4), sottraggo una dopo l'altra le tre equazioni iniziali:

$$\begin{matrix}(4)-(1)\\(4)-(2)\\(4)-(3)\end{matrix}\begin{cases}x+y+z-(x+y)=9-1; & z=8\\x+y+z-(y+z)=9-11; & x=-2\\x+y+z-(x+z)=9-6; & y=3\end{cases}$$

7. ESERCIZI SUI SISTEMI DI EQUAZIONI

Sistemi in due incognite, da risolversi col metodo di SOSTITUZIONE:

1) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-4y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+3y=-4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ 3x+7y=-5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+5y=27 \\ 7x-y=25 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2(x-y)=1+x \\ 3x+5y=36 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \frac{1}{6}y+\frac{17}{15}+\frac{x}{3}=-\frac{1}{5}y \\ x-y=\frac{5(4-x)}{3} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5(y+1)=6(x+y)+4 \\ 3(x-y)=2(3+y) \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x-2y=-3 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{25}{6} \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x=y-\frac{1}{2}x \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 6x-y=4 \\ \frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x+y}{3}-7\frac{x}{6} \end{cases}$ 12) $\begin{cases} -7x-3y+4=0 \\ 2x-5y=7 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 9x-4y=10 \\ 5x-3y=4 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{12}y=\frac{1}{24} \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3x-t=5 \\ 12x+5t=20 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{x-y}{6}=1 \\ y+\frac{1}{4}(x+1)^2=\frac{x^2}{4} \end{cases}$

Sistemi in due incognite, da risolversi col metodo di RIDUZIONE:

17) $\begin{cases} 9x+7y=20 \\ 5x+7y=8 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 11x-3y=-96 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} 14x-9y=1 \\ 10x-9y=-7 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 15x-7y=43 \\ 3x-8y=35 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 7x+4y=25 \\ 10x+3y=33 \end{cases}$ 22) $\begin{cases} 6x-5y=15 \\ 11(y+3)=-2x \end{cases}$ 23) $\begin{cases} 3(x-1)-2y=0 \\ \frac{x}{5}-\frac{y}{3}-\frac{1}{30}=0 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} 6y-45x+1=0 \\ 7y=15x \end{cases}$

25) $\begin{cases} \frac{3}{40}a-\frac{b}{8}-\frac{1}{5}=0 \\ \frac{a}{3}-\frac{b}{4}-\frac{3}{2}=0 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} \frac{t+w}{6}-\frac{t-1}{4}=0 \\ \frac{1}{3}(2t-2w)-\frac{1}{2}(w-1)=0 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} 3y-2x=-1 \\ 4x+7y=15 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} 5a+6b=1 \\ 7a+9b=2 \end{cases}$

SOLUZIONI

1) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x=1/3 \\ y=-1 \end{cases}$

9) $(-2,\,-3/2)$ 10) $(5,\,5)$ 11) $(1,\,2)$ 12) (fai la verifica!)

13) (verifica!) 14) $\left(x=\frac{1}{3},\; y=\frac{1}{2}\right)$ 15) $\left(x=\frac{5}{3},\; t=0\right)$ 16) $\left(\frac{25}{2},\,-\frac{13}{2}\right)$

17) $(3,\,-1)$ 18) $(-6,\,10)$ 19) $(2,\,3)$ 20) $(1,\,-4)$

21) $(3,\,1)$ 22) $(0,\,-3)$ 23) $\left(\frac{14}{9},\,\frac{5}{6}\right)$ 24) $\left(\frac{7}{225},\,\frac{1}{15}\right)$

25) $\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} t=-27 \\ w=-15 \end{cases}$ 27) (verifica!) 28) (verifica!)

♥ OSSERVAZIONE

NON è corretto affermare che un sistema in 2 incognite ha, in generale, 2 soluzioni.
Infatti, per “soluzione” si deve intendere la COPPIA ordinata di valori $\begin{cases} x=\ldots \\ y=\ldots \end{cases}$
e quindi, se si è trovata UNA COPPIA, si dirà che si è trovata UNA SOLUZIONE.
Così pure, quando le incognite sono 3, per “soluzione” (al singolare) si intende la TERNA $\begin{cases} x=\ldots \\ y=\ldots; \\ z=\ldots \end{cases}$ ecc.

Sistemi in più incognite, da risolversi col metodo di SOSTITUZIONE:

1) $\begin{cases} 5x-3y-2z=4 \\ 7x+2y+4z=21 \\ 3x+8y+6z=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 3x+2y+z=7 \\ y+z=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3-z \\ x+z=\dfrac{3z+4}{2} \\ 3x-y+2z=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-y-z=0 \\ 2x+2y+5z=20 \\ 6x-5y-3z=-1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 11(x-y)=19-4y \\ 5x=3(1+y+2z) \\ 3x-z=8 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3a-4b+7c=-3 \\ 7a-3b-5c=42 \\ 10a+2b-3c=58 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2(x+2y)=-(5t+11) \\ 4x-3y+t+10=0 \\ \dfrac{1}{5}x-1=\dfrac{1}{15}y+\dfrac{1}{5}t \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+2y-3z=-2 \\ 2x+9z=1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c=8 \\ \dfrac{1}{4}(a-3b)+\dfrac{1}{5}(6a+c)=7 \end{cases}$

Sistemi in più incognite, da risolversi col metodo di RIDUZIONE:

10) $\begin{cases} 23x+5y+8z=33 \\ 11x+5y+8z=9 \\ x-6y+4z=21 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 7x-8y+z=-2 \\ 3x-2y-6z=32 \\ 5x+8y-z=14 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 3x+5y-6z=10 \\ 12x+20y-5z=21 \\ x+3y+11z=-7 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x-3y+4z=5 \\ 3x+4y-z=2 \\ 2x+7y-10z=-33 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 9a+5(b+c)-7c-27=0 \\ 2(3a-c)=5(5-b) \\ 15a+7b+c=9 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x+y+t=-10 \\ 5x-4y-t=16 \\ 3(x-2y)=t+14 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x-4z=48 \\ 15y-z=3 \\ x+5y-11z=45 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} a+b+c=-6 \\ a+b+3=0 \\ b+c+5=0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x-z+2=0 \\ x-y+2z+1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

ALTRI ESERCIZI, CON CORREZIONE (clicca sulla freccia)

19) ⇨ $\begin{cases} 5(y-1)=3(2y-x) \\ \dfrac{x+y}{3}=\dfrac{3y+1}{4} \end{cases}$ 20) ⇨ $\begin{cases} x=\dfrac{2(6-x)+7y}{3} \\ x+7=8(2x+y) \end{cases}$ 21) ⇨ $\begin{cases} 8x-9y-10=0 \\ 11x-12y-13=0 \end{cases}$

22) ⇨ $\begin{cases} x-2z=0 \\ 3x-2y+4z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 23) ⇨ $\begin{cases} 5x+4y+3t=2 \\ 2x+y+4t=1 \\ x-y+t=0 \end{cases}$ 24) ⇨ $\begin{cases} 4x-3y+2z=-5 \\ x-y+z=-2 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$

25) ⇨ $\begin{cases} x+y-z=t \\ x-z=4 \\ 2x-t=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$ 26) ⇨ $\begin{cases} 3x-2y-z-w=3 \\ 2x+y+3w=0 \\ 4x-y=3 \\ x+z+2w=-2 \end{cases}$ 27) ⇨ $\begin{cases} b+c+d=3 \\ a+c+d=4 \\ a+b+d=5 \\ a+b+c=6 \end{cases}$

SOLUZIONI

1) $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ t=-5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1/3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=1/4 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x=1 \\ y=1/2 \\ z=-5 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x=-4 \\ y=5 \\ z=6 \end{cases}$

14) $\begin{cases} a=2/3 \\ b=1 \\ c=-8 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ t=-11 \end{cases}$ 16) $(12,\ 0,\ -3)$ 17) (verifica!) 18) $(-2,\ -1,\ 0)$

19) $(2,\ 1)$ 20) $(1,\ -1)$ 21) $(-1,\ -2)$ 22) $\left(\dfrac{1}{8},\ -\dfrac{3}{16},\ \dfrac{1}{16}\right)$ 23) $\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8}\right)$

24) $(0,\ 1,\ -1)$ 25) $(3,\ 2,\ -1,\ 6)$ 26) $(1,\ 1,\ -1,\ -1)$ 27) $(3,\ 2,\ 1,\ 0)$

8. IL METODO DEL CONFRONTO

E' utilizzato di rado, e solo quando le incognite sono due. Consiste nell'**isolare la stessa incognita in entrambe le equazioni, per poi uguagliare i secondi membri delle due uguaglianze così ottenute**.

$$\begin{cases}2x+y=5\\3x-y=7\end{cases}\quad \begin{cases}y=\boxed{5-2x}\\y=\boxed{3x-7}\end{cases};\quad \boxed{5-2x=3x-7}\ \dots\ x=\frac{12}{5}\quad \begin{cases}x=\frac{12}{5}\\y=5-2x=5-2\cdot\frac{12}{5}=5-\frac{24}{5}=\frac{1}{5}\end{cases}$$

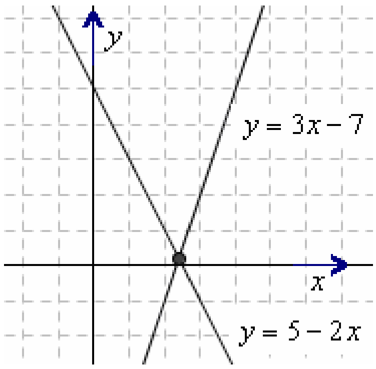
(*si può recuperare una a scelta fra le due equazioni*)

Volendo, è possibile abbinare al procedimento una risoluzione grafica.

Riferimenti cartesiani e risoluzioni grafiche di equazioni sono trattati in un capitolo successivo di questo testo. Facciamo qui una breve anticipazione, dando per scontato che lo studente sappia già qualcosa sul metodo delle coordinate cartesiane, oppure voglia preliminarmente andare a consultare quel capitolo.

Nel caso del sistema sopra considerato, la risoluzione grafica sarebbe la seguente.

Si tracciano, in uno stesso riferimento cartesiano, i grafici delle due funzioni $y=5-2x,\ y=3x-7$ (poiché le funzioni sono di 1° grado, usciranno delle rette) …



… poi si cerca la coppia (x, y) che appartiene ad entrambi i grafici: quindi, in pratica, si va a prendere il **punto di intersezione** fra i due grafici tracciati.

La x e la y di quel punto costituiranno la coppia $\begin{cases}x=\dots\\y=\dots\end{cases}$ soluzione del sistema.

Nel nostro caso, graficamente non siamo in grado di stabilire quale sia il valore *esatto* di questa coppia (x, y); possiamo solo osservare che è $2<x<3$ e $0<y<1$ (con y molto più vicina a 0 che a 1). In effetti, **di norma, queste risoluzioni grafiche ci permettono di *approssimare* la soluzione, non di determinarla perfettamente**.

♥ Tuttavia, il metodo del confronto può essere un'utile occasione per osservare che (salvo rare eccezioni) *una singola* equazione in due incognite è INDETERMINATA, vale a dire è verificata da INFINITE coppie (x, y).

Consideriamo, ad esempio, la retta "in discesa", che "rappresenta" l'equazione $2x+y=5\ \ (y=5-2x)$.
Se nell'equazione $y=5-2x$ noi poniamo, ad esempio, $x=1$, otteniamo $y=5-2\cdot 1=3$;
bene, ciò significa che la coppia $x=1,\ y=3$ (brevemente: la coppia $(1, 3)$) è soluzione dell'equazione $y=5-2x$ quindi anche della sua equivalente $2x+y=5$ (controlliamo: $2\cdot 1+3=5$ OK).
Dando poi a x altri valori possiamo determinare *altre* coppie (x, y) che rendono vera l'equazione $y=5-2x$:

$$(0,5);\quad (2,\ 1);\quad (3,-1);\quad (10,-15);\quad (-1,7);\quad \left(\frac{1}{2},\ 4\right);\quad (3,7;\ -2,4);\quad \dots$$

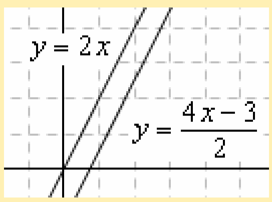
Tali infinite coppie (x, y) sono per l'appunto le coordinate degli infiniti punti che compongono la retta in discesa; mentre le coordinate (x, y) degli infiniti punti della retta in salita sono quelle coppie (x, y) che "vanno bene" per l'equazione $y=3x-7$ (o per la sua equivalente $3x-y=7$).
Le coordinate del punto in cui le due rette si intersecano sono dunque quei valori $x=\dots,\ y=\dots$ per i quali sono verificate SIMULTANEAMENTE ENTRAMBE le equazioni in gioco.

♥ **Un'equazione si dice INDETERMINATA quando ammette infinite soluzioni.**
A volte, questo "infinite" significa "qualsiasi": ad es., l'equazione $0\cdot x=0$ è verificata da qualsiasi valore di x.
♥ **Ma a volte, "infinite" NON equivale a "qualsiasi"**:
l'equazione in due incognite $2x+y=5$ è verificata da *infinite* coppie (x, y), ma NON da *qualsiasi* coppia (x, y), perché soltanto quelle particolari coppie che sono della forma $(x,\ 5-2x)$ "vanno bene", le altre no.

Un'equazione nella quale si abbiano 2 o più incognite è generalmente indeterminata, salvo casi eccezionali, fra i quali possiamo citare equazioni come la $x^2+(y-4)^2=0$; quest'ultima infatti, pur avendo 2 incognite, ammette una e una sola soluzione: poiché un quadrato non può assumere valore negativo, una somma di quadrati può valere 0 solo qualora sia nullo *ciascuno* dei due quadrati … il che avviene solamente con $x=0 \wedge y=4$.

Per terminare, osserviamo solo che **se le due rette dovessero risultare parallele, come nell'esempio qui a fianco, il sistema sarebbe impossibile (= privo di soluzioni)**: non ci sarebbe alcuna coppia (x, y) che vada bene simultaneamente per entrambe le equazioni.

$$\begin{cases}2x-y=0\\4x-2y=3\end{cases}\qquad \begin{cases}y=2x\\y=\dfrac{4x-3}{2}\end{cases}$$



Rette parallele: SISTEMA IMPOSSIBILE

ESERCIZI Risolvi col "confronto" alcuni sistemi "pescati" fra gli esercizi in due incognite di questo capitolo.

9. DETERMINANTI

Si dice "determinante" uno schema, contenente quattro numeri a, b, c, d, della forma $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix}$**;**
lo schema ha il compito di indicare che sui 4 numeri in gioco va effettuata l'operazione $\mathbf{ad-bc}$**.**

E' dunque $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \mathbf{ad-bc}$.

- $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 5\cdot 10 - 4\cdot 3 = 50-12=38$
- $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)-(-3)\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{10}+\frac{3}{4} = \frac{-2+15}{20} = \frac{13}{20}$

In questo modo noi abbiamo dato la definizione di determinante, **nel caso in cui i numeri coinvolti nello schema siano 4, disposti su 2 righe e 2 colonne (determinante "del 2° ordine"**).
Ma è possibile anche considerare determinanti del 3° ordine (3 righe e 3 colonne; 9 termini), del 4° ordine (4 righe e 4 colonne; 16 termini), e così via.

Un determinante del 3° ordine si sviluppa come segue:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

In generale, **lo sviluppo di un determinante di ordine n viene sempre ricondotto a determinanti dell'ordine inferiore n–1.**
Ad esempio, per il 4° ordine, è:

Abbiamo qui scelto una simbologia, molto utilizzata in matematica, secondo la quale ciascun elemento del determinante si può indicare con una lettera munita di **due indici, il primo dei quali corrisponde alla riga e il secondo alla colonna,** su cui l'elemento è posizionato.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = a_{1,1}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{1,3}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,4}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}$$

Tutto ciò potrebbe apparire terrificante, ma in realtà corrisponde alla non difficilissima **REGOLA**:

Per **sviluppare un determinante di ordine n**, si sceglie una **linea** (riga o colonna) **qualsiasi** (qui sopra è stata sempre scelta la prima riga) e si prende ciascun termine della linea
- col proprio segno se la somma dei suoi due indici è pari,
- con segno cambiato se la somma dei due indici è dispari;

poi si moltiplica il termine in esame (col segno opportuno) per il determinante di ordine $n-1$ ottenibile cancellando la riga e la colonna su cui sta il termine in questione.
I prodotti così ottenuti vengono sommati algebricamente.
Si dimostra che **il risultato è indipendente dalla linea scelta**.

In modo equivalente, si sarebbe potuto scrivere che il calcolo di un determinante consiste nel sommare algebricamente i prodotti dei termini di una linea per i rispettivi "*complementi algebrici*", dove il "complemento algebrico" di un termine $a_{i,k}$ è il numero $\mathrm{A}_{i,k}$ ottenibile prendendo il determinante che rimane se si cancellano la riga e la colonna su cui sta il termine in questione, e moltiplicandone il valore per $+1$ o -1 a seconda che $i+k$ sia pari o sia dispari.

Ad esempio, sviluppiamo un determinante del 3° ordine secondo la sua prima riga, poi secondo la sua seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 7(-3-0)-2\cdot(-12-8)+5\cdot(0+1) = -21+40+5=24$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -2(-12-8)+1\cdot(-21+5)-0 = +40-16=24$$

ESERCIZI Calcola i seguenti determinanti.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} -15 & 1 \\ -14 & 0 \end{vmatrix}$ **4)** $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$ **5)** $\begin{vmatrix} x+y & z \\ z & x-y \end{vmatrix}$

Sviluppa i determinanti 6) e 7) secondo:
a) la prima riga b) la prima colonna
c) la seconda riga d) la seconda colonna
per verificare che il risultato non cambia.

6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ **7)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **9)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

RISULTATI 1) –8 2) 58 3) 14 4) 0 5) $x^2-y^2-z^2$ 6) 17 7) 0 8) –16 9) 1

10. RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI 1° GRADO COL METODO DI CRAMER

Consideriamo il sistema (che è poi il generico sistema composto da due equazioni di 1° grado):

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

e proponiamoci di ricavare *x* col metodo di riduzione. Avremo:

$$\begin{array}{r} b'\cdot \\ b\cdot \end{array}\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab'x+bb'y=b'c \\ a'bx+bb'y=bc' \end{cases}$$

$$(1)-(2)\quad (ab'-a'b)x=b'c-bc'$$

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}\qquad (se\ \ ab'-a'b\neq 0)$$

Si può notare ora che numeratore e denominatore possono essere scritti in forma di determinanti:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

… e quest'ultima forma ha il pregio di essere **davvero facile da ricordare**! Infatti:

- a denominatore abbiamo il determinante costruito prendendo, nel sistema dato, i coeff. delle incognite
- mentre a numeratore abbiamo lo stesso determinante, nel quale però la colonna relativa ai coeff. di *x* (l'incognita che si sta calcolando) è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Se operiamo in modo analogo per ricavare *y*, otterremo

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Anche qui, analogamente al caso della *x*,

- a denominatore ci ritroviamo il determinante dei coefficienti delle incognite
- e a numeratore abbiamo lo stesso determinante, nel quale però la colonna relativa ai coefficienti di *y* (l'incognita che si sta calcolando) è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Ricapitolazione.

Un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite: $\boxed{\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}}$

può, volendo, essere risolto ("metodo di Cramer") per mezzo delle due formule $\boxed{\begin{array}{l} x=\dfrac{\mathbf{D}_x}{\mathbf{D}} \\ y=\dfrac{\mathbf{D}_y}{\mathbf{D}} \end{array}}$,

dove:

$\mathbf{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{b'} \end{vmatrix}$ = determinante dei coefficienti delle incognite

$\mathbf{D}_x=\begin{vmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c'} & \boldsymbol{b'} \end{vmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ (in queste scritture, lette "Di *x*", "Di *y*", *x* e *y* hanno il ruolo di *indici*)

$\mathbf{D}_y=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{c'} \end{vmatrix}$ $\quad$ **sono i determinanti ottenibili a partire dal determinante D, sostituendo, al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita che si vuole in quel momento ricavare, la colonna dei termini noti.**

OSSERVAZIONE: Per completezza, occorre puntualizzare che le formule di Cramer valgono a condizione che sia $D\neq 0$. Nel caso risulti $D=0$ il sistema è, a seconda dei casi, *impossibile* o *indeterminato* (pagg. 400, 401).

❑ Esempio di applicazione

$$\begin{cases}3x-y=4\\x+5y=-2\end{cases}\qquad x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}4&-1\\-2&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1\\1&5\end{vmatrix}}=\frac{20-2}{15+1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}3&4\\1&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1\\1&5\end{vmatrix}}=\frac{-6-4}{15+1}=\frac{-10}{16}=-\frac{5}{8}$$

Si può dimostrare poi che il "metodo di Cramer" *(Gabriel Cramer, 1704-1752)*
vale anche per i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite, di 4 equazioni in 4 incognite, ecc.
(in generale: di *n* equazioni in *n* incognite).

♥ OSSERVAZIONE TERMINOLOGICA

L'aggettivo "**LINEARE**", in Algebra, significa "**DI 1° GRADO**".
Un'equazione è di 1° grado quando è riconducibile a un'uguaglianza fra due polinomi di 1° grado, oppure ad un polinomio di 1° grado, uguagliato a 0.
Un sistema di equazioni è di 1° grado quando tutte le equazioni che lo compongono sono di 1° grado.

Ad es., nel caso $n=3$, abbiamo: $\begin{cases}\boldsymbol{ax+by+cz=d}\\\boldsymbol{a'x+b'y+c'z=d'}\\\boldsymbol{a''x+b''y+c''z=d''}\end{cases}$. Bene, sarà $\boldsymbol{x=\frac{D_x}{D};\ y=\frac{D_y}{D};\ z=\frac{D_z}{D}}$,

dove: $D=\begin{vmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\a''&b''&c''\end{vmatrix}$; $D_x=\begin{vmatrix}d&b&c\\d'&b'&c'\\d''&b''&c''\end{vmatrix}$; $D_y=\begin{vmatrix}a&d&c\\a'&d'&c'\\a''&d''&c''\end{vmatrix}$; $D_z=\begin{vmatrix}a&b&d\\a'&b'&d'\\a''&b''&d''\end{vmatrix}$

D è il determinante dei coefficienti delle incognite
mentre D_x, D_y, D_z sono i determinanti ottenibili a partire dal determinante D, sostituendo, al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita che si vuole ricavare, la colonna dei termini noti.

❑ Esempio:

$$\begin{cases}x+y=4\\2x-z=0\\3x-y-4z=0\end{cases}\quad \text{INCOLONNO, innanzitutto!}\quad \begin{cases}x&+y&&=&4\\2x&&-z&=&0\\3x&-y&-4z&=&0\end{cases}$$

Incolonnare è molto importante, per poter poi scrivere senza errori i vari determinanti

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}4&1&0\\0&0&-1\\0&-1&-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\2&0&-1\\3&-1&-4\end{vmatrix}}=\frac{4\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\0&-4\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0&0\\0&-1\end{vmatrix}}{1\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\3&-4\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}2&0\\3&-1\end{vmatrix}}=\frac{4\cdot(-1)-1\cdot 0+0}{1\cdot(-1)-1\cdot(-5)+0}=\frac{-4}{-1+5}=\frac{-4}{4}=-1$$

Per esercizio, puoi calcolare tu stesso i valori di *y* e di *z*.
Alla fine, verifica la correttezza dei risultati sostituendo nelle tre equazioni del sistema iniziale.

ESERCIZI (METODO DI CRAMER)

1) $\begin{cases}x+2y=3\\4x+5y=6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=-1\\2x+y=4\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x\quad +z=1\\2x-y+2z=1\\5y+4z=7\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x+y+z=0\\x=y-1\\3z-2x=5\end{cases}$ 7) $\begin{cases}x+y+z+t=1\\y-z-t=2\\x+2z=1\\2y-t=3\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-2y=10\\2x+3y=-2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}a+b-1=0\\b-3a+1=0\end{cases}$

Evidentemente, puoi, volendo, rifare con Cramer anche qualunque altro esercizio fra i tanti proposti.

8) ♥ Il metodo di Cramer, puramente "automatico", è il più adatto ad essere utilizzato su di un computer, o comunque quando i coefficienti sono numeri con tante cifre. L'esercizio qui a fianco va svolto con l'aiuto di una calcolatrice o di un foglio elettronico; alla fine, fai la verifica. $\begin{cases}35{,}58x-57{,}73y=23{,}09\\10{,}78x+25{,}43y=-2{,}37\end{cases}$

SOLUZIONI

1) $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}a=1/2\\b=1/2\end{cases}$ 5) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ 6) $(-1, 0, 1)$ 7) $(x=1,\ y=1,\ z=0,\ t=-1)$

11. ESERCIZI VARI SUI SISTEMI

1) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-y=0 \\ 8x-y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=y+10 \\ x=5y+2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=2y \\ 5x+7y+34=0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=5y \\ y=5x \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=2x+y \\ y=2x+1 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3(x-y)=y+23 \\ 5x+2y=21 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 0{,}7x+0{,}4y=1 \\ 0{,}23x-0{,}2y=0{,}66 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} a-b=a+b \\ a+2b+3=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 14m-5n=143 \\ 3m-10n=111 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=3x-7 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 5(x+4)=2(4x-y) \\ x+y=9(y+4) \end{cases}$ 13) $\begin{cases} 3(y+1)=7(x+1) \\ 5(20-x)=3(y+12) \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4(y-x)+3(x-4)=0 \\ 12(x+y)+7(4-x)=0 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3(x+3y)=12(1-x)-2(2+3y) \\ 3(x-y)=2y \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 5p+2=5(2q+1) \\ 5(p-q)+7=5(2-p) \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2(2x-3y)=3(12-y) \\ 3x-7y-46=0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} 11-y=6(x-y) \\ 7x-11(2+y)+2(1+x)=0 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=4-y \\ x-2=\dfrac{y}{3} \end{cases}$

20) $\begin{cases} 18x-6y=96 \\ 7x+7y-56=0 \end{cases}$ Innanzitutto conviene semplificare entrambe le equazioni! 21) $\begin{cases} 3y+1=x \\ 2y+7=x \end{cases}$ 22) $\begin{cases} 3a-b=b \\ 2(a+b+1)=3(a-b-1) \end{cases}$

23) $\begin{cases} 15x-2y=0 \\ 4x+7y=0 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} s+p=0 \\ \dfrac{s}{3}-\dfrac{p}{2}-1=\dfrac{s}{4}-\dfrac{p}{3}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 25) $\begin{cases} \dfrac{a+b-1}{4}=\dfrac{2a-b}{3} \\ 1-b=3(a-b) \end{cases}$ 26) $\begin{cases} 5x=4y \\ \dfrac{4}{5}x-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{10}=0 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x-2z=7 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} x=2t \\ 2(t+1)=5(x-1) \end{cases}$ 29) $\begin{cases} x=y-1 \\ y=2(x+1) \end{cases}$ 30) $\begin{cases} 3x+2y=19 \\ 2x-y=8 \end{cases}$

31) $\begin{cases} \dfrac{x}{8}-1=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}+y\right) \\ \dfrac{3-2y}{2}=\dfrac{1}{18}(x-1) \end{cases}$ 32) $\begin{cases} 2^{-1}x+2y=-2 \\ 3^{-2}(x-y)-\dfrac{y}{3}=0 \end{cases}$ 33) $\begin{cases} \dfrac{\frac{x-1}{2}+y}{3}=\dfrac{x+3y}{4} \\ y=-\dfrac{2x+y}{5} \end{cases}$ 34) $\begin{cases} \dfrac{w}{12}-\dfrac{t}{2^4}=5\cdot\dfrac{w+t}{2^5} \\ \dfrac{w+30}{6}-\dfrac{t+2}{3^2+1}=0 \end{cases}$

35) $\begin{cases} 6\cdot\left[\dfrac{2}{3}(x+y-1)-\dfrac{1}{2}\right]+19=0 \\ \left[\dfrac{3}{5}(x-2y)+1\right]\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}x \end{cases}$ 36) $\begin{cases} [1+5(x+2y)]:3=y+4 \\ 2x+y-1=2^{-3}(x-1) \end{cases}$ 37) $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=x^2+(y+3)^2 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{3x+1}{8} \end{cases}$

38) $2x-y=4x+y-16=x-3y+13$ 39) $\dfrac{3x-y}{2}=\dfrac{2x+y}{3}=x+y+1$ 40) $\begin{cases} 0{,}03x-0{,}02y=0{,}26 \\ 0{,}09x-0{,}05y=0{,}77 \end{cases}$

41) $\begin{cases} x-y=z \\ 2x+3y+4z=16 \\ 5x-3y-z=8 \end{cases}$ 42) $\begin{cases} x=2z \\ z=3y \\ x-z=y-4 \end{cases}$ 43) $\begin{cases} x+y+t=6 \\ x-y+t=10 \\ x-y-t=4 \end{cases}$ 44) $\begin{cases} 3a+2b+c=2 \\ a+2b+3c=2 \\ a-5b+c=7 \end{cases}$

45) $\begin{cases} x=3y+z-1 \\ y=z-x-1 \\ z=2x+5y-2 \end{cases}$ 46) $\begin{cases} x=y+1 \\ y=z+2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 47) $\begin{cases} 4x+5y-2z=53 \\ 3x-2y+z=10 \\ x+7y+3z=13 \end{cases}$ 48) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=\dfrac{1}{12} \\ 3(y+2)-y=0 \\ x+\dfrac{4}{3}y-\dfrac{3}{2}z+6=0 \end{cases}$

49) $\begin{cases} 2p-3q=2 \\ 3p-2q=1 \end{cases}$ 50) $\begin{cases} 6x-6y=1 \\ 3x+24y=5 \end{cases}$ 51) $\begin{cases} \dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3} \\ \dfrac{1}{2}(a-b)=1-\dfrac{a+b}{4} \end{cases}$ 52) $\begin{cases} u+v=0 \\ \dfrac{u}{3}=\dfrac{v}{5} \end{cases}$ 53) $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2\alpha-\gamma=4(1-\beta) \\ \alpha-\beta-\gamma-1=0 \end{cases}$

54) $\begin{cases} a+2c=5 \\ b-2d=4 \\ c=a-d \\ b+d=c-a \end{cases}$ 55) $\begin{cases} \alpha+2\beta=3 \\ \alpha+\gamma=\beta+\delta+\varepsilon \\ \varepsilon-\delta=\beta-2\gamma \\ \alpha+1=3-\beta \\ \gamma-\varepsilon=\alpha \end{cases}$ 56) $\begin{cases} \frac{1}{2}m-\frac{3}{4}p=\frac{1}{6} \\ 3m-p=2 \end{cases}$ 57) $\begin{cases} 3(x-2)=5x \\ 2(y-3)=3(y-1-x) \end{cases}$

58) $\begin{cases} a+2b+3c+4d=9 \\ 3a+2b+c-d=-6 \\ a-b-c+d=-5 \\ a+b+c+d=1 \end{cases}$ 59) $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ y+z-t+5=0 \\ x-z-t+6=0 \\ x-y+t-6=0 \end{cases}$ 60) $\begin{cases} x+y+z+u+v=3 \\ x-y+z-u+v=5 \\ x+y-z+u-v=-3 \\ x-y-2u=3 \\ x+y+3v=7 \end{cases}$

61) ⇨ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$ Qui conviene porre $\frac{1}{x}=u,\ \frac{1}{y}=v$ 62) $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=6 \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=1 \end{cases}$ 63) $\begin{cases} \alpha=\beta \\ \alpha=-\beta \end{cases}$ 64) $\begin{cases} 2x-y+2t=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+t=3 \\ x+y-2t=3 \end{cases}$

65) Il sistema $\begin{cases} ax-by=38 \\ (a+1)x+(2a+b+1)y=61 \end{cases}$ ha per soluzione la coppia $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$. Quali sono i valori di *a* e *b*?

66) Determina i valori di *a*, *b*, *c* in modo che il sistema $\begin{cases} ax+by+cz=2 \\ ax-by+cz=6 \\ ax-by-cz=4 \end{cases}$ abbia per soluzione $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

SOLUZIONI

1) $\begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=12 \\ y=2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ Per prima cosa, qui è conveniente moltiplicare la prima equazione per 10 e la seconda per 100 … 9) $\begin{cases} a=-3 \\ b=0 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} m=7 \\ n=-9 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-19 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x=5 \\ y=13 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x=-8 \\ y=1 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x=1/3 \\ y=1/5 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} p=1/5 \\ q=-1/5 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x=6 \\ y=-4 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x=19 \\ y=6 \end{cases}$ 22) $\begin{cases} a=-10/13 \\ b=-15/13 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} s=2 \\ p=-2 \end{cases}$

25) $\begin{cases} a=13/11 \\ b=14/11 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} x=-4/7 \\ y=-5/7 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} x=7/4 \\ t=7/8 \end{cases}$ 29, 30) Fai la verifica, sostituendo!

31) $\begin{cases} x=10 \\ y=1 \end{cases}$ 32) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1/2 \end{cases}$ 33) $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 34) $\begin{cases} w=-24 \\ t=8 \end{cases}$ 35) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 36) $\begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=2 \end{cases}$ 37) $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

38) La catena equivale a un sistema formato da due qualsiasi fra le tre uguaglianze
$2x-y=4x+y-16$
$2x-y=x-3y+13$ (la rimanente è conseguenza delle altre due). Si trova $x=3,\ y=5$.
$4x+y-16=x-3y+13$

39) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 40) $\begin{cases} x=8 \\ y=-1 \end{cases}$ 41) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ 42) $\begin{cases} x=-12 \\ y=-2 \\ z=-6 \end{cases}$ 43) $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \\ t=3 \end{cases}$ 44) $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$ 45) $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$ 46) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$

47) $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \\ z=-5 \end{cases}$ 48) $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$

49, 50, 51, 52) Fai la verifica!
53) $(1/2,\ 1/2,\ -1)$
54) $(1,\ 2,\ 2,\ -1)$
55) $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$
56, 57) Verifica!

58) $\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \\ c=2 \\ d=1 \end{cases}$ 59) $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=1 \\ t=5 \end{cases}$ 60) $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \\ u=-1 \\ v=2 \end{cases}$

61) $x=1/5,\ y=1/4$ 62) $x=-1,\ y=1/2$ 63) $\alpha=0,\ \beta=0$ 64) $x=2,\ y=3,\ t=1$

65) Sostituisci 5 al posto di *x* e 6 al posto di *y*: otterrai un altro sistema. $a=4,\ b=-3$ 66) $a=1,\ b=-1,\ c=1$

12. PROBLEMI DA RISOLVERE CON 2 O PIU' INCOGNITE (soluzioni a pagina 209)

1) 10 penne biro e 6 quaderni costano 29 euro; 6 penne biro e 10 quaderni, 27 euro.
Qual è il costo di una penna biro? E di un quaderno?

2) Due macchinari A e B in una ditta producono *a* pezzi all'ora e *b* pezzi all'ora rispettivamente.
Dopo 60 ore ininterrotte di funzionamento sono stati prodotti complessivamente 1980 pezzi,
e A ne ha prodotti 180 in più rispetto a B. Quanto valgono *a* e *b*?
(*Puoi tranquillamente utilizzare i simboli a, b anziché x, y per indicare le incognite*!)

3) Nel campionato di calcio italiano la vittoria vale 3 punti, e 1 punto il pareggio.
Dopo 20 partite, una squadra si trova a quota 42 punti, avendo vinto un numero di partite doppio rispetto al numero delle partite pareggiate. Si domanda: quante partite ha perso quella squadra?

4) Un macchinario A produce 40 pezzi all'ora, mentre un altro macchinario meno moderno B soltanto 25.
Se hanno funzionato complessivamente per 15 ore producendo 480 pezzi, determina il numero di ore nel quale ciascuno è stato in funzione.

5) Una ditta distribuisce ai suoi dipendenti meritevoli dei buoni sconto utilizzabili presso la mensa aziendale, dove vengono serviti pasti a prezzo fisso. Angela ha pasteggiato in mensa 4 volte, questa settimana, utilizzando 3 buoni sconto, e spendendo 17 euro.
Ilaria ha pranzato in mensa solo 3 volte, e ha usufruito di 2 buoni sconto: la sua spesa è stata di 14 euro.
E il pigro Ubaldo, che ha mangiato in mensa 5 volte senza disporre di sconto alcuno, quanto ha speso?

6) Ho in tasca 28 monete, parte da 20 centesimi e parte da 50. Ho calcolato che se le monete da 20 fossero tante quante quelle da 50 e viceversa, il mio gruzzolo aumenterebbe di 3 euro. Quanto posseggo?

7) Se in un negozio di prelibatezze, al costo di 100 euro si possono acquistare 4 bottiglie di ottimo vino e 11 confezioni di riso o in alternativa 6 bottiglie e 4 confezioni, quanto spenderà chi voglia comprare 1 bottiglia + 1 confezione?

8) Anna dice a Bruno: "Dammi 50 euro, così verrò a possedere esattamente il doppio di ciò che avrai tu".
"No" – dice Bruno – "dammi TU 10 euro, così sarò io a possedere il doppio di te".
Sentito questo dialogo, saresti capace di determinare la cifra che ha in tasca ciascuno dei due?
(*Puoi indicare le incognite con x, y o anche, se preferisci, con a, b*: *è lo stesso*!)

9) Abito in una casa di campagna, in una zona archeologica, nella quale capita a volte, lavorando la terra, di portare alla luce monete antiche. Se ne trovano di due varietà: argento e bronzo.
Ho saputo che un vicino ha venduto a un collezionista 5 monete d'argento e 6 monete di bronzo, ricavandone 840 euro; un altro conoscente ha venduto allo stesso collezionista 4 monete d'argento e 3 di bronzo, ricavandone 600 euro.
Ma io posseggo la bellezza di 50 monete d'argento e 100 di bronzo! Quanto vale il mio piccolo tesoro?

10) 1/3 di ciò che possiede Anna, più la metà di ciò che possiede Bruno, equivale a 38 euro.
La metà di ciò che possiede Anna, più 1/3 di ciò che possiede Bruno, equivale a 37 euro.
Quanto posseggono complessivamente i due?

11) Due numeri hanno per rapporto 4 e per differenza 21. Quali sono?

12) Determina le misure degli angoli di un triangolo isoscele sapendo che i 3/5 dell'angolo al vertice superano di 30° i 3/4 di un angolo alla base.

13) Trova due numeri interi sapendo che:
- dividendo la loro semisomma per la loro differenza si ottiene quoziente 6 e resto 5;
- dividendo la loro somma per la loro semidifferenza si ottiene quoziente 27 e resto 1.

14) Due secchi contengono alcuni mattoni.
Se si spostassero 7 mattoni dal secchio più leggero al più pesante, quest'ultimo verrebbe a contenere il triplo dei mattoni dell'altro. Se invece 4 mattoni venissero presi dal più pesante e messi nel più leggero, i due secchi verrebbero a contenere lo stesso numero di mattoni.
Ora … quanti sono in totale i mattoni?

15) Sommando numeratore e denominatore di una frazione ridotta ai minimi termini si ottiene 34; e se si aggiungesse 5 ad ambo i termini della frazione, questa equivarrebbe a 5/6. Di che frazione si tratta?

16) In un parco giochi si vedono veicoli di 3 tipi: macchinine, biciclettine, e tricicli.
Le biciclettine sono il doppio delle macchinine, e si contano in totale 19 veicoli e 52 ruote.
Determina quante sono le macchinine, quante le biciclettine, e quanti i tricicli.

17) In un triangolo la media dei due lati più corti è 11 cm, la media dei due più lunghi è 14 cm, e il perimetro è 38 cm. Quanto misura il lato di lunghezza intermedia?

18) Il borsellino della nonna contiene esclusivamente monete da 50, 20 e 10 centesimi. Se ti dico che quelle da 50 e da 20, insieme, fanno un totale di 5 euro e 80 centesimi, che quelle da 20 e da 10, insieme, valgono 3 euro e 30 centesimi, e che il valore di quelle da 50 e da 10 assomma a 5 euro e 50 centesimi, sapresti determinare il numero totale di monete presenti nel borsellino?

19) In un *fast food* vengono distribuiti primi piatti al costo di 3 euro, secondi piatti a 4 euro l'uno, e dolci a 2 euro. Se ti dico che quest'oggi l'incasso complessivo relativo ai soli primi e secondi piatti è stato di 480 euro, quello relativo ai secondi piatti e ai dolci di 320 euro, e che sono state servite 180 portate, sei in grado di stabilire quante sono state le portate di ciascun tipo?

Due problemi dello svizzero Eulèro, 1707-1783:

20a) Un tale ha due coppe d'argento, e un solo coperchio. La prima coppa pesa 12 once, e se le si mette sopra il coperchio, viene a pesare il doppio dell'altra; ma se il coperchio si sposta sull'altra coppa, questa viene a pesare il triplo della prima. Quanto pesano la seconda coppa, e il coperchio?

20b) Tre persone A, B, C giocano fra loro tre partite a carte consecutive.
Nella prima partita A perde in favore di B tanti denari quanti B ne possedeva all'inizio, e a favore di C tanti denari quanti C ne possedeva all'inizio.
Nella seconda partita, allo stesso modo, B perde in favore di A e di C rispettivamente, tanti denari quanti ciascuno dei due possedeva all'inizio della seconda partita.
E infine, nella terza partita, C perde in favore di A e di B rispettivamente, tanti denari quanti ciascuno dei due possedeva all'inizio della terza partita.
Se alla fine ognuno dei tre si trova a possedere 24 denari, con quanti denari si erano seduti al tavolo?

21) In una certa scuola privata, a ogni diplomato viene assegnato un giudizio finale che può essere "Sufficiente", "Buono", "Distinto" o "Ottimo". Trova il numero degli alunni diplomatisi l'anno scorso se si conoscono le seguenti informazioni: S = ½ B; S+B = D+O; O = D+30; 1/5 S + 1/3 D = 1/5 O
(S = numero alunni usciti col "sufficiente"; B = n° "buoni"; D = n° "distinti"; O = n° "ottimi")

21') *Prova a riprendere il problema precedente e a risolverlo con una sola incognita.*
Converrà porre x = numero degli studenti usciti col "distinto", perché questa scelta dell'incognita è quella che rende più facile esprimere per mezzo di x tutte le altre quantità in gioco.

22) Si può dimostrare che la somma degli angoli di un pentagono qualsiasi misura sempre 540°. Tenendo presente questo, trova le misure degli angoli di un pentagono irregolare ABCDE, sapendo che l'angolo $\hat{A}$: supera di 1° la terza parte di $\hat{B}$, supera di 2° la quarta parte di $\hat{C}$, è uguale alla quinta parte di $\hat{D}$ ed è inferiore di 117° all'angolo $\hat{E}$.

22') *Risolvi il problema 22) con una sola incognita* (*ti converrà scegliere come incognita la misura di* $\hat{A}$)

23) Determina un numero di 3 cifre sapendo che:
- la somma delle sue cifre è 8;
- invertendo l'ordine delle cifre, il numero diminuisce di 198 unità;
- se si scambia la prima cifra con la seconda, il numero aumenta di 90 unità.

Indicazione per i problemi di questo tipo: il numero di tre cifre che si scrive come "abc" *è uguale a* $100a+10b+c$. *Ad esempio,* $789 = 7\cdot 100+8\cdot 10+9$

24) Determina un numero di 3 cifre sapendo che la cifra delle unità è doppia di quella delle decine, la somma delle cifre è 15, e scrivendo le cifre in ordine invertito si ottiene un numero inferiore di 495 unità a quello iniziale.

25) Determina un intero di 2 cifre sapendo che supera di 20 unità il quintuplo della somma delle sue cifre, e che se lo si riscrivesse scambiando fra loro le cifre, diminuirebbe di 27 unità.

26) Un intero di due cifre è tale che dividendolo per la somma delle sue cifre si ottiene quoziente 6 e resto 8, mentre dividendolo per la differenza delle sue cifre (la cifra delle decine è maggiore di quella delle unità) si ottiene quoziente 24 e resto 2. Di che numero si tratta?

♫ POLINOMI DEI QUALI DOBBIAMO DETERMINARE I COEFFICIENTI

27) Nel polinomio $\mathrm{P}(x)=x^2+ax+b$ la variabile è *x*; le lettere *a*, *b* rappresentano due coefficienti. Determina i numeri *a*, *b* in modo che si abbia $\mathrm{P}(2)=10$ e $\mathrm{P}(-1)=-5$
[*Indicazione*: dovrà essere $2^2+2a+b=10$ e … ; di qui un sistema nel quale *a*, *b* fanno da incognite]

28) Nel polinomio $\mathrm{P}(w)=aw^2+bw+c$ la variabile è *w*; le lettere *a*, *b*, *c* rappresentano i tre coefficienti. Determina *a*, *b* e *c* sapendo che $\mathrm{P}(1)=\mathrm{P}(2)=-7$ e $\mathrm{P}(-3)=13$.

29) Il polinomio $\mathrm{P}(y)=y^3+ay^2+by+c$ è tale che $\mathrm{P}(1)=3;\ \mathrm{P}(-1)=-3;\ \mathrm{P}(2)=9$. Quanto valgono *a*, *b*, *c*?

30) Determina *a*, *b*, *c* e *d* in $\mathrm{P}(z)=az^3+bz^2+cz+d$ sapendo che $\mathrm{P}(0)=2,\ \mathrm{P}(1)=1,\ \mathrm{P}(2)=4,\ \mathrm{P}(3)=17$.

31) Quando il papà Giuseppe aveva l'età che ha attualmente sua moglie Francesca, la figlia Benedetta aveva 11 anni. Sapendo che Francesca aveva 27 anni quando nacque Benedetta, e che la somma delle età attuali dei tre è uguale a 99 anni, determina l'età di ciascuno.

♫ MISTURE E CONCENTRAZIONI

32) Si vogliono ottenere 10 litri di soluzione al 10% di alcool, e a tale scopo si mescoleranno quantità opportune dei due liquidi disponibili, che sono: una soluzione A al 5% di alcool, e di una soluzione B al 12% di alcool. Quanti litri di A e quanti di B occorrono?

RISOLUZIONE

$x =$ n° litri di A occorrenti; $y =$ n° litri di B occorrenti

Gli x litri di A contengono il 5% di alcool, quindi contengono $\frac{5}{100}x$ litri di alcool

Gli y litri di B contengono il 12% di alcool, quindi contengono $\frac{12}{100}y$ litri di alcool

Mescolando, si vogliono ottenere 10 litri al 10% quindi

$$\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{5}{100}x+\frac{12}{100}y=\frac{10}{100}\cdot 10 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x+y=10 \\ 5x+12y=100 \end{cases} \quad \text{e perciò} \quad \begin{cases} x=\frac{20}{7}=2+\frac{6}{7} \\ y=\frac{50}{7}=7+\frac{1}{7} \end{cases}$$

33) Acqua e alcool denaturato sono mescolati, e la concentrazione di alcool è al 15%.
Si vogliono mescolare x litri di questo liquido con y litri di acqua pura in modo da ottenere 10 litri di soluzione al 12% di alcool.
Che valore devono avere a questo scopo x e y?

34) Un liquido A è formato da un 80% di acqua insieme con un 20% di disinfettante, un altro liquido B contiene invece il 10% di disinfettante (e il 90% di acqua).
Se vogliamo ottenere 20 litri di liquido nel quale la concentrazione del disinfettante sia al 16%, quanti litri di A e quanti di B dovremo mescolare fra loro?

♫ VELOCITA'

35) Due aerei identici spingono il loro motore a tutto gas, andando in direzioni opposte, il primo favorito e il secondo ostacolato dal vento. Sapendo che il primo in 1 ora e 20' riesce a percorrere 1120 km mentre il secondo nello stesso tempo copre una distanza di soli km 960, determina la velocità che avrebbe ciascun aereo se il vento non ci fosse, nonché la velocità del vento.

RISOLUZIONE

Indichiamo con v la velocità che avrebbe ciascun aereo in aria calma, e con w la velocità del vento.
Allora l'aereo col vento in favore sarà portato alla velocità $v+w$, mentre quello frenato dal vento procederà alla velocità inferiore $v-w$. Il tempo di percorrenza di cui il testo ci parla è 1 h e 20 minuti, ossia (dobbiamo portare tutto in ore) 1 ora e 20/60 di ora, 1 ora e 1/3 di ora, 4/3 di ora.

Allora avremo: $$\begin{cases} (v+w)\cdot\frac{4}{3}=1120 \\ (v-w)\cdot\frac{4}{3}=960 \end{cases} \;;\; \dots \;;\; \begin{cases} v=780 \\ w=60 \end{cases}$$

36) Una zattera a motore impiega 2 ore e ½ a percorrere un tratto di fiume di 30 km contro corrente.
La stessa zattera, col motore funzionante allo stesso modo, ridiscende successivamente il fiume percorrendo 24 km nello stesso senso della corrente in 1 ora e ½.
Determina la velocità della corrente, e quella che avrebbe l'imbarcazione in assenza di corrente.

37) Andando in motorino per ¼ d'ora ad x km/h, poi in bici per 20 minuti ad y km/h, si percorrono 23 km; Se invece, con le stesse velocità, i tempi si invertono, i km percorsi sono 26. Determina x e y.

38) Un signore, terminato il lavoro in ufficio, si dirige, a piedi e con passo regolare (4 km/h), verso casa.
A un certo punto, riceve sul telefonino una chiamata della moglie che gli comunica tutta emozionata di aspettare il tanto desiderato primo bambino. Allora cambia bruscamente il ritmo della sua camminata, procedendo, in questo secondo tratto, più rapidamente di prima (6 km/h).
Sapendo che la distanza dell'ufficio dalla casa è di km 3,4 e che il tempo totale del rientro è stato di 39', determina i tempi di percorrenza dei due tratti (in minuti).
(*Suggerimento: trasforma innanzitutto quei 39' in una frazione di ora …*)

♫ RITMI DI LAVORO

39) Un'azienda dispone di parecchie macchine tessili, di due tipologie differenti: tipo A e tipo B.
3 macchine di tipo A e 4 di tipo B sarebbero in grado di effettuare la produzione richiesta da un certo cliente, funzionando simultaneamente per 28 ore, mentre la stessa produzione potrebbe essere portata a termine in 20 ore soltanto se a lavorare in simultanea fossero 4 macchine di tipo A e 6 di tipo B.
Si domanda quanto ci metterebbe una singola macchina di tipo A a compiere quel lavoro.
E una singola macchina di tipo B? E una di tipo A più una di tipo B insieme?

RISOLUZIONE

Chiediamoci che frazione $\frac{1}{x}$ del lavoro è in grado di svolgere in 1 ora una singola macchina di tipo A e che frazione $\frac{1}{y}$ del lavoro è in grado di svolgere in 1 ora una singola macchina di tipo B.

Dunque: poiché 3 macchine di tipo A e 4 di tipo B ci mettono, insieme, 28 ore a effettuare il lavoro, avremo $3\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{28}$; e allo stesso modo, tenendo conto dell'altra informazione, $4\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{20}$.

Il sistema $\begin{cases} 3\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{28} \\ 4\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{20} \end{cases}$ può essere risolto agevolmente con una "posizione": si pone $\begin{cases} \frac{1}{x}=u \\ \frac{1}{y}=v \end{cases}$

e si trova $\begin{cases} 3u+4v=\frac{1}{28} \\ 4u+6v=\frac{1}{20} \end{cases}$ che, risolto, ci dà $\begin{cases} u=\frac{1}{140} \\ v=\frac{1}{280} \end{cases}$. Allora sarà $\begin{cases} x=\frac{1}{u}=140 \\ y=\frac{1}{v}=280 \end{cases}$

per cui 1 singola macchina di tipo A ci metterebbe 140 ore a ultimare quella produzione, 1 singola macchina di tipo B 280 ore e, se lavorassero assieme, poiché in 1 ora effettuerebbero una frazione, della produzione richiesta, data da $\frac{1}{140}+\frac{1}{280}=\frac{3}{280}$,

completerebbero l'intero lavoro in un numero di ore pari a $\frac{1}{\frac{3}{280}}=\frac{280}{3}=93+\frac{1}{3}=93\,h\,20'$ (NOTA)

NOTA - Sei d'accordo su questo passaggio al reciproco?
Per convincerti della sua correttezza, immagina casi numericamente più semplici, ad esempio:
supponi che in 1 ora venga svolto 1/5 di un lavoro;
allora, evidentemente, per fare quel lavoro ci vorranno 5 ore.
E se in un ora viene fatto 3 volte un certo lavoro?
Allora per quel lavoro è necessario impiegare 1/3 di ora!

40) 8 esperti e 8 apprendisti sono in grado di eseguire un lavoro in 1 giorno e ½;
4 esperti e 10 apprendisti ci metterebbero 2 giorni.
Quanto ci vorrebbe ad un lavoratore esperto da solo?

SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) Una penna costa 2 euro, un quaderno 1,50 2) $a = 18$, $b = 15$ 3) Ne ha perse 2 4) 7 ore A, 8 ore B
5) Ha speso 40 euro 6) 8 euro e 30 centesimi 7) 14+4=18 euro 8) Anna possiede 70 euro, Bruno 110
9) Una moneta d'argento vale 120 euro, una di bronzo 40 euro; il mio tesoro vale 10000 euro
10) 42+48=90 euro 11) Rapporto=quoziente; 28 e 7 12) 40°, 40°, 100° 13) 44 e 38 14) 26+18=44
15) 15/19 16) 5 macchinine, 10 biciclettine, 4 tricicli 17) 12 centimetri 18) 8+9+15=32
19) 80 primi, 60 secondi, 40 dolci 20a) 16 e 20 once 20b) A aveva inizialmente 39 denari, B 21 e C 12
21) S=20, B=40, D=15, O=45; in totale, gli studenti sono 20+40+15+45=120
22) $\hat{A}$=31°, $\hat{B}$=90°, $\hat{C}$=116°, $\hat{D}$=155°, $\hat{E}$=148° 23) 341 24) 924 25) 85 26) 74
27) $a=4, b=-2$: il polinomio è $P(x)=x^2+4x-2$ 28) $a=1, b=-3, c=-5$ 29) $a=-1, b=2, c=1$
30) $a=1, b=-1, c=-1, d=2$: il polinomio è $P(x)=x^3-x^2-x+2$
31) 44 anni Giuseppe, 41 anni Francesca, 14 anni Benedetta
32) I litri di A sono 20/7 (2+6/7), quelli di B sono 50/7 (7+1/7) 33) $x=8, y=2$ 34) 12 litri di A, 8 di B
35) La velocità che avrebbe ciascun aereo in aria calma è di 780 km/h, la velocità del vento è di 60 km/h
36) La corrente procede a 2 km/h, la zattera senza corrente andrebbe a 14 km/h 37) 60 km/h, 24 km/h
38) 15' a 4 km/h e 24' a 6 km/h 39) 140 ore, 280 ore, 93 h 20' 40) 18 giorni

ESEMPI DI PROBLEMINI IN INGLESE, TROVATI SU INTERNET
(parole chiave: “word problems”, “simultaneous equations”, …)
♥ **Nel mondo anglosassone, la virgola fa da separatore per le migliaia, il punto per la parte decimale**

Da www.gcseguide.co.uk (Matthew Pinkney):

41) A man buys 3 fish and 2 chips for £2.80; a woman buys 1 fish and 4 chips for £2.60.
How much are the fish and how much are the chips?

Da www.themathpage.com (Lawrence Spector):

42) 1000 tickets were sold.
Adult tickets cost $8.50, children's cost $4.50, and a total of $7300 was collected.
How many tickets of each kind were sold?

43) It takes 3 hours for a boat to travel 27 miles upstream.
The same boat can travel 30 miles downstream in 2 hours.
Find the speeds of the boat and the current.

44) Edgar has 20 dimes and nickels, which together total $1.40. How many of each does he have?
(dime = moneta da 10 cents; nickel = moneta da 5 cents)

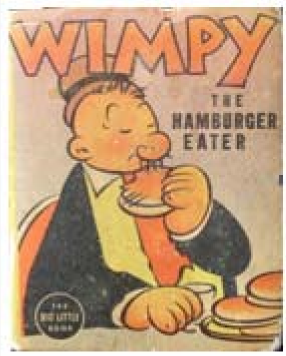
45) Mr. B. has $20000 to invest. He invests part at 6%, the rest at 7%, and he earns $1280 interest.
How much did he invest at each rate?

46) How many gallons of 20% alcohol solution and how many of 50% alcohol solution
must be mixed to produce 9 gallons of 30% alcohol solution?

47) 15 gallons of 16% disinfectant solution is to be made from 20% and 14% solutions.
How much of those solutions should be used?

48) An airplane covers a distance of 1500 miles in 3 hours when it flies with the wind,
and in 3 1/3 hours (3+1/3 hours) when it flies against the wind.
What is the speed of the plane in still air?

Da www.cut-the-knot.org
(Alexander Bogomolny, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles)



49) It takes two hours for Tom and Dick to do a job.
Tom and Harry take three hours to do the same job.
Dick and Harry take six hours for the job.
Prove that Harry is a freeloader
(= scroccone, parassita, mangiapane a tradimento)

50) Billy is twice as old as Sally was when Billy was as old as Sally is now;
and the sum of their ages is 28. How old are they now?

(♣ *Trovi tanti altri bei problemi, completi di risoluzione,
sullo stesso - fantastico! - sito di A. Bogomolny*)

Da www.regentsprep.org:

51) A test has twenty questions worth 100 points. The test consists of
True/False questions worth 3 points each and multiple choice questions worth 11 points each.
How many multiple choice questions are on the test?

Dal sito http://en.allexperts.com:

52) When a man cycles for 1 hour at x km/h and 2 hours at y km/h, he travels 32 km.
When he cycles for 2 hours at x km/h and 1 hour at y km/h, he travels 34 km. Find x and y.

53) A man on foot covers the 25 km between two towns in 3 and three quarter hours.
He walked at 4 km/h for the first part of the journey and ran at 12 km/h for the remaining part.
a) How far did he run?
b) For how long was he running?

SOLUZIONI

41) £0.60, £0.50 42) 700, 300 43) 12 miles per hour, 3 miles per hour 44) 8 dimes, 12 nickels
45) $12000, $8000 46) 6 gallons, 3 gallons 47) 5 gallons, 10 gallons 48) 475 mph
49) Dal sistema si trae che Harry dà un contributo orario = 0 al lavoro! 50) 16, 12
51) There are 5 multiple choice questions 52) $x = 12,\ y = 10$ 53) 15 km; 1.25 h

13. QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA SU EQUAZIONI E SISTEMI

1) In un club di cacciatori, i 3/8 vanno anche a pesca,
mentre 15 lasciano in pace almeno i pesci.
Quanti membri conta quel club?
a) 48 b) 40 c) 32 d) nessuna delle risposte precedenti è corretta

2) Il perimetro di un rettangolo misura 34 cm,
e l'altezza supera il doppio della base di 2 cm.
Quanto misura l'area?
a) $60\ cm^2$ b) $\frac{2240}{9}\ cm^2$ c) $\frac{285}{4}\ cm^2$ d) non si può determinare con sicurezza

3) L'area di un rettangolo, la cui base è doppia dell'altezza, misura $cm^2\,50$. La diagonale misura allora:
a) fra gli 11 e i 12 cm b) fra i 12 e i 13 cm c) fra i 13 e i 14 cm d) fra i 14 e i 15 cm

4) Quante soluzioni ha l'equazione $x(x-1)(2x+1)(x^2-16)=0$? a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

5) Dal sito www.analyzemath.com:
Due differenti compagnie di noleggio automobili offrono due piani tariffari differenti: A e B.
Nel piano A, un cliente paga 25 dollari fissi più 10 centesimi per ogni chilometro percorso.
Nel piano B, il cliente paga 15 centesimi per ciascuno dei primi 100 chilometri e 20 centesimi per ogni chilometro dopo i primi 100. Per quanti km i due piani prevederebbero la stessa spesa?
a) 400 b) 300 c) 200 d) 120 e) 100

6) Se $2(3+2x)=1$, quanto vale $4-12x$? a) 17 b) 18 c) 19 d) non si può determinare

7) Se $(a+b)^2$ supera di 1584 unità $(a-b)^2$, che numero si ottiene moltiplicando a per b ?
a) 792 b) 396 c) 198 d) Ci sono 2 possibilità

8) Se $a+3b=11$ e $2a+b=2$, quanto vale $a+b$? a) 3 b) 3,5 c) 4 d) 4,5

9) Se $\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2}$, il valore di $\frac{x}{y}$ è: a) -4 b) -3 c) -2 d) -1 e) 0

10) L'equazione $2(x-a)=2a+1$, dove a è un numero fissato, ha come soluzione il numero $a+1$
a) mai b) per infiniti valori di a c) solo se $a=0$ d) solo se $a=1/2$

11) La coppia (x, y) soluzione del sistema $\begin{cases} 4x-3y=25 \\ 8x+7y=11 \end{cases}$ verifica l'equazione $x+ky=10$. Quanto vale k?
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

12) UKMT - United Kingdom Mathematics Trust - Intermediate Mathematical Challenge 2007
The mean (= media) of three numbers x, y and z is x. What is the mean of y and z ?
a) $\frac{1}{2}x$ b) x c) $2x$ d) $3x$ e) $4x$

13) UKMT - United Kingdom Mathematics Trust - Intermediate Mathematical Challenge 2005
Granny has taken up deep-sea fishing! Last week, she caught a fish so big
that she had to cut it into three pieces (head, body and tail) in order to weigh it (= per pesarlo).
The tail weighed 9 kg and the head weighed the same as the tail plus one third of the body.
The body weighed as much as the head and tail together. How much did the whole fish weigh?
a) 18 kg b) 27 kg c) 54 kg d) 77 kg e) 84 kg

14) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1991
On an exam with q questions, Marie correctly answered 15 of the first 20 but just 1/3 of the rest.
If her total score was 50%, what was q? a) 29 b) 50 c) 55 d) 65 e) 100

15) In una scuola superiore, quest'anno, si è avuto un *boom* di iscrizioni alle classi prime: il 10% di femmine in più, addirittura il 40% di maschi in più, mentre il totale degli iscritti è aumentato del 20%.
Quante erano state, l'anno scorso, le iscrizioni femminili rispetto a quelle maschili?
a) Una volta e mezza b) Il doppio c) Due volte e mezza d) Il triplo e) Il quadruplo

RISPOSTE AI QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA : 1d2a3a4e5b6c7b8a9b10d11a12b13c14b15b

14. PROBLEMI VARI, A UNA O PIU' INCOGNITE (se c'è la freccia, manda alla correzione)

1) La somma delle età di due sorelle è 36 anni. 6 anni fa la maggiore aveva età doppia della minore.
Trova le due età attuali. ⇨

2) *Un problemino di Eulero (1707-1783)*
Un padre lasciò in eredità ai suoi 4 figli un patrimonio complessivo di 8600 sterline. Secondo il testamento, al primogenito dovevano andare 100 sterline meno del doppio di ciò che spettava al secondogenito; il secondogenito, a sua volta, avrebbe ereditato 200 sterline in meno rispetto al triplo del terzogenito. E questi (il terzogenito), avrebbe dovuto ricevere 300 sterline in meno rispetto al quadruplo del più giovane. Si domanda l'ammontare dell'eredità di ciascuno. ⇨

3) Si vincono 4 gettoni per ogni risposta giusta, se ne perdono 7 per ogni risposta sbagliata; dopo 30 domande io sto perdendo 89 gettoni. Quante volte ho risposto sbagliato? ⇨

4) Determina i tre coefficienti *a, b, c* di un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c sapendo che:
- se si assegna a x il valore 1, il trinomio assume il valore 0
- se si assegna a x il valore 2, il trinomio assume il valore 1
- se si assegna a x il valore 3, il trinomio assume il valore 6. ⇨

5) Un commerciante si reca successivamente a Lucca, poi a Firenze e infine a Pisa.
In ogni città prima raddoppia i soldi con cui arriva, poi spende per la locanda 12 denari.
Se alla fine si ritrova senza denari, con quanti denari aveva iniziato il suo giro? ⇨
(Soluzione frazionaria; il problema è tratto dal Liber Abaci di Leonardo Pisano, pubblicato nel 1202).

6) Un aeroplano percorre un tragitto di 390 km in 30 minuti in condizioni di vento contrario, poi torna indietro, sempre in presenza del medesimo vento, che però in questo caso gioca a favore, e ci impiega 26 minuti soltanto. Trova:
a) la velocità che avrebbe l'aereo, in assenza di vento
b) la velocità del vento ⇨

Alcuni di questi problemi non sono facili. Non darti subito per vinta/o!!! Non facevano così nel vecchio West!

7) Se di una scalinata io ne percorro la metà più 4 gradini, poi la metà di ciò che resta più 8 gradini, e a quel punto mi rimane ancora la quinta parte dell'intera scalinata, sapresti dirmi quanti sono i gradini in totale? ⇨

8) Trovare un intero di 2 cifre, sapendo che è uguale a 15 volte la cifra delle unità, e che scambiandone le cifre diminuisce di 18 unità. ⇨

9) I due podisti Aldo e Bruno corrono a due velocità costanti, ma diverse fra loro (Aldo è più veloce), su di un circuito di 360 metri. Determinare le loro velocità in m al secondo e anche in km/h, sapendo che se marciano in direzioni opposte, si incontrano ogni 40 secondi, mentre se marciano nella stessa direzione, Aldo, ogni volta che supera Bruno, ci mette 6 minuti a raggiungerlo nuovamente. ⇨

10) Ho in tasca 43 monete, parte da 10, parte da 20, e parte da 50 centesimi. Il totale equivale a 9 euro, e il numero delle monete da 20 centesimi è ¾ di quello delle monete da 10.
Quante sono le monete da 10, quante quelle da 20, e quante quelle da 50? ⇨

11) Ai Giochi di Archimede una risposta esatta viene valutata 5 punti, una sbagliata 0 e una non data 1.
Supponiamo che Pierino abbia totalizzato 64 punti senza sbagliare mai;
a quante domande, sulle 20 proposte, ha allora scelto di non rispondere?

12) Ho in portafogli monetine da 10, 20 e 50 centesimi; quante di ciascun tipo, se il valore di quelle da 10 e da 20 è complessivamente di 2,80 euro, il valore di quelle da 10 e da 50 di 4,80 euro, e il valore di quelle da 20 e da 50 di esattamente 6 euro?

13) Se dopo uno sconto del 20% su di un articolo il venditore, non riuscendo a trovare un acquirente, decide di praticare un ulteriore sconto del 25 %, offrendolo per euro 108, qual era il prezzo originario?

14) Una bella signora, quando il goffo e incolto Gennarino le domanda quanti anni abbia, con l'intento di metterlo in difficoltà gli risponde: "Cinque anni fa, avevo i 5/6 dell'età che avrò fra 3 anni".
Aiuteresti Gennarino a ricostruire l'età della dama?

15) Disponendo una sopra l'altra 12 monete, alcune da 20 centesimi di corona e le altre da 50 centesimi, si ottiene una colonna di monete alta 26 mm. Sapendo che una moneta da 20 centesimi di corona è spessa 2 mm e una da 50 centesimi 2,4 mm, qual è il valore totale delle monete in colonna?

16) Quanti litri di soluzione al 12% di alcool devono essere mescolati con quanti litri di soluzione alcoolica al 22% se si vogliono ottenere 5 litri di soluzione al 20%?

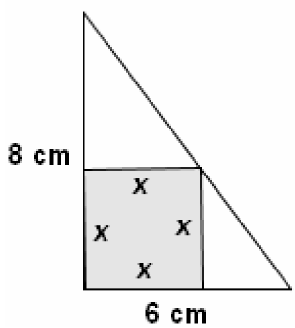
17) All'entrata di un supermercato, si trovano due trenini di carrelli ben incastrati, uno composto da 10 carrelli e lungo 2,9 metri e l'altro formato da 20 carrelli e lungo 4,9 metri. Qual è la lunghezza di un carrello? (Kangourou 2010)

18) Se un padre è in grado di tagliare l'erba nel giardino di casa mettendoci ½ ora e il figlioletto ¾ d'ora, stabilisci quanti minuti ci metterebbero a sistemare l'intero giardino, lavorando insieme.

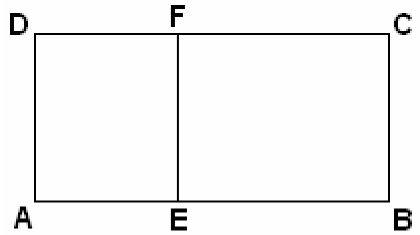
19) Due rubinetti che si affacciano su di una grossa vasca vengono aperti simultaneamente.
Il primo rubinetto sarebbe in grado, se usato da solo, di riempire la vasca in 1 ora e mezza, il secondo, che è assai piccolino, sempre se usato da solo, ce la farebbe in 6 ore; ora i due rubinetti sono aperti entrambi, ma per distrazione è stato lasciato in funzione pure lo scarico della vasca, il quale, quando questa è piena, riesce a vuotarla in 2 ore.
Determina il tempo necessario affinché la vasca si riempia in queste condizioni.

20) Dimostra che il sistema $\begin{cases} 3\cdot\dfrac{1}{x}+4\cdot\dfrac{1}{y}=-8 \\ 2\cdot\dfrac{1}{x}-5\cdot\dfrac{1}{y}=10 \end{cases}$ è impossibile $\left[\textit{Indicazione: poni } \dfrac{1}{x}=u,\ \dfrac{1}{y}=v\ ...\right]$

21) Un quadrato è "inscritto in un triangolo rettangolo" di cateti 6 cm e 8 cm, come nella figura qui a fianco. La misura del lato del quadrato si può determinare utilizzando i "triangoli simili"; ma anche senza scomodare le similitudini, ci si può riuscire ugualmente, tramite … le aree! Indica con x il lato da determinare, e provaci.



22)



Sapendo che il perimetro di AEFD è inferiore di 4 cm rispetto a quello di EBCF, e che $AB = 18$ cm, è possibile determinare AE, EB, AD?

23) Una candela ci mette 5 ore per consumarsi completamente. Una seconda candela è alta il doppio della prima; tuttavia, essendo questa molto più sottile, il tempo affinché si consumi è di sole 4 ore. Se vengono accese simultaneamente, dopo quanto tempo si troveranno ad avere la stessa altezza?

Da www.cut-the-knot.org:

24) There are 9 coins all together, some of them pennies, some nickels and some dimes.
If you collect up all the pennies and nickels, there are 7.
If you collect up all the nickels and dimes, there are 5.
How many of the 9 coins are pennies, how many nickels, how many dimes?
(*Penny, nickel, dime = monetina da - rispettivamente - 1, 5, 10 centesimi di dollaro*)

Da www.analizemath.com:

25) A swimming pool can be filled by pipe A in 3 hours and by pipe B in 6 h, each pump working on its own. At 9 am pump A is started. At what time will the swimming pool be filled if pump B is started at 10 am?

26) Se un viaggiatore fosse andato 1 km/h più veloce, avrebbe risparmiato la sesta parte del tempo impiegato; mentre se fosse andato 1 km/h più lento, ci avrebbe messo ¾ d'ora in più. Trova la distanza percorsa.

SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) 22 e 14 anni 2) 4900, 2500, 900, 300 sterline 3) 19 sbagliate 4) $a = 2,\ b = -5,\ c = 3$
5) 10 denari e ½ 6) vel. aereo: 14 km al minuto = 840 km all'ora; vel. vento: 1 km al minuto = 60 km/h
7) 200 gradini 8) 75 9) Aldo va a 5 m/s = 18 km/h; Bruno a 4 m/s = 14,4 km/h 10) 20, 15, 8
11) 9 12) 8, 10, 8 13) 180 euro 14) 45 anni 15) 390 centesimi di corona = 3 corone e 90 centesimi
16) 1 litro, 4 litri 17) m 1,1 18) 18 minuti (*senza equazioni*) 19) 3 ore
20) Si trova $u = 0$, ma non esiste alcun valore di x per cui si abbia $1/x = 0$
21) La somma delle tre aree piccole dà l'area grossa: $x^2 + \dfrac{(6-x)\cdot x}{2} + ... = ...$ $x = \text{cm}\,\dfrac{24}{7}$
22) $AE = 8$ cm, $EB = 10$ cm, mentre AD non si può determinare, potrebbe avere una misura qualsiasi.
23) Dopo 3 ore e 20 minuti 24) $p = 4,\ n = 3,\ d = 2$ 25) $t\cdot(1/3) + (t-1)\cdot(1/6) = 1$; at 11:20 26) 15 km