

FRAZIONI ALGEBRICHE

Si dice “frazione algebrica” una frazione i cui termini siano monomi o polinomi.

Esempi: $\frac{15x^3y}{20x^4y^4}$ $\frac{a+b}{cd}$ $\frac{x^2-1}{xy-x-y+1}$ $\frac{3}{k-2}$

1. SEMPLIFICAZIONE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

A volte (non sempre) una frazione algebrica può essere semplificata.

La semplificazione di una frazione consiste nell'applicare la cosiddetta “**proprietà invariante**”, che dice:

“In una divisione è possibile moltiplicare oppure dividere (nel caso della semplificazione: dividere) per uno stesso numero diverso da zero, sia il dividendo che il divisore e il risultato dell'operazione non cambierà”

Notiamo che in molte semplificazioni si applica anche, *simultaneamente*, la proprietà che afferma:

“Quando si deve moltiplicare, o dividere (nel nostro caso: dividere), un PRODOTTO per un numero, basta moltiplicare, o dividere, per quel numero UNO SOLO dei fattori del prodotto. In particolare, quando si deve dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere quel fattore”

Esempi: $\frac{24^3}{40^5} = \frac{3}{5}$ $\frac{25 \cdot 14^2}{21^3 \cdot 11} = \frac{50}{33}$ $\frac{5 \cdot 3 \cdot 8}{8 \cdot 29} = \frac{15}{29}$

A) SEMPLIFICAZIONE MONOMIO-CON-MONOMIO

1) $\frac{15x^3y}{20x^4y^4} = \frac{\overset{3}{15} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y}}{4 \cdot \cancel{20} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{3}{4xy^3}$ Ovviamente, nella pratica, il passaggio intermedio si salta, come negli esempi successivi.

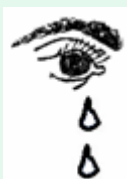
2) $\frac{a^{\cancel{4}} b^{\cancel{4}} \cancel{c}^{\cancel{3}} \cancel{d}^{\cancel{3}} e^{\cancel{7}}^3}{\cancel{a}^{\cancel{4}} \cancel{b}^{\cancel{4}} \cancel{c}^{\cancel{4}} \cancel{d}^{\cancel{4}} \cancel{e}^{\cancel{4}} f^4} = \frac{ae^3}{cd^3 f^4}$ 3) $\frac{\cancel{6} x^{\cancel{2}}}{3 \cdot \cancel{18} x^{\cancel{10}} 8} = \frac{1}{3x^8}$ 4) $\frac{\cancel{7} x^{\cancel{8}}^4}{\cancel{7} \cancel{x}} = x^4$

B) SEMPLIFICAZIONE MONOMIO-CON-POLINOMIO

In questo caso la semplificazione è possibile soltanto se nel polinomio si può raccogliere un fattore, che sia poi semplificabile col monomio che sta dall'altra parte della linea di frazione.

5) $\frac{5a^2+15a}{35a^2b} = \frac{\cancel{5} \cancel{a} (a+3)}{7 \cdot \cancel{35} a^{\cancel{2}} b} = \frac{a+3}{7ab}$

ATTENZIONE!!! A questo punto l'esercizio 5) è finito: semplificare le “a” sarebbe un ERRORACCIO!



$\frac{\cancel{a}+3}{7 \cancel{a} b}$
WHAAH
!!!

MA COSA FAI,



NO, PER CARITA'!!! DISGRAZIATO???

IMPORTANTISSIMO: IN UNA FRAZIONE, E' ERRORE MADORNALE

SEMPLIFICARE ADDENDO CON ADDENDO OPPURE ADDENDO CON FATTORE:

SI PUO' SOLO SEMPLIFICARE FATTORE CON FATTORE.

Per capire bene questo fatto, basterà pensare a qualche caso puramente numerico. Due esempi:

♪ la frazione $\frac{10+4}{15} = \frac{14}{15}$, se noi facessimo l'**ERRORACCIO** di semplificare 10 con 15, diventerebbe $\frac{\cancel{10}+4}{\cancel{15}_3} = \frac{6}{3} = 2$!!!

♪ di fronte alla frazione $\frac{9+5}{7+6} = \frac{14}{13}$, prova a semplificare (WHAAH!!!) il 9 col 6, e osserva che **DISASTRO!!!**

Ancora un'osservazione. L'esercizio (tanto per fare un esempio) $\frac{5x+10}{15}$ si può svolgere in **2 modi**:

a) raccogliendo e poi semplificando: $\frac{5x+10}{15} = \frac{\cancel{5}(x+2)}{\cancel{15}_3}$

b) ... oppure direttamente, come qui a destra. Abbiamo diviso per 5 sia “sopra” che “sotto”: ma **PER DIVIDERE UNA SOMMA PER UN NUMERO OCCORRE DIVIDERE PER QUEL NUMERO TUTTI GLI ADDENDI DELLA SOMMA**

$\frac{\cancel{5}x + \cancel{10}^2}{\cancel{15}_3}$

C) SEMPLIFICAZIONE POLINOMIO-CON-POLINOMIO

In questo caso occorre innanzitutto **SCOMPORRE IN FATTORI** (se possibile) i due polinomi: dopodiché, si semplificherà **FATTORE CON FATTORE** (s'intende che i **FATTORI** siano "TOTALI").

$$6) \frac{x^2 - 1}{xy - x - y + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(y-1) - (y-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(y-1)(x-1)} = \frac{x+1}{y-1}$$

$$7) \frac{t^4 + 3t^3 + 3t^2 + t}{t^2 + 5t + 4} = \frac{t(t^3 + 3t^2 + 3t + 1)}{(t+1)(t+4)} = \frac{t(t+1)^3}{(t+1)(t+4)} = \frac{t(t+1)^2}{t+4}$$

$$8) \frac{x^5 - 9x^4 + 18x^3}{x^5 - 9x^3} = \frac{x^3(x^2 - 9x + 18)}{x^3(x^2 - 9)} = \frac{(x-3)(x-6)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-6}{x+3} \text{ (NOTA)}$$



NOTA
Insisto!
Arrivati a

$$\frac{x-6}{x+3},$$

l'esercizio è **TERMINATO!**

Sarebbe **ERRORACCIO**

semplificare

la x con la x,

o il 3 col -6 !!!

**ATTEN-
ZIONE!**

**Professore ...
guardi ...**



Mi spiace, ma HAI SBAGLIATO.

Quando si dice "fattore con fattore" si deve intendere "FATTORE TOTALE CON FATTORE TOTALE", mentre l' (x+2) a numeratore è soltanto un fattore **PARZIALE**.

Avresti dovuto PRIMA terminare la scomposizione e POI semplificare!

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{3x + 6} = \frac{x^2(x+2) + 4(x+2)}{3(x+2)}$$

ho fatto giusto, vero?
Ho semplificato, come dice lei,
"fattore con fattore" ...

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{3x + 6} = \frac{x^2(x+2) + 4(x+2)}{3(x+2)} = \frac{(x+2)(x^2 + 4)}{3(x+2)} \text{ ADESSO E' GIUSTO!!!}$$

ESERCIZI (semplificazione di frazioni algebriche)

- 1) $\frac{12a^4b^4c^4}{18ab^4c^{12}}$ 2) $\frac{42x^7}{14x^6}$ 3) $\frac{29t^3}{58t^6}$ 4) $\frac{y^3}{y^3}$ 5) $\frac{\ell^4}{\ell^5}$ 6) $\frac{k^7}{k^4}$ 7) $\frac{15x^2y^4}{18xy^{10}}$ 8) $\frac{a}{-ax}$
- 9) $\frac{6x^6 - 18x^5}{15x^4}$ 10) $\frac{4a + 4b + 4c}{12}$ 11) $\frac{x^3 + x^2}{x^5}$ 12) $\frac{3x^2}{6x^5 + 9x^4 + 12x^3}$ 13) $\frac{5a - 5b}{5}$ 14) $\frac{6}{3x + 3}$
- 15) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$ 16) $\frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{x^2 + xy}$ 17) $\frac{3a - 12}{a^2 - 9a + 20}$ 18) $\frac{3x^3 - 2x^2 + 6x - 4}{9x^2 - 4}$
- 19) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12}$ 20) $\frac{a^3 - a^2 - 4a + 4}{a^2 - 3a + 2}$ 21) $\frac{a^5 + a^4b + a^4c}{a^5 + a^4b}$ 22) $\frac{6n^2 - 5n + 1}{2n^3 - n^2 - 4n + 2}$
- 23) $\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}$ 24) $\frac{4a^2 + 12a + 5}{2a^2 + 11a + 5}$ 25) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 + 4x + 3}$ 26) $\frac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 2xy - 1}$
- 27) $\frac{a^2 + 7ac + 12c^2}{a^2 + 6ac + 9c^2}$ 28) $\frac{x^2y + axy + ax + a^2}{x^2 + 3ax + 2a^2}$ 29) $\frac{a^2 - ab - 6b^2}{a^4 - 81b^4}$ 30) $\frac{(a+b)^3 + (a+b)^2}{a+b+1}$
- 31) $\frac{k^3 - 8}{k^2 - 4}$ 32) $\frac{x^3 - x}{x^3 - 1}$ 33) $\frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{2x^2 - x - 1}$ *Ruffini, per il numeratore!* 34) $\frac{a^2 - a - 2}{a^3 + 2a^2 - 1}$ *Ruffini, per il denominatore!*

RISULTATI

- 1) $\frac{2a^3}{3c^8}$ 2) $3x$ 3) $\frac{1}{2t^3}$ 4) 1 5) $\frac{1}{\ell}$ 6) k^3 7) $\frac{5x}{6y^6}$ 8) $-\frac{1}{x}$
- 9) $\frac{2x(x-3)}{5}$ 10) $\frac{a+b+c}{3}$ 11) $\frac{x+1}{x^3}$ 12) $\frac{1}{x(2x^2 + 3x + 4)}$ 13) $a - b$ 14) $\frac{2}{x+1}$ 15) $\frac{a+b}{a-b}$
- 16) $\frac{(x+y)^2}{x}$ 17) $\frac{3}{a-5}$ 18) $\frac{x^2 + 2}{3x + 2}$ 19) $\frac{x-2}{x-4}$ 20) $a + 2$ 21) $\frac{a+b+c}{a+b}$ 22) $\frac{3n-1}{n^2-2}$ 23) *Non semplificabile*
- 24) $\frac{2a+5}{a+5}$ 25) $(x-1)(x-3)$ 26) $\frac{1}{x+y-1}$ 27) $\frac{a+4c}{a+3c}$ 28) $\frac{xy+a}{x+2a}$ 29) $\frac{a+2b}{(a^2+9b^2)(a+3b)}$
- 30) $(a+b)^2$ 31) $\frac{k^2+2k+4}{k+2}$ 32) $\frac{x(x+1)}{x^2+x+1}$ 33) $\frac{3x^2+2x+1}{2x+1}$ 34) $\frac{a-2}{a^2+a-1}$

2. MOLTIPLICAZIONI, DIVISIONI E POTENZE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Queste facili operazioni sono illustrate dai seguenti esempi svolti.

$$1) \frac{3a}{4x} \cdot \frac{5b}{x^5} = \frac{15ab}{4x^6} \quad 2) \frac{14a^8}{11x^2} \cdot \frac{33x}{35a^3} \quad \text{Qui, prima di moltiplicare, conviene semplificare: } \rightarrow \frac{\cancel{14}a^{\cancel{8}^5}}{\cancel{11}x^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{33}^3}{\cancel{35}^5a^{\cancel{3}}} = \frac{6a^5}{5x}$$

$$3) \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{a+1}{a+4} = \frac{(a+2)(a+1)}{(a+3)(a+4)} \rightarrow \text{Psst ... dimmi, in confidenza ...}$$

Nel 3), non avevi mica pensato di semplificare le a fra loro, o il 2 col 4? ☹
GUAI! E' errore gravissimo semplificare addendo con addendo!

**IN PRESENZA DI POLINOMI,
PRIMA DI MOLTIPLICARE
conviene
SCOMPORRE IN FATTORI
nella speranza che sia possibile
SEMPLIFICARE**

$$4) \frac{x^2-4}{x^2+10x+25} \cdot \frac{4x+20}{x-2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+5)^2} \cdot \frac{4\cancel{(x+5)}}{\cancel{x-2}} = \frac{4(x+2)}{x+5} \rightarrow$$

$$5) \frac{7a^2}{3b} \cdot \frac{14a^2}{3b^4} = \frac{\cancel{7}^7a^{\cancel{2}^4}}{\cancel{3}^3b} \cdot \frac{\cancel{14}^7b^{\cancel{4}^3}}{\cancel{2}^2\cancel{14}^7a^{\cancel{2}}} = \frac{b^3}{2}$$

$$6) \frac{a^2+a-2}{a^2-a-6} : \frac{a-1}{a-3} = \frac{\cancel{(a-1)}^1\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+2)}^1\cancel{(a-3)}} \cdot \frac{\cancel{a-3}}{\cancel{a-1}} = 1$$

$$7) \frac{4t-4}{t-2} : \frac{t^3-t^2-4t+4}{t+2} = \frac{4(t-1)}{t-2} \cdot \frac{t+2}{t^2(t-1)-4(t-1)} = \frac{4\cancel{(t-1)}}{t-2} \cdot \frac{\cancel{t+2}}{\cancel{(t-1)}^1\cancel{(t+2)}^1(t-2)} = \frac{4}{(t-2)^2}$$

$$8) \frac{3a+3}{a+2} : (a+1)^3 = \frac{3\cancel{(a+1)}}{a+2} \cdot \frac{1}{(a+1)^{\cancel{3}^2}} = \frac{3}{(a+2)(a+1)^2}$$

$$9) \left(\frac{2xy^2z^3}{5a} \right)^4 = \frac{16x^4y^8z^{12}}{625a^4}$$

$$10) \left(\frac{a+b}{a} \right)^3 = \frac{(a+b)^3}{a^3}$$

$$11) \frac{h-1}{h^2+h} : \left(\frac{h^2-h}{h^2} \cdot \frac{h-1}{2} \right) = \frac{h-1}{h(h+1)} : \left[\frac{\cancel{h}^1(h-1)}{h^{\cancel{2}^1}} \cdot \frac{h-1}{2} \right] =$$

$$= \frac{h-1}{h(h+1)} : \frac{(h-1)^2}{2h} = \frac{\cancel{h-1}}{\cancel{h}^1(h+1)} \cdot \frac{2\cancel{h}}{(h-1)^{\cancel{2}^1}} = \frac{2}{(h+1)(h-1)}$$

$$12) \left(\frac{a-b}{2a+2b} \right)^2 : \frac{a^2-3ab+2b^2}{a^2-4ab+4b^2} \cdot 4 =$$

$$= \left[\frac{a-b}{2(a+b)} \right]^2 : \frac{(a-b)\cancel{(a-2b)}}{(a-2b)^2} \cdot 4 = \frac{(a-b)^{\cancel{2}^1}}{\cancel{4}^1(a+b)^2} \cdot \frac{a-2b}{\cancel{a-b}} \cdot \cancel{4} = \frac{(a-b)(a-2b)}{(a+b)^2}$$

$$13) (4x^6-40x^4+36x^2) : (x^3-3x^2-x+3) : (-4x^2) = 4x^2(x^4-10x^2+9) \cdot \frac{1}{x^2(x-3)-(x-3)} \cdot \left(-\frac{1}{4x^2} \right) =$$

$$= \cancel{4x^2}^1(\cancel{x^2-1})^1(x^2-9) \cdot \frac{1}{(x-3)\cancel{(x^2-1)}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{4x^2}} \right) = -\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = -(x+3)$$

$$14) (x-2) : \frac{x^3-x^2-3x+2^*}{x^4+2x^3+x^2-1^{**}} = (x-2) : \frac{(x-2)\cancel{(x^2+x-1)}}{(x^2+x+1)\cancel{(x^2+x-1)}} = \cancel{(x-2)} \cdot \frac{x^2+x+1}{\cancel{x^2+x-1}} = x^2+x+1$$

$$* \quad x^3 - x^2 - 3x + 2$$

$$** \quad x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 =$$

Con Ruffini: $P(2) = 0$

2	1	-1	-3	2
	2	2	2	-2
	1	1	-1	0

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x^2+x-1)$$

$$= (x^2+x)^2 - 1 = (x^2+x+1)(x^2+x-1)$$

ESERCIZI (moltiplicazioni, divisioni, potenze di frazioni algebriche)

- 1) $\frac{9a^3}{b^2} \cdot \frac{b^3}{18a^5}$
- 2) $\frac{2}{3} \cdot \frac{8x}{y} \cdot \frac{9y^2}{16x}$
- 3) $\frac{4}{t} \cdot \frac{t^2}{8} \cdot \frac{1}{ty}$
- 4) $\frac{a^4}{b^4} \cdot \left(-\frac{b^3}{a^3}\right)$
- 5) $\frac{3a}{2b} : \frac{a}{4b^2}$
- 6) $-\frac{2x^3}{x^2y} : \left(-\frac{3}{4y^2}\right)$
- 7) $\frac{a}{b} : \frac{1}{b^2}$
- 8) $\frac{a}{b} : b^2$
- 9) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{x + y}$
- 10) $\frac{a^2 + 4a + 3}{a^2 + 5a + 4} \cdot \frac{2a + 8}{2a + 6}$
- 11) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4}$
- 12) $\frac{q}{q^2 + 1} \cdot \frac{q^3 + q^2 + q + 1}{q^2 + q}$
- 13) $\frac{6a - 3}{a^2 + 2a + 1} \cdot \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{4a^2 - 1}$
- 14) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} \cdot (x + 1)$
- 15) $\frac{a^2 - 7a + 6}{a^2 - 2a} \cdot \frac{a^3 - 2a^2 + a}{a^2 - 9a + 18}$
- 16) $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^6 - 2x^5} \cdot \frac{x^3y}{x^2 - 14x + 49}$
- 17) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{3x^2 + 2x - 1} \cdot \frac{9x^2 - 6x + 1}{3x^4 + 6x^2 + 3}$
- 18) $\frac{a^2 + b^2 + 2ab - 4}{a^2 - 4} \cdot \frac{3a - 6}{a + b - 2} \cdot \frac{a + 2}{3a + 3b + 6}$
- 19) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} : \frac{a^4 - b^4}{a^2 - ab}$
- 20) $\frac{x - 2}{x - 3} : \frac{x^2 - 6x + 8}{3x^2 - 21x + 36}$
- 21) $\frac{3x - 3t}{xy - tx - ty + t^2} : (6y - 6t)$
- 22) $\frac{y^3 - 3y^2 - 2y + 6}{y^2 - 1} : \frac{y^4 - 3y^2 + 2}{y^3 + y^2 - y - 1}$
- 23) $\left(\frac{3a - 2b}{c^2}\right)^3 \cdot \frac{c^4}{9a^2 - 12ab + 4b^2}$
- 24) $\left(-\frac{3x}{y^3}\right)^2 : \left(-\frac{x}{y^2}\right)^3$
- 25) $\left(\frac{2a - b}{2a + b}\right)^4 : (2a - b)^2$
- 26) $(a^2 - b^2)^2 \cdot \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + a + b + ab} \cdot \frac{a^2 + a - b - ab}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$
- 27) $\frac{12n^2 - 7n + 1}{6n^2 - 5n + 1} \cdot \frac{4n^2 - 1}{16n^2 - 1}$
- 28) $\frac{a^2 - 5ab + 6b^2}{a^2 - ab - 6b^2} \cdot \frac{a^2 + ab - 2b^2}{a^2 - 3ab + 2b^2}$
- 29) $\frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 2}{a^2 - a} : \frac{a^2 - a + 1}{a^2 - 2a + 1}$ (Ruffini)
- 30) $\frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \cdot \frac{x - 2}{x + 3}$ (Ruffini)
- 31) $\frac{a^3 - b^3}{a + b} : \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - b^2}$
- 32) $\frac{(x + y)^3 + (x + y)^4}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(x + y)^3}$

RISULTATI

- 1) $\frac{b}{2a^2}$
- 2) $3y$
- 3) $\frac{1}{2y}$
- 4) $-\frac{a}{b}$
- 5) $6b$
- 6) $\frac{8xy}{3}$
- 7) ab
- 8) $\frac{a}{b^3}$
- 9) 1
- 10) 1
- 11) $\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$
- 12) 1
- 13) $\frac{3(a+1)}{2a+1}$
- 14) $x - 1$
- 15) $\frac{(a-1)^3}{(a-2)(a-3)}$
- 16) $\frac{y}{x^2(x-7)}$
- 17) $\frac{3x-1}{3(x^2+1)}$
- 18) 1
- 19) $\frac{a}{a^2+b^2}$
- 20) 3
- 21) $\frac{1}{2(y-t)^2}$
- 22) $\frac{y-3}{y-1}$
- 23) $\frac{3a-2b}{c^2}$
- 24) $-\frac{9}{x}$
- 25) $\frac{(2a-b)^2}{(2a+b)^4}$
- 26) $(a+b)^4$
- 27) $\frac{2n+1}{4n+1}$
- 28) 1
- 29) $\frac{(a-2)(a-1)}{a}$
- 30) 1
- 31) $(a-b)^2$
- 32) $1 + x + y$

3. POLINOMI OPPOSTI

Due polinomi sono detti “**opposti**” quando i termini dell’uno sono gli opposti dei termini dell’altro.

Esempi:

$$\boxed{a-5} \quad e \quad \boxed{-a+5}$$

(per eleganza, si scrive preferibilmente $\boxed{5-a}$ anziché $-a+5$)

$$\boxed{3x^2 - xy + y^2} \quad e \quad \boxed{-3x^2 + xy - y^2}$$

Due polinomi opposti esprimono numeri opposti, nel senso che, se si prendono due polinomi opposti, e alla lettera (o alle lettere) si attribuisce, nei due polinomi, lo stesso valore, si ottengono due risultati opposti.

	$\boxed{a-5}$	$\boxed{-a+5}$
$a=2$	-3	+3
$a=0$	-5	+5
$a=9$	4	-4
$a=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-5=-\frac{11}{2}$	$+\frac{1}{2}+5=+\frac{11}{2}$

D'altronde, mettendo in evidenza il segno $-$, abbiamo:

$$-a+5 = -(a-5)$$

ossia : il numero $-a+5$ è l'opposto del numero $a-5$

E analogamente:

$$-3x^2 + xy - y^2 = -(3x^2 - xy + y^2)$$

- Il **rapporto** (= **quoziente**) fra due polinomi opposti vale sempre -1 , perché il rapporto fra due numeri opposti vale sempre -1 ; d'altronde, mettendo in evidenza il segno $-$, si ottiene:

$$\frac{-a+5}{a-5} = \frac{-\cancel{(a-5)}}{\cancel{a-5}} = -1 \quad \frac{a-5}{-a+5} = \frac{-\cancel{(-a+5)}}{\cancel{-a+5}} = -1$$

- Invece la **somma algebrica** di due polinomi opposti vale 0 , perché la somma algebrica fra due numeri opposti vale, appunto, 0 , e d'altronde:
- $$(-a+5) + (a-5) = \cancel{-a+5} + \cancel{a-5} = 0$$

- Il **prodotto** di due polinomi opposti è uguale all'opposto del quadrato di uno qualsiasi di essi:
- $$(-a+5)(a-5) = -(a-5)(a-5) = -(a-5)^2 = -(-a+5)^2$$

- Se si prendono due numeri opposti e li si eleva allo stesso esponente **PARI**, i risultati saranno **UGUALI**:

$$(+5)^2 = +25$$

$$(-5)^2 = +25$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$$

- ... e invece se si prendono due numeri opposti e li si eleva allo stesso esponente **DISPARI**, i risultati saranno **OPPOSTI**:

$$(+5)^3 = +125$$

$$(-5)^3 = -125$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^5 = +\frac{1}{32}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

Coi polinomi, tutto ciò si traduce in **IMPORTANTISSIME IDENTITÀ** come le seguenti:

$$\begin{aligned} (-a+5)^2 &= (a-5)^2 \\ (-a+5)^3 &= -(a-5)^3 \\ (-a+5)^4 &= (a-5)^4 \\ (-a+5)^5 &= -(a-5)^5 \end{aligned}$$

perché, in dettaglio, $\begin{aligned} (-a+5)^2 &= [-(a-5)]^2 = +(a-5)^2 \\ &" \quad (-a+5)^3 = [-(a-5)]^3 = -(a-5)^3 \\ &" \quad (-a+5)^4 = [-(a-5)]^4 = +(a-5)^4 \\ &" \quad (-a+5)^5 = [-(a-5)]^5 = -(a-5)^5 \end{aligned}$

Possiamo anche dire così (IMPORTANTE!):

- ♥ quando un polinomio è elevato ad esponente **PARI**, è possibile cambiare i segni di tutti i termini e il valore del risultato non cambierà;

- ♥ quando un polinomio è elevato ad esponente **DISPARI**, se cambiamo i segni di tutti i termini il risultato si muterebbe nell'opposto, quindi per ripristinare l'uguaglianza occorre scrivere un segno “ $-$ ” davanti.



$$\begin{aligned} (7-x)^2 &= (x-7)^2 \\ (7-x)^3 &= -(x-7)^3 \end{aligned}$$

COME FARE LE SEMPLIFICAZIONI QUANDO COMPAAIONO POLINOMI OPPOSTI

$$1) \frac{9-x^2}{x^2-5x+6} = \frac{(3+x)(3-x)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x+3)[-(x-3)]}{(x-2)(x-3)} = \frac{-(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = -\frac{x+3}{x-2}$$

o anche, direttamente: $\frac{9-x^2}{x^2-5x+6}$ dato che il quoziente di due polinomi opposti vale -1

$$= \frac{(3+x)\cancel{(3-x)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = -\frac{x+3}{x-2} \quad \heartsuit$$

Volendo, si poteva pure procedere così: $\frac{9-x^2}{x^2-5x+6} = \frac{-(x^2-9)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = -\frac{x+3}{x-2}$

$$2) \frac{(2a-b)\cancel{(-a-b+c)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{(b-a)}\cancel{(a+b-c)}(a-3b)} = \frac{2a-b}{a-3b}$$

$$3) \frac{y^2-3y+2}{(1-y)^2} = \frac{(y-1)(y-2)}{(1-y)^2} = \begin{cases} \text{(NOTA 1)} \quad \frac{\cancel{(y-1)}(y-2)}{(y-1)^2} = \frac{y-2}{y-1} \\ \frac{-(1-y)(y-2)}{(1-y)^2} = -\frac{y-2}{1-y} \quad \text{(NOTA 2)} \quad \frac{y-2}{-(1-y)} = \frac{y-2}{y-1} \end{cases}$$

NOTA 1 Come osservato, due polinomi opposti elevati al quadrato danno lo stesso risultato:
 $(1-y)^2 = (y-1)^2$

NOTA 2 $\heartsuit \quad -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ perché

$$\frac{a}{-b} = \frac{a}{-1 \cdot b} = \frac{1}{-1} \cdot \frac{a}{b} = -1 \cdot \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{-1 \cdot a}{b} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{a}{b} = -1 \cdot \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$4) \frac{(x^2+x-1)^5}{(1-x-x^2)^4} = \begin{cases} \frac{(x^2+x-1)^5}{(x^2+x-1)^4} = x^2+x-1 \\ \frac{-(1-x-x^2)^5}{(1-x-x^2)^4} = -(1-x-x^2) = x^2+x-1 \end{cases}$$

$\heartsuit$ Tieni anche presente che
**in una frazione è lecito
 cambiare i segni
 sia "sopra" che "sotto",
 perché in tal modo
 il valore della frazione non muta:**

$$\frac{4}{5} = \frac{-4}{-5}, \quad \frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}, \quad \frac{3-x}{2-x} = \frac{x-3}{x-2}$$

ESERCIZI (semplificazioni con polinomi opposti)

$$1) \frac{4(3x-2)}{2-3x} \quad 2) \frac{(-a-1)(a-5)}{(a+1)(a-4)} \quad 3) \frac{(x-y+t)(x+y+t)}{(x-y-t)(y-t-x)} \quad 4) \frac{1-x^2}{xy-x-y+1} \quad 5) \frac{a+b}{b+a}$$

$$6) \frac{(a-b)^8}{(b-a)^6} \quad 7) \frac{(b-a)^{11}}{(a-b)^4} \quad 8) \frac{2y-1}{3y-1} \cdot \frac{1-3y}{y(1-2y)} \quad 9) \frac{(2a-5)^3}{a-3} \cdot \frac{3-a}{(5-2a)^2} \quad 10) \frac{(n^2-1)^3}{(1-n)^2}$$

$$11) \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad 12) \frac{(1-x)(2-x)}{(x-1)(x-2)} \quad 13) (a-b)^5(b-a)^4(b-a)^3$$

RISULTATI

$$1) -4 \quad 2) -\frac{a-5}{a-4} = \frac{5-a}{a-4} = \frac{a-5}{4-a} \quad 3) -\frac{x+y+t}{x-y-t} = \frac{x+y+t}{y+t-x} \quad 4) -\frac{x+1}{y-1} = \frac{1+x}{1-y} \quad 5) 1 \quad 6) (a-b)^2$$

$$7) -(a-b)^7 = (b-a)^7 \quad 8) \frac{1}{y} \quad 9) -(2a-5) = 5-2a \quad 10) (n-1)(n+1)^3 \quad 11) -1 \quad 12) 1 \quad 13) -(a-b)^{12}$$

4. SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Quando i denominatori sono NUMERI,
si fa esattamente come con le normali frazioni numeriche:

- A) si scrive, come denominatore comune, il minimo comune multiplo (m.c.m.) dei denominatori
 B) si divide il denominatore comune per ciascun denominatore, e si moltiplica per “ciò che sta sopra”.

$$1) \frac{11x+4}{15} + \frac{x}{10} = \frac{2(11x+4)+3x}{30} = \frac{22x+8+3x}{30} = \frac{25x+8}{30}$$

$$2) \frac{a+2}{6} - \frac{5a+1}{9} + \frac{2a}{3} = \frac{3(a+2) - 2(5a+1) + 6 \cdot 2a}{18} = \frac{3a+6-10a-2+12a}{18} = \frac{5a+4}{18}$$

$$3) \text{ **IMPORTANTE!** } \frac{2x+1}{7} - \frac{x+4}{14} = \frac{2(2x+1) - (x+4)}{14} = \frac{4x+2-x-4}{14} = \frac{3x-2}{14}$$

**Qui il segno – si riferisce a “TUTTO” il polinomio $x+4$,
 che quindi va scritto tra parentesi.
 Ciò si tradurrà poi in un **DOPPIO CAMBIAMENTO DI SEGNO**.**

Quando i denominatori sono MONOMI,
il minimo comun denominatore si ottiene prendendo:

- il m.c.m. dei coefficienti
- **TUTTE le lettere, COMUNI E NON COMUNI,**
 ciascuna **UNA SOLA VOLTA** e con l'esponente più **ALTO**.

$$4) \frac{2a+b}{6a^3} - \frac{a+3b}{9a^2b} + \frac{2}{b^2} = \frac{3b^2(2a+b) - 2ab(a+3b) + 18a^3 \cdot 2}{18a^3b^2} =$$

$$= \frac{\cancel{6ab^2} + 3b^3 - 2a^2b - \cancel{6ab^2} + 36a^3}{18a^3b^2} = \frac{36a^3 - 2a^2b + 3b^3}{18a^3b^2}$$

$$5) \frac{y}{6x^4} - \frac{7}{4x^2y^2} = \frac{2y^2 \cdot y - 7 \cdot 3x^2}{12x^4y^2} = \frac{2y^3 - 21x^2}{12x^4y^2}$$

6) **IMPORTANTE!**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x-2}{x^3} = \frac{x^2 + x - (x-2)}{x^3} = \frac{x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} + 2}{x^3} = \frac{x^2 + 2}{x^3}$$

♥ Si capisce che il m.c.d.
 costruito tramite questa regola
 è la **più semplice espressione**
 che possa essere poi
 comodamente divisa per ciascuno
 dei denominatori di partenza ...
 proprio ciò di cui si ha bisogno
 nel procedimento.

Analogamente all'esempio 3),
 anche in questo numero 6)
il segno – si riferisce a “TUTTO” il
polinomio $x-2$, che quindi va scritto
(o comunque pensato) tra parentesi.
 Ciò si traduce in un **DOPPIO**
CAMBIAMENTO DI SEGNO

Quando i denominatori sono POLINOMI,
PRIMA DI TUTTO LI SI DEVE SCOMPORRE IN FATTORI!
il minimo comun denominatore si otterrà poi con una regola
del tutto analoga a quella sopra enunciata per i monomi.

$$7) \frac{a^2}{6a^3+18a^2+18a+6} + \frac{a+2}{4a^2+8a+4} =$$

$$= \frac{a^2}{6(a^3+3a^2+3a+1)} + \frac{a+2}{4(a^2+2a+1)} =$$

$$= \frac{a^2}{6(a+1)^3} + \frac{a+2}{4(a+1)^2} = \frac{2a^2+3(a+1)(a+2)}{12(a+1)^3} =$$

$$= \frac{2a^2+3(a^2+2a+a+2)}{12(a+1)^3} = \frac{2a^2+3a^2+6a+3a+6}{12(a+1)^3} = \frac{5a^2+9a+6}{12(a+1)^3}$$

APPROFONDIMENTO

*Tutto il discorso delle frazioni
 algebriche richiederebbe
 riflessioni
 ad un livello più avanzato
 per tener conto del fatto che,
 mentre nelle frazioni “ordinarie”
 numeratore e denominatore
 sono numeri interi, qui le lettere
 possono assumere anche valori
 frazionari o irrazionali.*
 Un'analisi paziente,
 ma troppo “specialistica” per
 poter rientrare in questo corso,
 mostrerebbe che le regole da noi
 enunciate sono effettivamente
 valide anche in questo ambito
 più generale.

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \frac{x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \\
 & = \frac{x(x-1) - (x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - 2\cancel{x} - 1 + \cancel{x^2} - 2\cancel{x} + 1}{(x+1)(x-1)^2} = \\
 & = \frac{x^2 - 5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x(x-5)}{(x+1)(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

- 9) **IMPORTANTE!**
Qui ritroviamo la solita particolarità
del **segno** – **che si riferisce a TUTTO un polinomio.**

$$\begin{aligned}
 & \frac{3b+4}{b-1} - \frac{4b+3}{b(b-1)} = \frac{b(3b+4) - (4b+3)}{b(b-1)} = \frac{3b^2 + \cancel{4b} - \cancel{4b} - 3}{b(b-1)} = \\
 & = \frac{3b^2 - 3}{b(b-1)} = \frac{3(b^2 - 1)}{b(b-1)} = \frac{3(b+1)\cancel{(b-1)}}{b\cancel{(b-1)}} = \frac{3(b+1)}{b}
 \end{aligned}$$

$$10) \quad \frac{x+4}{x+3} - \frac{x}{x+6} = \frac{(x+6)(x+4) - x(x+3)}{(x+3)(x+6)} = \frac{\cancel{x^2} + 4x + 6x + 24 - \cancel{x^2} - 3x}{(x+3)(x+6)} = \frac{7x+24}{(x+3)(x+6)}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} + \frac{4ab}{(a+b)(a-b)} = \\
 & = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2 + 4ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{\cancel{a^2} - 2\cancel{ab} + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} - 2\cancel{ab} + \cancel{b^2} + 4ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{0}{(a+b)(a-b)} = 0
 \end{aligned}$$

- 12) **IMPORTANTE!**
Anche nell'espressione seguente compare la particolarità
del **segno** – **riferito ad un polinomio.**

$$\begin{aligned}
 & \frac{x+3}{x^2-3x+2} - \frac{x+2}{x^2-4x+3} - \frac{1}{x^2-5x+6} = \\
 & = \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \\
 & = \frac{(x-3)(x+3) - (x-2)(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\
 & = \frac{\cancel{x^2} - 9 - \cancel{x^2} + 4 - x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)} = -\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad & \frac{1}{4n^2-2n} + \frac{1}{n^3-2n^2+n} - \frac{1}{4n^3-6n^2+2n} = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n^2-2n+1)} - \frac{1}{2n(2n^2-3n+1)} = \\
 & = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n(2n^2-2n-n+1)} = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n[2n(n-1)-(n-1)]} = \\
 & = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n(n-1)(2n-1)} = \frac{(n-1)^2 + 2(2n-1) - (n-1)}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \\
 & = \frac{n^2 - 2n + 1 + 4n - 2 - n + 1}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \frac{\cancel{n}(n+1)}{2\cancel{n}(2n-1)(n-1)^2} = \frac{n+1}{2(2n-1)(n-1)^2}
 \end{aligned}$$

- 1) $\frac{a+b}{8} + \frac{a-b}{6}$ 2) $\frac{x+1}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x-1}{2}$ 3) $4x - \frac{x+3}{3} + \frac{x+2}{2}$ 4) $\frac{n}{5} - \frac{n+3}{10}$
- 5) $\frac{x-1}{x^3} - \frac{5x^2+1}{6x^4} + \frac{3}{4x^2}$ 6) $\frac{a}{15c} + \frac{b+1}{10c^2}$ 7) $\frac{a+3}{a^2} - \frac{1}{a}$ 8) $\frac{3}{x} + \frac{2x+1}{x^2} - \frac{4x^2+x-1}{x^3}$
- 9) $\frac{5}{4ax} - \frac{a-1}{3a^2}$ 10) $\frac{1}{xy} + \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ 11) $\frac{a+b}{12a^2b^2} - \frac{a-b}{15a^3b} + \frac{2a}{b^4}$ 12) $\frac{x+1}{x} - \frac{x^2+x+1}{x^2}$
- 13) $\frac{2}{a^2b} - \frac{a-b}{ab^3} - \frac{a+b}{a^2b^2}$ 14) $\frac{1}{2t} - \frac{1-4t^2}{8t^3}$ 15) $\frac{a}{5} - \frac{2}{a}$ 16) $\frac{b}{2} + \frac{2}{b} + \frac{1}{2b} + 2b$
- 17) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1$ 18) $k + \frac{1}{k}$ 19) $\frac{r+1}{r} - r - 1$ 20) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$
- 21) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 22) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}$ 23) $1 + \frac{a+b}{a}$ 24) $1 - \frac{a+b}{a}$
- 25) $\frac{y}{12x^2} - \frac{x^2+2y^2}{18xy^2}$ 26) $a+2 - \frac{4}{b}$ 27) $\frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab}$ 28) $a + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2}$
- 29) $\frac{1}{2a} + \frac{a+1}{2a^2} - \frac{a+2}{2a^3}$ 30) $\frac{2x+1}{4x} - \frac{3x-1}{6x}$ 31) $\frac{a+1}{a} + \frac{a-1}{a}$ 32) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a}$
- 33) $a^{-1} + a^{-2} + a^{-3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = \dots$ 34) $(3x)^{-2} + 3x^{-2} = \frac{1}{(3x)^2} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} = \dots$ 35) $a^2 + a + 1 + a^{-1} + a^{-2}$
- 36) $3c^{-3} - 2c^{-2}$ 37) $\frac{x-2}{3x^2-3} + \frac{x}{2x^2-4x+2}$ 38) $\frac{b^2}{b^2-6b+9} - \frac{b+1}{b-3}$ 39) $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a-1}$
- 40) $\frac{1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2} - \frac{x-1}{x^6+2x^5+x^4}$ 41) $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} + \frac{4xy}{x^2-y^2}$ 42) $\frac{5}{t+2} - \frac{t+1}{t^2+5t+6}$
- 43) $\frac{x+y}{6x-6y} - \frac{x^2+y^2}{4x^2+4y^2-8xy}$ 44) $\frac{1}{y+3} - \frac{2y-7}{y^2-9}$ 45) $\frac{a}{3a+2} + \frac{7a+2}{9a^2-4}$
- 46) $\frac{1}{2a^2-4a+2} - \frac{a+1}{a^3-a^2+2a-2}$ 47) $\frac{3}{q} + \frac{q}{q+1}$ 48) $\frac{6h}{3h+5} + \frac{10}{3h+5}$
- 49) $\frac{1}{(a+b+c)^3} - \frac{a-b+c}{(a+b+c)^4}$ 50) $\frac{a+b}{a-b} + 2$ 51) $\frac{a+b}{a-b} - 1$ 52) $\frac{2a+1}{a^2-3a+2} + \frac{a+2}{2a^2-3a+1}$
- 53) $\frac{a-x}{ax^2+x^3} + \frac{1}{a^2+2ax+x^2}$ 54) $\frac{y+4}{y^2-7y+12} - \frac{y-3}{y^2-16}$ 55) $\frac{x+y}{2x-2y} + \frac{x-y}{2x+2y}$
- 56) $\frac{x}{x^3+x^2+x+1} - \frac{1}{x^4+2x^2+1}$ 57) $\frac{1}{r+s+1} - \frac{1}{r+s}$ 58) $\frac{2}{w+3} - \frac{1}{w+2}$
- 59) $\frac{x+y}{x^2y+xy^2-12y^3} - \frac{x-3y}{x^2y+8xy^2+16y^3}$ 60) $\frac{2t^2}{(t+2)^3} - \frac{t}{(t+2)^2} - \frac{1}{t+2}$ 61) $\frac{1}{2t^2-5t+2} - \frac{1}{4t^2-1}$
- 62) $\frac{3}{x-y} + x+y$ 63) $a+7 - \frac{a^2}{a+7}$ 64) $-\frac{a+b-1}{a+b} + 1$ 65) $\frac{1-2c}{1-c} - \frac{2-c^2}{1-c^2} - 1$
- 66) $\frac{2a}{a^2-5a+6} - \frac{7a+6}{a^3-2a^2-9a+18} - \frac{a-2}{a^2-9}$ 67) $\frac{2}{n^2-3n+2} - \frac{n}{n^3-n^2-4n+4} - \frac{n}{n^4-5n^2+4}$
- 68) $\frac{5}{k^2-9k+18} - \frac{k-3}{k^2-6k} - \frac{10k^2-k^3-18}{k^4-9k^3+18k^2}$ 69) $\frac{1}{x^3-6x^2+11x-6} - \frac{1}{x^3+4x^2+x-6}$ *Scomposizioni con Ruffini*
- 70) $\frac{1}{a^3-a^2-a-2} - \frac{1}{a^3-1}$ *Ruffini* 71) $\frac{3y}{2y^3+7y^2+7y+2} - \frac{5}{4y^2+6y+2}$ *Ruffini*

RISULTATI

- 1) $\frac{7a-b}{24}$
- 2) $\frac{7x-3}{12}$
- 3) $\frac{25x}{6} = \frac{25}{6}x$
- 4) $\frac{n-3}{10}$
- 5) $\frac{11x^2-12x-2}{12x^4}$
- 6) $\frac{2ac+3b+3}{30c^2}$
- 7) $\frac{3}{a^2}$
- 8) $\frac{x^2+1}{x^3}$
- 9) $\frac{15a-4ax+4x}{12a^2x}$
- 10) $\frac{1+2y+3x}{xy}$
- 11) $\frac{120a^4+5a^2b^2+ab^3+4b^4}{60a^3b^4}$
- 12) $-\frac{1}{x^2}$
- 13) $\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}$
- 14) $\frac{8t^2-1}{8t^3}$
- 15) $\frac{a^2-10}{5a}$
- 16) $\frac{5b^2+5}{2b}$
- 17) $\frac{x^2+y^2+xy}{xy}$
- 18) $\frac{k^2+1}{k}$
- 19) $\frac{1-r^2}{r}$
- 20) $\frac{bcx+acy+abz}{abc}$
- 21) $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$
- 22) $\frac{x+y+z}{xyz}$
- 23) $\frac{2a+b}{a}$
- 24) $-\frac{b}{a}$
- 25) $\frac{3y^3-2x^3-4xy^2}{36x^2y^2}$
- 26) $\frac{ab+2b-4}{b}$
- 27) 1
- 28) $\frac{a^3+2a+3}{a^2}$
- 29) $\frac{a^2-1}{a^3}$
- 30) $\frac{5}{12x}$
- 31) 2
- 32) $\frac{2}{a}$
- 33) $\frac{a^2+a+1}{a^3}$
- 34) $\frac{28}{9x^2}$
- 35) $\frac{a^4+a^3+a^2+a+1}{a^2}$
- 36) $\frac{3-2c}{c^3}$
- 37) $\frac{5x^2-3x+4}{6(x+1)(x-1)^2}$
- 38) $\frac{2b+3}{(b-3)^2}$
- 39) $\frac{4a}{(2a+1)(2a-1)}$
- 40) $\frac{1}{x^4(x+1)^3}$
- 41) $\frac{2(x+y)}{x-y}$
- 42) $\frac{4t+14}{(t+2)(t+3)}$
- 43) $\frac{-x^2-5y^2}{12(x-y)^2} = -\frac{x^2+5y^2}{12(x-y)^2}$
- 44) $\frac{4-y}{(y+3)(y-3)}$
- 45) $\frac{a+1}{3a-2}$
- 46) $\frac{4-a^2}{2(a-1)^2(a^2+2)}$
- 47) $\frac{q^2+3q+3}{q(q+1)}$
- 48) 2
- 49) $\frac{2b}{(a+b+c)^4}$
- 50) $\frac{3a-b}{a-b}$
- 51) $\frac{2b}{a-b}$
- 52) $\frac{5(a+1)}{(a-2)(2a-1)}$
- 53) $\frac{a^2}{x^2(a+x)^2}$
- 54) $\frac{14y+7}{(y-3)(y-4)(y+4)}$
- 55) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
- 56) $\frac{x^3-1}{(x^2+1)^2(x+1)}$
- 57) $-\frac{1}{(r+s+1)(r+s)}$
- 58) $\frac{w+1}{(w+2)(w+3)}$
- 59) $\frac{11x-5y}{(x-3y)(x+4y)^2}$
- 60) $-\frac{6t+4}{(t+2)^3}$
- 61) $\frac{t+3}{(t-2)(2t-1)(2t+1)}$
- 62) $\frac{3+x^2-y^2}{x-y}$
- 63) $\frac{14a+49}{a+7}$
- 64) $\frac{1}{a+b}$
- 65) $-\frac{2+c}{(1+c)(1-c)}$
- 66) $\frac{a+5}{(a+3)(a-3)}$
- 67) $\frac{n+2}{(n-2)(n+1)(n-1)}$
- 68) $\frac{1}{k^2}$
- 69) $\frac{10x}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)}$
- 70) $\frac{1}{(a-1)(a-2)(a^2+a+1)}$
- 71) $\frac{y-10}{2(y+1)(y+2)(2y+1)}$

5. QUANDO IL SEGNO “MENO” SI RIFERISCE A TUTTO UN POLINOMIO

Occhio!

Ci si imbatte abbastanza sovente in situazioni nelle quali il segno – è riferito ad un polinomio nella sua interezza.

In questi casi è facile sbagliare!



**Quando il segno – si riferisce a “tutto” un polinomio,
il polinomio stesso va scritto fra parentesi;
se si preferisce, il passaggio si può saltare,
cambiando di segno però TUTTI i termini del polinomio (TUTTI, NON SOLO IL PRIMO!)**

a) $\frac{2a}{a+b} - \frac{a+7b}{3a+3b} = \frac{2a}{a+b} - \frac{a+7b}{3(a+b)} = \frac{6a - (a+7b)}{3(a+b)} = \frac{6a-a-7b}{3(a+b)} = \frac{5a-7b}{3(a+b)}$

b) $\frac{4x}{x-2} - 1 = \frac{4x - (x-2)}{x-2} = \frac{4x-x+2}{x-2} = \frac{3x+2}{x-2}$

c) $2 - \frac{a-b}{a+b} = \frac{2a+2b - (a-b)}{a+b} = \frac{2a+2b-a+b}{a+b} = \frac{a+3b}{a+b}$

d) $\frac{a}{2a+3} - \frac{1}{4a+5} = \frac{a(4a+5) - (2a+3)}{(2a+3)(4a+5)} = \frac{4a^2+5a-2a-3}{(2a+3)(4a+5)} = \frac{4a^2+3a-3}{(2a+3)(4a+5)}$

e) $\frac{x+8}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+8}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+8 - (x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{\cancel{x}+8-\cancel{x}+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{11}{(x-2)(x-3)}$

f) $\frac{1}{c^2-6c+8} - \frac{1}{c^2-8c+12} = \frac{1}{(c-2)(c-4)} - \frac{1}{(c-2)(c-6)} =$
 $= \frac{c-6 - (c-4)}{(c-2)(c-4)(c-6)} = \frac{\cancel{c}-6-\cancel{c}+4}{(c-2)(c-4)(c-6)} = \frac{-2}{(c-2)(c-4)(c-6)} = -\frac{2}{(c-2)(c-4)(c-6)}$

ESERCIZI

1) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$	2) $\frac{t}{t-5} - \frac{t^2+1}{t^2-t-20}$	3) $\frac{x+y+z}{x-y+z} - 1$	4) $\frac{a^2+12}{a^2+4} - 1$
5) $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}$	6) $\frac{3x+1}{3x+2} - \frac{1}{3x-1}$	7) $\frac{2}{a+b-c} - \frac{1}{a-b+c}$	8) $\frac{4}{m+3} - 1$
9) $\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^2-2ab+b^2}$	10) $n - \frac{n^2+1}{n+1}$	11) $\frac{3}{x^2+1-2x} - \frac{1}{x-1}$	12) $\frac{y+2}{2y-5} - \frac{y^2-6y+11}{2y^2-9y+10}$
13) $\frac{1}{x} - \frac{x^2+x+1}{x^2}$	14) $1 - \frac{a+2b}{a+b+1}$	15) $\frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p^2+3p+2}$	16) $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$

RISULTATI

1) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$	2) $\frac{4t-1}{(t-5)(t+4)}$	3) $\frac{2y}{x-y+z}$	4) $\frac{8}{a^2+4}$
5) $\frac{2y}{x^2-y^2}$	6) $\frac{9x^2-3x-3}{(3x+2)(3x-1)}$	7) $\frac{a-3b+3c}{(a+b-c)(a-b+c)}$	8) $\frac{1-m}{m+3}$
9) $-\frac{2b}{(a+b)(a-b)^2}$	10) $\frac{n-1}{n+1}$	11) $\frac{4-x}{(x-1)^2}$	12) $\frac{3}{y-2}$
13) $\frac{-x^2-1}{x^2} = -\frac{x^2+1}{x^2}$	14) $\frac{1-b}{a+b+1}$	15) $\frac{p^2+p+1}{(p+1)(p-1)(p+2)}$	16) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

6. QUANDO COMPAGNANO POLINOMI OPPOSTI A DENOMINATORE

In questi casi, **prima di fare il denominatore comune**, converrà ... sbarazzarsi dei polinomi opposti!

Esempio I
$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2-a^2} + \frac{a}{(b-a)^3} = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b+a)(b-a)} + \frac{a}{(b-a)^3}$$

A questo punto, non sarebbe assolutamente “astuto” fare subito il denominatore comune!

In tal modo, infatti, si andrebbe incontro a calcolacci pesantissimi ...

Facciamo piuttosto in modo che non compaiano più coppie di polinomi opposti:
potremo scegliere di ricondurci dappertutto al blocco $(a-b)$, oppure, in alternativa, al blocco $(b-a)$.

1° modo:
privilegiando
il blocco
 $(a-b)$

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b+a)(b-a)} + \frac{a}{(b-a)^3} = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b+a)[- (a-b)]} + \frac{a}{[- (a-b)]^3} =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{-(a+b)(a-b)} + \frac{a}{-(a-b)^3} = \frac{1}{(a-b)^2} - \frac{1}{(a+b)(a-b)} - \frac{a}{(a-b)^3} = \text{ecc. ecc.}$$

2° modo:
privilegiando
il blocco
 $(b-a)$

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b+a)(b-a)} + \frac{a}{(b-a)^3} = \frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{(b+a)(b-a)} + \frac{a}{(b-a)^3} = \text{ecc. ecc.}$$

NOTA

NOTA - Sappiamo (vedi il paragrafo sui polinomi opposti) che $(b-a)^2 = (a-b)^2$:

$$(b-a)^2 = [- (a-b)]^2 = [-1 \cdot (a-b)]^2 = (-1)^2 \cdot (a-b)^2 = +1 \cdot (a-b)^2 = (a-b)^2$$

Nella pratica, i passaggi intermedi si possono saltare: tutto sta nel capire, in definitiva, se il segno davanti alla frazione debba essere cambiato oppure debba restare inalterato.

Esempio II

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-3} - \frac{1}{(1-a)(2-a)} - \frac{1}{(1-a)(2-a)(3-a)} =$$

$$= \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-3} - \frac{1}{-(a-1)[- (a-2)]} - \frac{1}{-(a-1)[- (a-2)][- (a-3)]} =$$

$$= \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-3} - \frac{1}{+(a-1)(a-2)} - \frac{1}{-(a-1)(a-2)(a-3)} =$$

$$= \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-3} - \frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)} = \text{ecc. ecc.}$$

Quest'ultimo esempio mostra che:

- ♥ **SE IN UN PRODOTTO SI CAMBIANO DI SEGNO 2 fattori**
(più in generale: UN NUMERO PARI DI FATTORI), IL PRODOTTO RESTA INVARIATO;
- ♥ **SE IN UN PRODOTTO SI CAMBIANO DI SEGNO 3 fattori**
(o, più in generale, UN NUMERO DISPARI DI FATTORI: 1, 3, 5, 7 ...),
IL PRODOTTO CAMBIA DI SEGNO, per cui, PER SALVAGUARDARE
L'UGUAGLIANZA, OCCORRERÀ SCRIVERE DAVANTI UN SEGNO “-”

ESERCIZI

1) $\frac{x}{a-1} + \frac{y}{1-a}$ 2) $\frac{a}{2x-1} - \frac{b}{1-2x}$ 3) $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{6-2x}$ 4) $\frac{1}{(x-1)^5} + \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^3}$

5) $\frac{3}{x^2-3x+2} - \frac{2}{2x-x^2} + \frac{1}{x-x^2}$ 6) $\frac{x}{(a-1)(a-2)(a-3)} + \frac{y}{(a-1)(a-2)(3-a)} + \frac{z}{(a-1)(2-a)(3-a)} + \frac{w}{(1-a)(2-a)(3-a)}$

RISULTATI

1) $\frac{x-y}{a-1}$ opp. $\frac{y-x}{1-a}$ 2) $\frac{a+b}{2x-1}, -\frac{a+b}{1-2x}$ 3) $\frac{x-1}{2(x-3)^2}, \frac{x-1}{2(3-x)^2}$ 4) $\frac{-x^2+3x-1}{(x-1)^5}, \frac{x^2-3x+1}{(1-x)^5}$

5) $\frac{4}{(x-1)(x-2)}$ 6) $\frac{x-y+z-w}{(a-1)(a-2)(a-3)}$

♥ Utile osservare che **una frazione resta invariata se si cambiano i segni sia del numeratore che del denominatore**

7. FRAZIONI ALGEBRICHE: LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

Per non appesantire troppo l'argomento, abbiamo posticipato fino a questo punto una questione che comunque va trattata.

Ben sappiamo che in una frazione il denominatore “deve essere diverso da 0”, in quanto **la divisione per 0 è una operazione “non eseguibile”**.

Ricordiamone brevemente il motivo.

La divisione, in matematica, è intesa come l'operazione inversa della moltiplicazione.

Il motivo per cui, ad esempio, si ha $28 : 4 = 7$,

è che il 7, se venisse moltiplicato per 4, restituirebbe il 28: $7 \cdot 4 = 28$.

Insomma, $a : b = c \leftrightarrow c \cdot b = a$.

Consideriamo ora l'operazione $5 : 0$.

$$5 : 0 = ?$$

Dovremmo trovare un numero che moltiplicato per 0 dia 5 ... ma non lo troveremo mai!

Un numero siffatto non esiste, perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà sempre e soltanto 0.

Allora l'operazione $5 : 0$ è IMPOSSIBILE, è priva di risultato; non c'è nessun numero che possa “pretendere di esserne il risultato”.

Ovviamente, lo stesso ragionamento varrebbe se al posto del 5 considerassimo il 4, o il 37,238 oppure il -72 .

L'operazione particolarissima $0 : 0$ si comporta invece in modo profondamente diverso.

Essa ci chiede di trovare un numero che moltiplicato per 0 (il *secondo* 0) dia 0 (il *primo* 0).

Sennonché, questa volta, *qualsiasi* numero andrebbe bene, *qualsiasi* numero potrebbe “pretendere di essere il risultato” di questa operazione, perché *qualsiasi* numero moltiplicato per 0 in effetti dà 0.

Se viene da me il numero 15, lui può dirmi: “il risultato dell'operazione $0 : 0$ sono io! Infatti, $15 \cdot 0 = 0$ ”.

Ma anche il numero 9 può avere questa pretesa, di andar bene come risultato dell'operazione $0 : 0$, perché $9 \cdot 0 = 0$; e pure i numeri $3/5$; $29,71$; $-8,3$; ecc. ecc. ecc. sarebbero adeguati come risultati.

Questa volta ci troviamo di fronte a ... problemi di “abbondanza”.

L'operazione è INDETERMINATA, vale a dire:

non ha un risultato ben determinato, ma potrebbe averne infiniti,

dato che qualunque numero avrebbe i requisiti per esserne il risultato.

Ricapitolando, le due operazioni

♪ (numero diverso da 0) : 0

♪ 0 : 0

sarebbero, rispettivamente,

♪ IMPOSSIBILE (= nessun risultato)

♪ e INDETERMINATA (= infiniti risultati);

per cui non si tratta di “vere” operazioni:

la comunità matematica le considera come operazioni “non eseguibili”, “illegal operations” (“illegal” da tradurre come “illecite”).

Osserviamo, infine, che se lo 0, in una divisione, comparisse esclusivamente a *dividendo*,

l'operazione sarebbe normalissima e avrebbe 0 come risultato:

$$0 : 4 = 0 \quad (\text{infatti } \underbrace{0}_{\text{risul-}} \cdot \underbrace{4}_{\text{divi-}} = \underbrace{0}_{\text{tato}} \quad \underbrace{0}_{\text{ore}} \quad \underbrace{0}_{\text{divi-}} \quad \underbrace{0}_{\text{dendo}}).$$

Tutto ciò, insieme col fatto che una frazione $\frac{p}{q}$ equivale sostanzialmente alla divisione $p : q$,

ci porta all'importantissimo specchietto seguente ♥ :

$(\text{numero diverso da } 0) : 0,$	$\frac{\text{numero diverso da } 0}{0}$	operazione	IMPOSSIBILE	operazioni "non eseguibili"
$0 : 0,$	$\frac{0}{0}$	operazione	INDETERMINATA	
$0 : (\text{numero diverso da } 0),$	$\frac{0}{\text{numero diverso da } 0}$	operazione	NORMALE (con risultato 0)	

Di fronte a un'espressione contenente frazioni con lettere a denominatore, dobbiamo allora tenere presente che la medesima *non* ha significato per *qualsiasi* valore delle lettere coinvolte, *ma solo* per quei valori delle lettere che rendono *tutti i suoi denominatori diversi da 0*.

- Facciamo un esempio. Consideriamo l'espressione $\frac{a-1}{a-2} + \frac{a+3}{a+4} + \frac{1}{5a+6}$.

Per quali valori della lettera a esisterà (= sarà definita, avrà significato)?

Beh, esisterà per i valori di a tali che sia $\begin{cases} a-2 \neq 0 \\ a+4 \neq 0 \\ 5a+6 \neq 0 \end{cases}$, ossia per $\begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq -4 \\ a \neq -6/5 \end{cases}$

Osserviamo che queste CONDIZIONI DI ESISTENZA, contenenti il simbolo " $\neq$ " (= "diverso da"), si "trattano" in modo del tutto simile alle equazioni, semplicemente conservando sempre il simbolo " $\neq$ " al posto del simbolo " $=$ ". Ad esempio:

$$5a+6 \neq 0$$

$$5a \neq -6 \text{ (trasporto, cambiando di segno)}$$

$$a \neq -\frac{6}{5} \text{ (divido per 5)}$$

- Un altro esempio. Quali sono le condizioni di esistenza (C.E.) dell'espressione $\frac{b+1}{2b} + \frac{1}{b+2} + \frac{b-1}{(2b-1)^2}$?

CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.):

$$\begin{cases} 2b \neq 0 \\ b+2 \neq 0 \\ (2b-1)^2 \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} b \neq 0 \text{ (dividendo per 2)} \\ b \neq -2 \text{ (trasportando)} \\ 2b-1 \neq 0 \text{ (un quadrato è } \neq \text{ da 0 se e solo se lo è la sua base); } 2b \neq 1; b \neq 1/2 \end{cases}$$

- Ancora: quali sono le condizioni di esistenza (C.E.) dell'espressione $\frac{1}{c-3d} + \frac{1}{c+d-1}$?

CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.):

$$\begin{cases} c-3d \neq 0 \\ c+d-1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Di norma, quando in una condizione sono presenti due lettere, se ne isola una a scelta.} \\ \text{Noi, in particolare, abbiamo desunto che, affinché l'espressione abbia significato,} \\ \text{c deve essere diversa sia dal triplo di d, sia dall'opposto di d aumentato di 1.} \\ \text{Ad esempio, nel nostro caso, la coppia } c=12, d=4, \text{ nella quale c è il triplo di d,} \\ \text{renderebbe priva di significato l'espressione in esame).} \end{array}$$

- Terminiamo questa rassegna di esempi con: $\frac{1}{10x^2-90} + \frac{1}{x^3-x^2-6x}$

Qui, per capire "da cosa deve essere diversa x ", scomponiamo innanzitutto in fattori!

Ogni fattore così ottenuto dovrà essere diverso da 0, affinché non si annulli nessun denominatore ...

$$\frac{1}{10x^2-90} + \frac{1}{x^3-x^2-6x} = \frac{1}{10(x^2-9)} + \frac{1}{x(x^2-x-6)} = \frac{1}{10(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x(x-3)(x+2)}$$

$$\text{Quindi, C.E.: } \begin{cases} x+3 \neq 0, x \neq -3 \\ x-3 \neq 0, x \neq 3 \\ x \neq 0 \\ x+2 \neq 0, x \neq -2 \end{cases}$$

(brevemente: $x \neq \pm 3, x \neq 0, x \neq -2$)

Osserviamo che il fattore costante 10 non viene in alcun modo coinvolto, non contenendo la lettera ed essendo $\neq 0$ "per sua natura".

ESERCIZI Scrivi le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche che seguono.

$$\begin{array}{llllll} 1) \frac{a+1}{a-1} + \frac{a-2}{a+2} & 2) \frac{b-3}{4b} + \frac{2}{b+5} & 3) \frac{x}{3x-1} + \frac{x-4}{2x+5} & 4) \frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{2x+6} & 5) \frac{q}{p} + \frac{p-1}{3q-2} & 6) \frac{y-1}{2} - \frac{y+1}{3y} \\ 7) \frac{w+3}{3w^2} + \frac{2}{5(w-1)^3} & 8) \frac{1}{a^2-a-12} - 2 \cdot \frac{a+5}{a^2-a} & 9) \frac{a-b}{a-2b} + \frac{a}{a-3b-1} & 10) \frac{x-3}{xy} + \frac{y}{4x-y-1} & 11) \frac{x-2y}{(4x+y)^2} \end{array}$$

RISPOSTE 1) $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b \neq 0 \\ b \neq -5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \neq 1/3 \\ x \neq -5/2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} p \neq 0 \\ q \neq 2/3 \end{cases}$ 6) $y \neq 0$ 7) $\begin{cases} w \neq 0 \\ w \neq 1 \end{cases}$

8) $a \neq 4, a \neq -3, a \neq 0, a \neq 1$ 9) $\begin{cases} a \neq 2b \\ a \neq 3b+1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y \neq 4x-1 \text{ oppure } x \neq \frac{y+1}{4} \end{cases}$ 11) $y \neq -4x \text{ oppure } x \neq -\frac{y}{4}$

8. ESPRESSIONI CON TUTTE LE OPERAZIONI: ESEMPI SVOLTI

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \left(\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2-4} \right) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) = \\
 & = \left[\frac{x+2}{x(x-2)} + \frac{1}{(x+2)(x-2)} \right] \cdot \frac{\cancel{x}+4-\cancel{x}-1}{(x+1)(x+4)} = \\
 & = \frac{(x+2)^2+x}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \\
 & = \frac{x^2+4x+4+x}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \\
 & = \frac{x^2+5x+4}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \\
 & = \frac{(x+1)\cancel{(x+4)}}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+4)}} = \\
 & = \frac{3}{x(x+2)(x-2)}
 \end{aligned}$$

SUGGERIMENTI PREZIOSI:

- ♥ **Ordine! Scrivi bene!**
- ♥ **Rileggi dopo ogni passaggio!**
- ♥ **Prima di ogni passaggio, domandati:**

“cosa devo fare,
cosa mi conviene fare
a questo punto?”

RICORDA:

- ♥ **Il simbolo “=” che chiude una riga deve essere poi riscritto anche all’inizio della riga successiva**
- ♥ **Quando si fa il denominatore comune, ottenendo così un’unica linea di frazione, è inutile (anche se non sarebbe sbagliato) mettere questa frazione fra parentesi (a meno che, naturalmente, la frazione sia poi da elevare a potenza)**

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \left(\frac{x+5}{x-2} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x^2-7x+10} - \frac{1}{x^2-25} \right) + 25 = \\
 & = \frac{\cancel{x}+5-\cancel{x}+2}{x-2} : \left[\frac{1}{(x-2)(x-5)} - \frac{1}{(x+5)(x-5)} \right] + 25 = \\
 & = \frac{7}{x-2} : \frac{\cancel{x}+5-\cancel{x}+2}{(x-2)(x-5)(x+5)} + 25 = \frac{7}{x-2} : \frac{7}{(x-2)(x-5)(x+5)} + 25 = \\
 & = \frac{\cancel{7}}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{(x-2)(x-5)(x+5)}{\cancel{7}} + 25 = x^2 - 25 + 25 = x^2
 \end{aligned}$$



Ti ricordo la
**IMPORTANTISSIMA
RACCOMANDAZIONE**
fatta a pag. 244:

IN UNA FRAZIONE,
sarebbe
errore madornale
semplificare
addendo con addendo
oppure
addendo con fattore:

**SI PUO' SOLO
SEMPLIFICARE
FATTORE
CON
FATTORE.**

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \left(\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} \right) \cdot \left(\frac{a}{4x} + \frac{x}{4a} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(a+x)^2 - (a-x)^2}{(a-x)(a+x)} \cdot \frac{a^2 + x^2 + 2ax}{4ax} = \\
 & = \frac{\cancel{a}^2 + 2ax - \cancel{a}^2 + 2ax - \cancel{x}^2}{(a-x)(a+x)} \cdot \frac{(a+x)^2}{4ax} = \frac{\cancel{4ax}}{(a-x)(\cancel{a+x})} \cdot \frac{(a+x)^2}{\cancel{4ax}} = \frac{a+x}{a-x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{12}{4a^2-9} \cdot \left(\frac{a}{3a+3} - \frac{1}{2a+2} \right) = \frac{12}{(2a+3)(2a-3)} \cdot \left[\frac{a}{3(a+1)} - \frac{1}{2(a+1)} \right] = \\
 & = \frac{\cancel{12}^2}{(2a+3)(\cancel{2a-3})} \cdot \frac{\cancel{2a-3}}{\cancel{6}(a+1)} = \frac{2}{(2a+3)(a+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \left(\frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{1}{a^2+7a+12} \right) \cdot \frac{a^2+6a+8}{2} = \left[\frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} \right] \cdot \frac{(a+2)(a+4)}{2} = \\
 & = \frac{a+4+a+2}{(\cancel{a+2})(a+3)(\cancel{a+4})} \cdot \frac{(\cancel{a+2})(\cancel{a+4})}{2} = \frac{2a+6}{2(a+3)} = \frac{2(\cancel{a+3})}{2(\cancel{a+3})} = 1
 \end{aligned}$$

$$6) \left(\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a}{a^2-1} \right) \cdot \frac{2a+2}{2a+1} = \left[\frac{a+1}{a(a-1)} - \frac{a}{(a+1)(a-1)} \right] \cdot \frac{2(a+1)}{2a+1} =$$

$$= \frac{(a+1)^2 - a^2}{a(a-1)(a+1)} \cdot \frac{2(a+1)}{2a+1} = \frac{a^2 + 2a + 1 - a^2}{a(a-1)} \cdot \frac{2}{2a+1} = \frac{2a+1}{a(a-1)} \cdot \frac{2}{2a+1} = \frac{2}{a(a-1)}$$

$$7) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \cdot \frac{x^5 + x^3}{x^4 - 1} \cdot (x-1) = \frac{x+1}{x^3} \cdot \frac{x^3(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)} \cdot (x-1) = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \cdot (x-1) = 1$$

$$8) \left(\frac{1}{b^2+2b} + 2 \cdot \frac{1}{b^3-2b^2} \right) \cdot \frac{b^2+4}{b^2-4} = \left[\frac{1}{b(b+2)} + \frac{2}{b^2(b-2)} \right] \cdot \frac{b^2+4}{(b+2)(b-2)} =$$

$$= \frac{b(b-2) + 2(b+2)}{b^2(b+2)(b-2)} \cdot \frac{(b+2)(b-2)}{b^2+4} = \frac{b^2 - 2b + 2b + 4}{b^2(b^2+4)} = \frac{b^2+4}{b^2(b^2+4)} = \frac{1}{b^2}$$

$$9) \left(\frac{a-b}{a-2b} - \frac{a+2b}{a+b} \right) (a^2 - 3ab + 2b^2) = \frac{a^2 - b^2 - a^2 + 4b^2}{(a-2b)(a+b)} \cdot (a-b)(a-2b) = \frac{3b^2(a-b)}{a+b}$$

$$10) \frac{\frac{a-b}{b} - \frac{a}{a} + b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{b+a}{ab}} + b = \frac{(a+b)(a-b)}{ab} \cdot \frac{ab}{b+a} + b = a - b + b = a$$

$$11) \frac{\frac{a+b}{a-b} + 1}{\frac{a+b}{a-b} - 1} - \frac{a}{b} = \frac{\frac{a+b+a-b}{a-b}}{\frac{a+b-a-b}{a-b}} - \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} - \frac{a}{b} = 0$$

$$12) (y+2)^2 \cdot \frac{\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}}{\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+3}} = (y+2)^2 \cdot \frac{\frac{y+2-y-1}{(y+1)(y+2)}}{\frac{y+3+y+1}{(y+1)(y+3)}} = (y+2)^2 \cdot \frac{1}{\frac{(y+1)(y+2)}{2y+4}} =$$

$$= (y+2)^2 \cdot \frac{1}{(y+1)(y+2)} \cdot \frac{(y+1)(y+3)}{2(y+2)} = \frac{y+3}{2}$$

$$13) \frac{1 - \frac{13}{x^2} + \frac{36}{x^4}}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^4}}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x^2-4)(x^2-9)}{x^4} \cdot \frac{1}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}{x^4} \cdot \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x+2)(x+3)}{x^4}$$

♥ Nell'esercizio qui a fianco e nel successivo, occhio alle modalità dei "capovolgimenti"!

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$$

$$14) \frac{1 + \frac{y}{x}}{x-y} - \frac{1 - \frac{y}{x}}{x+y} = \frac{\frac{x+y}{x}}{x-y} - \frac{\frac{x-y}{x}}{x+y} = \frac{x+y}{x} \cdot \frac{1}{x-y} - \frac{x-y}{x} \cdot \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{x(x-y)} - \frac{x-y}{x(x+y)} =$$

$$= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x(x+y)(x-y)} = \frac{4xy}{x(x+y)(x-y)} = \frac{4y}{(x+y)(x-y)}$$

- Le seguenti tre espressioni presentano somme algebriche di frazioni algebriche, con **polinomi opposti a denominatore**.
In casi di questo genere, è sempre conveniente,
prima di fare il denominatore comune, sbarazzarsi dei fastidiosi polinomi opposti,
facendo in modo che compaia dappertutto sempre lo stesso polinomio.

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \frac{a^2}{(a-2)^3} + \frac{1}{2-a} + \frac{1}{(2-a)^4} = \\
 & = \frac{a^2}{(a-2)^3} + \frac{1}{-(a-2)} + \frac{1}{(a-2)^4} = \\
 & \quad \text{NOTA} \\
 & = \frac{a^2}{(a-2)^3} - \frac{1}{a-2} + \frac{1}{(a-2)^4} = \\
 & = \frac{a^2(a-2) - (a-2)^3 + 1}{(a-2)^4} = \\
 & = \frac{a^3 - 2a^2 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) + 1}{(a-2)^4} = \\
 & = \frac{\cancel{a^3} - 2a^2 - \cancel{a^3} + 6a^2 - 12a + 8 + 1}{(a-2)^4} = \\
 & = \frac{4a^2 - 12a + 9}{(a-2)^4} = \frac{(2a-3)^2}{(a-2)^4}
 \end{aligned}$$

NOTA

Sappiamo che

$$(2-a)^4 = (a-2)^4$$

per via dell'esponente pari:

due numeri opposti,

se elevati allo stesso esponente PARI,
danno risultati uguali;

d'altronde,

$$(2-a)^4 = [- (a-2)]^4 = + (a-2)^4$$

$$\begin{aligned}
 16) \quad & \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = \\
 & = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{-(a-b)(b-c)} + \frac{1}{-(a-c) \cdot [- (b-c)]} = \\
 & = \frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} = \\
 & = \frac{\cancel{b} - \cancel{c} - \cancel{a} + \cancel{c} + \cancel{a} - \cancel{b}}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad & \left[\frac{3}{x^2-1} + \frac{x}{(1-x)^3} \right] \cdot \frac{1}{2x-1} = \left[\frac{3}{(x+1)(x-1)} + \frac{x}{-(x-1)^3} \right] \cdot \frac{1}{2x-1} = \\
 & = \left[\frac{3}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{(x-1)^3} \right] \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{3(x-1)^2 - x(x+1)}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \\
 & = \frac{3x^2 - 6x + 3 - x^2 - x}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{2x^2 - 7x + 3}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \\
 & = \frac{2x^2 - 6x - x + 3}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{2x(x-3) - (x-3)}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \\
 & = \frac{(x-3)(\cancel{2x-1})}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{\cancel{2x-1}} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

□ Nella seguente espressione compare una **semplificazione fra polinomi opposti**.

$$18) \quad \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{3}{x}}(9-x^2) = \frac{\cancel{x} \cdot \frac{x+1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x+2}{x}}{\frac{x-3}{x}}(3+x)(3-x) =$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{x-3}} \cdot (3+x) \frac{-1}{(3-x)} = -(x+1)(x+2)(x+3)$$

□ Nell'esempio che segue è necessario, per fattorizzare un polinomio, applicare il **metodo di Ruffini**. La scomposizione, in questi casi, va fatta a parte e successivamente reinserita nell'espressione.

$$19) \quad \left(\frac{1}{2x^3+x^2-5x+2} - \frac{1}{x^2+x-2} \right) \left(\frac{1}{2} - 2x^2 \right) =$$

$$= \left[\frac{1}{(x-1)(x+2)(2x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+2)} \right] \cdot \frac{1-4x^2}{2} =$$

$$= \frac{1-2x+1}{(x-1)(x+2)(2x-1)} \cdot \frac{(1+2x)(1-2x)}{2} =$$

$$= \frac{2-2x}{(x-1)(x+2)(2x-1)} \cdot \frac{(1+2x)(1-2x)}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{(1-x)}}{(x-1)(x+2)(\cancel{2x-1})} \cdot \frac{(1+2x)(\cancel{1-2x})}{\cancel{2}} = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

Divisori del termine noto : $\pm 1, \pm 2$

Divisori del 1° coeff. : $\pm 1, \pm 2$

Possibili zeri razionali : $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$

$$P(1) = 2 + 1 - 5 + 2 = 0, \text{ OK}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ & & 2 & 3 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 =$$

$$= (x-1)(2x^2 + 3x - 2) =$$

$$= (x-1)(2x^2 + 4x - x - 2) =$$

$$= (x-1)[2x(x+2) - (x+2)] =$$

$$= (x-1)(x+2)(2x-1)$$

□ E terminiamo la rassegna di esempi con due espressioni che contengono **potenze**.

$$20) \quad \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} \right)^2 (x^2-4)^3 = \left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-2}{x}} \right)^2 (x+2)^3 (x-2)^3 =$$

$$= \left(\frac{x-1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{x-2} \right)^2 (x+2)^3 (x-2)^3 =$$

$$= \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^2 (x+2)^3 (x-2)^3 =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{(\cancel{x-2})^2} (x+2)^3 (x-2)^{\cancel{3}} = (x-1)^2 (x+2)^3 (x-2)$$

$$21) \quad \left(\frac{1}{3a} - \frac{a+1}{2a} + 1 \right) \cdot \frac{6a^{-1}}{9-a^{-2}} =$$

$$= \frac{2-3(a+1)+6a}{6a} \cdot \frac{6 \cdot \frac{1}{a}}{9-\frac{1}{a^2}} =$$

$$= \frac{2-3a-3+6a}{6a} \cdot \frac{\frac{6}{a}}{\frac{9a^2-1}{a^2}} =$$

$$= \frac{\cancel{3a-1}}{\cancel{6} \cdot \cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a^2}}{(3a+1)(\cancel{3a-1})} = \frac{1}{3a+1}$$

Dal sito
www.themathpage.com
di
Lawrence Spector

Example

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$$

Solution.

These denominators have no common factors.

Therefore, the LCM of denominators is their product.

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{2x - (x-1)}{x(x-1)} = \frac{2x - x + 1}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)}$$

[LCM = Lowest Common Multiple]

Note:

The entire $x-1$ is being subtracted. Therefore, we write it in parentheses, and its signs change.

9. ESERCIZI SULLE FRAZIONI ALGEBRICHE

(clicca sulla freccia, se presente, per la correzione; risultati a pagina 265)

- 1) $\frac{1}{2} + \left(\frac{2x+1}{2x+4} - \frac{x^2+1}{x^2+4x+4} \right) \cdot \left(x+4 + \frac{4}{x} \right) \Rightarrow$
- 2) $\left(\frac{1}{a^2+3a+2} - \frac{1}{a^2+4a+3} \right) (a^2+5a+6) \Rightarrow$
- 3) $\left(\frac{a}{a^2-1} - \frac{a}{a^2+2a+1} \right) \cdot \frac{a^3+a^2-a-1}{a} \Rightarrow$
- 4) $\left(\frac{x}{x+4} + \frac{x+4}{x} - 2 \right) \left(\frac{x+4}{4} - 1 \right) \Rightarrow$
- 5) $\left(\frac{t+1}{t^2-t} + \frac{t-1}{t^2+t} \right) \cdot \frac{t^2-1}{2} - \frac{1}{t}$
- 6) $\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+3} \right) \cdot \frac{a^2+4a+3}{a+2}$
- 7) $\left(\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2-1} \right) \cdot (x^3-x) + 1$
- 8) $\left(\frac{1}{y^2-4y} - \frac{8}{y^3-4y^2} + \frac{16}{y^4-4y^3} \right) : \left(\frac{1}{y^2} - 2 \cdot \frac{2}{y^3} \right) \Rightarrow$
- 9) $\left(\frac{n-2}{3n^2-12n+9} - \frac{1}{6n-18} \right) (6n-6) \Rightarrow$
- 10) $\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} \right) \cdot (x^2+x)$
- 11) $\frac{b-1}{b+1} \cdot \left(\frac{2b}{b^2+b-2} - \frac{1}{b+2} \right)$
- 12) $\frac{x^2-9}{x+4} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+5} \right) : 2$
- 13) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{2} \right) : \left(\frac{1}{a^2+2a+1} + \frac{1}{2a+2} \right)$
- 14) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$
- 15) $2 \left(\frac{x}{2x-4} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot \frac{x-2}{x+2} - 1$
- 16) $\left(\frac{1}{x^3-x^2-x+1} - \frac{1}{x^3+x^2-x-1} \right) (x^2-1)^2 \Rightarrow$
- 17) $\left(\frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4} \right) \cdot \left(\frac{a}{16} - \frac{1}{a} \right)$
- 18) $\left(a \cdot \frac{5a+4}{4a^3-4a^2-a+1} - \frac{2a+1}{2a^2-3a+1} \right) \cdot (4a^2-1) \Rightarrow$
- 19) $\left(\frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} \right) \cdot \frac{x^2+2x}{x+1}$
- 20) $\left(\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} \right) \cdot (x^2-4x+3)$
- 21) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) - 2 \cdot \frac{y}{x-y}$
- 22) $\left(\frac{1}{4a-8} - \frac{1}{6a-12} \right) \cdot (12a^2-12a-24) - a \Rightarrow$
- 23) $\left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x^2+x-6} \right) \cdot (x^3-2x^2-9x+18)$
- 24) $\frac{\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1}}{\frac{1}{a+1} - 1} \Rightarrow$
- 25) $\frac{4ab}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}} + b^2$
- 26) $\frac{b^3}{b^6+b^4+b^2+1} - \frac{1}{b^3+b^2+b+1} \cdot (b^8-1) + 1 \Rightarrow$
- 27) $\frac{\frac{a+1}{a-1} + 1}{\frac{a+1}{a-1} - 1}$
- 28) $\frac{\frac{1}{a-1} - \frac{1}{b-1}}{a-b} (ab-a-b+1)$
- 29) $\frac{(a+2b)^2}{\frac{a}{a+4b} + \frac{b}{a+3b}}$
- 30) $\frac{a+b + \frac{1}{a-b}}{a-b + \frac{1}{a+b}}$
- 31) $\frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} + 2}{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - 2}$
- 32) $\frac{a^2+2ab+b^2+c^2+2ac+2bc}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}}$
- 33) $\frac{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} \cdot \frac{a}{b} - 1}{\frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} \cdot \frac{a}{b} - 1}$
- 34) $\frac{\frac{a+b}{a-b} - \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2}{\frac{a+b}{a-b} - 1}$
- 35) $\frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1}{\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1}$
- 36) $\left[\frac{(a-b)^2}{2} + ab \right] : \left(\frac{a-b}{2a+2b} + \frac{b^2}{a^2+b^2+2ab} \right)$

$$37) \frac{2}{x+1} - \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} \right) \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$39) \frac{3}{t^4+5t^2+4} - \frac{2}{t^4+4t^2+3} - \frac{1}{t^4+7t^2+12}$$

$$41) \left(\frac{3x-1}{2} + \frac{2}{3x-1} - 2 \right) : (3x-3)^2$$

$$43) \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-4} \right) \right]^2 \left(\frac{x^2+8x+16}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$45) \frac{\frac{n+5}{n^2+2n-8} - \frac{n+4}{n^2+3n-10}}{6n+27}$$

$$47) \frac{1 - \frac{a^2}{x^2}}{1 + \frac{a^2}{x^2} + 2\frac{a}{x}} - 1$$

$$49) \frac{1}{4+t} + \frac{1}{4-t} - \frac{24-t^2}{16-t^2}$$

$$51) \frac{1}{2x^2-7x+6} + \frac{1}{2-x}$$

$$53) \frac{\left(\frac{a-1}{a-3} - \frac{a-8}{a-6} \right) (a^2-9a+18)}{9-2a}$$

$$55) 1 + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{n}{n^2-1} \right) (n^4-2n^2+1) \Rightarrow$$

$$57) \left(\frac{1}{a^2-2ab-3b^2} + \frac{1}{2b^2+ab-a^2} \right) \cdot (6ab^2-5a^2b+a^3) \Rightarrow$$

$$38) \frac{1}{\left(\frac{x}{x^2-3xy+2y^2} + \frac{1}{2y-x} \right) \left(\frac{x}{y} - 2 \right)} + y \Rightarrow$$

$$40) \frac{\left(\frac{1}{t+1} + 1 \right)^2}{1 - \frac{1}{t+1}} \cdot (t^3+3t^2+2t)$$

$$42) 3 \left(\frac{x}{3x-6} - \frac{x}{x^2-x-2} \right) \cdot (x^2+x^1+x^0+x^{-1}) - x^2 \Rightarrow$$

$$44) \left(\frac{1}{a^2-2a+1} - \frac{1}{a^2+2a+1} \right) \cdot \frac{a^4-2a^2+1}{4} \Rightarrow$$

$$46) \frac{a + \frac{1}{a} + 1}{a + \frac{1}{a} - 1} \cdot \frac{a^4+a}{a^4-a} + \frac{a^4-3a^3}{a^4-a^3}$$

$$48) \left(\frac{1}{4a+8} + \frac{1}{6a-12} \right) \cdot \frac{12a^2-48}{2-5a}$$

$$50) \left[6 \left(\frac{\frac{1}{2}a}{a-b} + \frac{\frac{1}{3}a}{b-a} \right) + \frac{ab^3}{a^4-ab^3} \right] \cdot \left(a+b - \frac{ab}{a+b} \right) \Rightarrow$$

$$52) \frac{\frac{y+1}{y-1} + \frac{2}{(1-y)^2} + 1}{1-y+y^2} \Rightarrow$$

$$54) \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

$$56) 1 + \left[\frac{1}{(n-1)(n^2+n+1)} - \frac{n}{n^4-1} \right] \left[n^3 + (n^2+1)^2 + n \right] \Rightarrow$$

$$58) k \cdot \frac{1 - \frac{k^2+6}{k^2+5k+6}}{\frac{k-2}{k+3} - \frac{k-3}{k+2}}$$



“A Mesa Creek Valley rancher's daughter en route to school”

La ragazza in groppa al suo asinello si congeda dalla madre per andare a scuola. Colorado, anno 1898.

Foto di George B. Sudworth
(the National Archives and Records Administration NARA)

$$59) \left(\frac{1}{t^2 - 4t + 3} - \frac{1}{3t^2 - 2t - 1} \right) : \left(1 + \frac{3}{t-1} \right) \cdot (3t^3 + t^2 - 27t - 9) - 6$$

$$60) \left(\frac{1 - \frac{5}{a^2} + \frac{4}{a^4}}{1 - \frac{10}{a^2} + \frac{9}{a^4}} - 1 \right) \cdot \frac{a^2 - 9}{5}$$

$$61) (ab - 1) \left(\frac{b+1}{a^2b - ab - a + 1} - \frac{a+1}{ab^2 - ab - b + 1} \right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ab}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}$$

$$62) \frac{1}{2 \cdot \frac{x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x-2}} - 2$$

$$63) \left(\frac{x+1}{2x^2 - 3x + 1} - \frac{3}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{(x-2)^2}$$

$$64) \left[1 - \left(1 - \frac{5}{t} + \frac{6}{t^2} \right) \cdot \left(\frac{t}{t-2} \right)^2 \right] (t-2)$$

$$65) \left(\frac{x+2}{x^3 - 8} - \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \right) \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \text{Una differenza di cubi si scompone con la formula } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$66) \frac{\frac{a-b}{a+b} - \frac{1}{a^2 - b^2}}{a - (b-1)} \cdot (a^2 - b^2) + b + 1$$

$$67) \frac{4 - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1+5}{a^2} + 4 \frac{b^4}{a^4}}{1 + 4 \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1+5}{a^2} - \frac{b^4}{a^4}}$$

$$68) \left(\frac{1}{x^2y^2 + 1} - \frac{1}{x^2y^2 + 2} \right) \cdot (x^4y^4 + 3x^2y^2 + 2) - 1$$

$$69) \left(1 - \frac{3a^2 - 4a + 1}{a^2 - 3a + 2} \right) (2 - a) - 2a$$

$$70) \left(\frac{1}{m^2 - 4m + 3} - \frac{1}{m^2 - 3m + 2} \right) (m^3 - 6m^2 + 11m - 6) \quad \text{Ruffini}$$

$$71) \text{ Semplifica: } \frac{2x^3 + 7x^2 + 4x - 4}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

$$72) \frac{a^4 + 2a^3 - 2a - 1}{a^3 - 3a - 2} - 1 \Rightarrow$$

$$73) \frac{a^4 + a^3 + 4a}{a^4 + 4a^3 + 4a^2} \Rightarrow$$

$$74) \left(\frac{b}{a^2 - b^2 - 2b - 1} + \frac{1}{a^2 + ab + a} \right) \left(\frac{a^2}{b+1} - a \right) \Rightarrow \text{differenza di quadrati}$$

$$75) \left(1 + \frac{1+\frac{1}{x}}{x} \right) \left(1 + \frac{1-\frac{1}{x}}{x} \right) : (x^4 + 2x^3 + x^2 - 1)$$

$$76) \left(x \cdot \frac{x^3 - 5x^2 + 11x - 10}{2x^2 - 3x - 2} - 1 \right) \cdot \left(-2 - \frac{3}{x-1} \right)^2 - 2x^2 \Rightarrow$$

$$77) \frac{(x+1)^4 - (x-1)^4}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - 1}$$

$$78) \left(\frac{1}{x^2 + x - y^2 + y} + \frac{1}{y^2 - x^2 - 1 - 2x} \right) \cdot (x^2 + 2xy + y^2 + x + y)$$

$$79) \frac{\frac{b+1}{b^{-1} + b^{-2}} + \frac{2-b}{1-b}}{\frac{b^{-3} + b^{-4}}{b^{-3} + b^{-4}} - 1}$$

$$80) \left[\frac{b^4}{a(a-b)^2} - a \cdot \left(\frac{a}{b-a} \right)^2 \right] : (a^3 - a^{-1}b^4) + \frac{1}{(a-b)^2} \Rightarrow$$

$$81) \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(1-x)^3} \right] \cdot \frac{(1-x)^2}{x^3 + 1}$$

$$82) \frac{\frac{1+k^2}{1-k^2} + 2 \cdot \frac{k^2}{k^4 - 1}}{2k \cdot \frac{k^3}{1-k^4} + 1}$$

$$83) \frac{\frac{2}{a^3 - a^2} - \frac{2}{a^3 - a}}{2} \cdot (a^4 - a^2)$$

$$84) \left(\frac{2b^2}{4b^2 - 1} - 4 \cdot \frac{\frac{b}{2} - 0,25}{4b + 2} \right) \cdot \left(\frac{1}{4b-1} - 1 \right)$$

$$85) \frac{(12 - 12c^2) \cdot \left[(3c-3)^{-1} - (6c+6)^{-1} \right]}{c+3}$$

$$86) d^2 \cdot \left(\frac{2}{d^2 - 8d + 15} + \frac{1}{2d + 15 - d^2} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{d} \right)^2 \right] - 1$$

$$87) \frac{\frac{1-m}{9-m^2}}{\frac{2}{(m-2)(m+2)-5} + \frac{1}{m+3}}$$

$$88) \frac{1}{p} \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^2 - \frac{4}{p^2 - 2p + 1} + \frac{p+1}{p^3 - p} + \frac{1}{1-p}$$

RISULTATI degli esercizi sulle frazioni algebriche

- 1) 3 2) $\frac{1}{a+1}$ 3) 2 4) $\frac{4}{x+4}$ 5) t 6) 2 7) $2x$ 8) 1 9) 1 10) $-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$
 11) $\frac{1}{b+2}$ 12) $\frac{x-3}{x+5}$ 13) $(a+1)^2$ 14) $a+b$ 15) 0 16) 2 17) 1 18) $a+1$ 19) 1
 20) 2 21) 1 22) 1 23) 1 24) $\frac{4}{a-1}$ 25) a^2 26) b^3 27) a 28) -1 29) $(a+4b)(a+3b)$
 30) $\frac{a+b}{a-b}$ 31) $\frac{a^2}{b^2}$ 32) $abc(a+b+c)$ 33) -1 34) $\frac{b+a}{b-a}$ 35) 0 36) $(a+b)^2$ 37) 0
 38) x 39) 0 40) $(t+2)^3$ 41) $\frac{1}{2(3x-1)}$ 42) 1 43) $\frac{(x+4)^2}{(x-4)^2}$ 44) a 45) $\frac{1}{3(n-2)(n+4)(n+5)}$
 46) 2 47) $-\frac{2a}{x+a}$ 48) -1 49) -1 50) $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ 51) $-\frac{2}{2x-3} = \frac{2}{3-2x}$ 52) $\frac{2}{(y-1)^2}$ 53) -2
 54) $-\frac{1}{(x-1)^2}$ 55) n^2 56) $\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}$ 57) $\frac{ab}{a+b}$ 58) k^2 59) $2t$ 60) 1 61) 1 62) x
 63) 1 64) 1 65) $\frac{1}{x^2+2x+4}$ 66) a 67) 1 68) 0 69) 1 70) 1 71) $\frac{2x-1}{x-2}$ (Ruffini; racc. parz.)
 72) $\frac{a^2-a+1}{a-2}$ 73) $\frac{a^2-a+2}{a(a+2)}$ 74) $\frac{a-1}{a+b+1}$ 75) $\frac{1}{x^4}$ 76) $-(x+1)$ 77) $-8x(x+1)(x-1)$ 78) $\frac{1}{x-y+1}$
 79) 1 80) 0 81) $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$ 82) 1 83) 1 84) $-\frac{1}{2b+1}$ 85) -2 86) $\frac{14}{d-5}$ 87) 1 88) 0

SIMULAZIONE DI VERIFICA 1 con correzione se clicchi sulla freccia ➡**TEMPO:** 60' **PUNTEGGIO:** 1 punto per esercizio, sufficienza con 4 punti

- 1) $\frac{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}} - \frac{b}{a}$ 2) $\frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1$ 3) $\frac{\frac{k-2}{k+2} + \frac{k+2}{k-2} + 2}{\frac{k-2}{k+2} + \frac{k+2}{k-2} - 2} - \left(\frac{k}{2}\right)^2$
 4) $\left(\frac{2}{x-y} + \frac{x}{xy-y^2} + \frac{y}{x^2-xy}\right) \cdot \frac{x^2y-xy^2}{(x+y)^2}$ 5) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{t^3+t^2-t-1} - \frac{1}{t^3+3t^2+3t+1}\right) (t^2-1)^2$
 6) $\left[\frac{x+2y}{x^2-5xy+6y^2} + \frac{x-2y}{(x+2y)(3y-x)}\right] \cdot (4y^2-x^2)$ 7) Semplifica: $\frac{x^3+4x^2+4x+1}{x^3+8x^2+8x+1}$

SIMULAZIONE DI VERIFICA 2 con correzione se clicchi sulla freccia ➡**TEMPO:** 60' **PUNTEGGIO:** 1 punto per esercizio, sufficienza con 4 punti

- 1) $\left(\frac{2}{a+b} + \frac{2}{a-b} - \frac{3a}{a^2-b^2}\right) \left(a - \frac{b^2}{a}\right)$ 2) $\frac{\frac{b+3}{b-3} - \frac{b-3}{b+3} - 2}{1 - \frac{b-3}{b+3}} \cdot \frac{b}{b-3}$ 3) $\frac{a\left(\frac{a+1}{a^2-a} + \frac{a-1}{a^2+a}\right)}{2}$
 4) $\left(\frac{1}{a^2+a-2} - \frac{1}{2a^2-a-1}\right) \cdot (2a^2+5a+2)$ 5) $\left(\frac{1}{x^2+4x-12} - \frac{1}{x^2+12x+36}\right) \cdot \frac{x^2-36}{16} \cdot (2x-4)$
 6) $\left[\frac{2x-5}{x^3-2x^2-x+2} - \frac{x-1}{(1+x)(2-x)}\right] \cdot \frac{(1-x)^2}{x+2}$ 7) Semplifica: $\frac{x^3+2x^2-1}{xy^2+x^2+y^2-1}$

10. IDENTITA' CON FRAZIONI ALGEBRICHE (risposte a pag. 269)

- 1) Verifica che, qualunque sia il numero a , diverso da 0, +1, -1, sussiste la relazione

$$\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a-1}}{1 + \frac{1}{a-1}} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+1}$$

- 2) Verifica che vale l'identità $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{-1} = -\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-1}$

- 3) La somma dei reciproci di due numeri non nulli qualsiasi è sempre uguale al rapporto fra la loro somma e il loro prodotto. Rappresenta questo enunciato con una formula, e dimostrarne la validità.

- 4) Dimostra che se si prendono tre interi consecutivi e si divide il loro prodotto per la loro somma, il risultato è uguale alla terza parte del prodotto fra il più piccolo e il più grande.

- 5) Dopo aver controllato che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned}\frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} &= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \\ \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} &= \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \\ \frac{6 \cdot 3}{4 \cdot 5} &= \left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right) \\ &\dots\end{aligned}$$

scrivi l'uguaglianza generale che sembra potersi ricavare dalla sequenza, e dimostra che è valida sempre.

$$\begin{aligned}6) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{1+1} &= \frac{1}{1 \cdot (1+1)} + \frac{2}{1+1} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} &= \frac{1}{2 \cdot (2+1)} + \frac{2}{2+1} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3+1} &= \frac{1}{3 \cdot (3+1)} + \frac{2}{3+1} \\ &\dots\end{aligned}$$

Scrivi l'uguaglianza generale che si può ipotizzare dalla sequenza, e dimostra che è valida sempre.

- 7) Verifica l'identità $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

Cosa diventa se facciamo la sostituzione $n \rightarrow n-1$?

- 8) Verifica l'identità $\frac{ab}{(a+1)(b+1)} = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right)\left(1 - \frac{1}{b+1}\right)$ e riscrivila nel caso particolare $b = a$.

- 9) [University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition](#) 1990

I) Determina il valore del prodotto delle frazioni seguenti:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} \cdot \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} \cdot \dots \cdot \frac{\frac{1}{98} - \frac{1}{99}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}}$$

- a) $1/2$ b) 2 c) 0.02 d) 50 e) $1/100$

II) In generale, quanto vale l' n -esima frazione in gioco, fra quelle moltiplicate?

III) Se le frazioni moltiplicate sono n , quanto vale il loro prodotto?

- 10) [University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition](#) 1990

You are told that certain unknown positive integers p, q, r, s satisfy $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$.

Which of the following statements must be true?

- a) $\frac{p}{s} = \frac{r}{q}$ b) $\frac{p}{r} = \frac{s}{q}$ c) $\frac{p}{q} = \frac{p+r}{q+s}$ d) $\frac{r}{s}$ doesn't equal $\frac{r-p}{s-q}$ e) None of a), b), c), d)

- 11) Per ultimare un determinato lavoro in 1 giorno ci vogliono

a apprendisti, o in alternativa e lavoratori esperti.

In quanti giorni porterebbe a termine quel lavoro una coppia formata da 1 apprendista e 1 esperto?

a) $\frac{1}{a+e}$ b) $\frac{1}{ae}$ c) $\frac{a+e}{ae}$ d) $\frac{ae}{a+e}$

- 12) Considera le seguenti frazioni algebriche e stabilisci per quali valori di x ciascuna di esse risulta

(1) non definita, in quanto corrisponderebbe ad una operazione impossibile

(2) non definita, in quanto corrisponderebbe ad una operazione indeterminata

(3) uguale a 0

	(1): imposs.	(2): indet.	(3): uguale a 0
$\frac{x+12}{x-21}$	$x=21$	/	$x=-12$
$\frac{4x-2}{2x-1}$			
$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}$			
$\frac{3x+1}{3x}$			
$\frac{3x}{3x+1}$			
$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$			
$\frac{9x+27}{x^2+6x+9}$			

RIPASSO ($a \neq 0$):

$\frac{a}{0}$ IMPOSS. "illegal operations"
 $\frac{0}{0}$ INDET.
 $\frac{0}{a} = 0$ operazione normalissima

Frazione = divisione, e
 divisione = operazione inversa
 della moltiplicazione

$$a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$$

1 : 0, 1/0 è IMPOSSIBILE
 perché non c'è alcun numero
 che moltiplicato per 0 dia 1
 0 : 0, 0/0 è INDETERMINATA
 perché qualsiasi numero
 moltiplicato per 0 dà 0

- 13) C'è qualche piccola differenza fra le due espressioni algebriche $\frac{1}{1+\frac{2}{x-4}}$ e $\frac{x-4}{x-2}$?

- 14) Sarà mai possibile esprimere la frazione algebrica $\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)}$

come somma algebrica di due frazioni aventi

a denominatore rispettivamente $x+3$ e $x-5$, e a numeratore due numeri?

Vediamo.

$$\begin{aligned}\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} \\ \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{A(x-5) + B(x+3)}{(x+3)(x-5)} \\ \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{Ax - 5A + Bx + 3B}{(x+3)(x-5)} \\ \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{Ax + Bx - 5A + 3B}{(x+3)(x-5)} \\ \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{(x+3)(x-5)}\end{aligned}$$

Affinché l'ultima uguaglianza sia una identità occorre e basta che sia $\begin{cases} A+B=5 \\ -5A+3B=-41 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A=7 \\ B=-2 \end{cases}$

quindi in definitiva la risposta alla domanda iniziale è affermativa: si avrà $\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{7}{x+3} - \frac{2}{x-5}$

Ora determina tu i valori delle costanti A, B, C negli esercizi seguenti:

a) $\frac{9x+4}{(2x-3)(x+1)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{x+1}$ b) $\frac{20t+11}{16t^2-1} = \frac{A}{4t+1} + \frac{B}{4t-1}$ c) $\frac{5-6x}{x(3x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x+2}$
 d) $\frac{2x^2+14x+8}{x(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4}$ e) $\frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$

- 15) Dalla formula di Gauss $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ se ne possono ricavare altre, assai interessanti.

Ad esempio, è abbastanza semplice (vuoi provarci?) dedurre da questa formula che

a) la somma $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ dei primi n numeri pari a partire da 2 vale $\frac{n(n+1)}{2}$

b) mentre la somma $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ dei primi n numeri dispari vale n^2 .

Un po' più laborioso è invece determinare il valore della somma $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ dei quadrati dei primi n interi positivi.

Partiamo dall'identità $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

e portiamola nella forma $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

Ora scriviamo le varie uguaglianze che si ottengono dalla precedente dando a x i valori: 1, 2, 3, ...

$$x = 1: \quad 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$x = 2: \quad 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$x = 3: \quad 4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

$$x = 4: \quad 5^3 - 4^3 = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1$$

$$\dots$$

$$x = n: \quad (n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Sommando membro a membro queste uguaglianze si ha:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ addendi}}$$

quindi, tenuto conto della formula di Gauss,

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

da cui l'identità

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dots \text{ (scrivi tu il secondo membro!)}$$

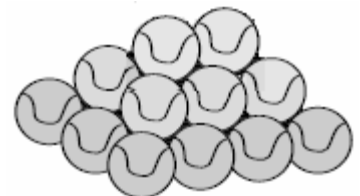
c) Verifica che in questo modo si ottiene, dopo qualche passaggio, la formula

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d) Operando in modo analogo, dimostra la formula $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
dalla quale si trae immediatamente la bella relazione

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

- 16) La figura qui a fianco mostra alcune palline da tennis sistemate su più strati sovrapposti: quello più in alto è formato da 2 palline soltanto, quello appena sotto da 6 palline, quello sotto ancora da 12, ecc. Se si avessero n strati, le palline dello strato inferiore sarebbero $n(n+1)$; ... ma quante palline si avrebbero nella pila, in totale?



- 17) I numeri “quadrati” sono

$$1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16, \quad 5^2 = 25, \quad \dots$$

I seguenti numeri si dicono invece “triangolari”:

$$1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \quad \dots$$

Serviti della formula di Gauss per dimostrare il seguente enunciato:

“ciascun numero quadrato è uguale alla somma del numero triangolare di ugual posto, e del numero triangolare che precede quest'ultimo” (es.: $16 = 10 + 6$)



- 18) [University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition](#) 1991

The average (media) of the first 100 000 odd (dispari) positive integers is

- a) 100 000 b) 1 000 000 c) 10 000 000 d) 100 000 000 e) 1 000 000 000

- 19) Spunto preso da
- [Olimpiadas Colombianas De Matematicas](#)
- , 1999

Nell' n -esima figura di questo tipo, $\rightarrow$
che frazione del triangolo grande resta ombreggiata?



- 20)
- [British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest](#)
- Final Round, 1999

The page numbers of a book sum to 1999. One page number was counted twice.
Which page number was that?

RISPOSTE

- 3) In effetti l'uguaglianza
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$
- è, come si può controllare, un'identità

$$4) \frac{n(n+1)(n+2)}{n+(n+1)+(n+2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3n+3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3(n+1)} = \frac{n(n+2)}{3} \quad 5) \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$6) \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{n+1} \quad 7) \text{ Diventa } \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3}{n} + \frac{2}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}$$

$$8) \text{ Con } b = a: \frac{a^2}{(a+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right)^2 \quad 9) \text{ I) d} \quad \text{II) } \frac{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}} = \frac{n+1}{n} \quad \text{III) } n+1 \quad 10) \text{ c} \quad 11) \text{ d}$$

12)

	imposs.	indet.	= 0
$\frac{x+12}{x-21}$	$x = 21$	/	$x = -12$
$\frac{4x-2}{2x-1}$	/	$x = \frac{1}{2}$	/
$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}$	$x = 3, x = 4$	/	$x = 0, x = 1, x = 2$
$\frac{3x+1}{3x}$	$x = 0$	/	$x = -\frac{1}{3}$
$\frac{3x}{3x+1}$	$x = -\frac{1}{3}$	/	$x = 0$
$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$	$x = 3$	$x = 2$	$x = 1$
$\frac{9x+27}{x^2+6x+9}$	/	$x = -3$	/

- 13) La differenza è nel "campo di esistenza". $\frac{x-4}{x-2}$ ha significato per tutti i valori di x tranne $x = 2$,
 $\frac{1}{1 + \frac{2}{x-4}}$ perde significato sia con $x = 2$ che con $x = 4$.

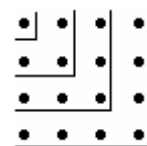
Per tutti i valori di x tranne 2 e 4 le frazioni assumono lo stesso valore.

$$14) \text{ a) } \begin{cases} A = 7 \\ B = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} A = -3 \\ B = 8 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} A = 5/2 \\ B = -27/2 \end{cases} : \frac{5/2}{x} + \frac{-27/2}{3x+2} = \frac{5}{2x} - \frac{27}{2(3x+2)} \quad \text{d) } \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = -2 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \\ C = 6 \end{cases}$$

$$15a) 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

$$15b) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = (2-1) + (4-1) + (6-1) + \dots + (2n-1) = (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$$

La figura qui a fianco $\rightarrow$ visualizza e giustifica efficacemente l'enunciato!



$$16) \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) + 3 \cdot (3+1) + \dots + n \cdot (n+1) = 1 + 1 + 4 + 2 + 9 + 3 + \dots + n^2 + n = (1 + 4 + 9 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \dots = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

- 18) a
19) $\frac{n-1}{2n}$
20) page 46