CENNI DI LOGICA (PARTE 2) [prosecuzione della Parte 1, pagg. 74 … 78]

5. UNA TAVOLA DI VERITA' ANCHE PER L'IMPLICAZIONE? IL PROCESSO ALLA "TAVOLA DELLE CONTROVERSIE"

Dopo aver descritto i connettivi ET, VEL e NON mediante altrettante "tavole di verità",
è del tutto spontaneo tentare di fare lo stesso anche per il connettivo di *implicazione* "SE … ALLORA …".

Nei libri di testo scolastici si legge di solito che all'implicazione va associata la tavola di verità seguente:

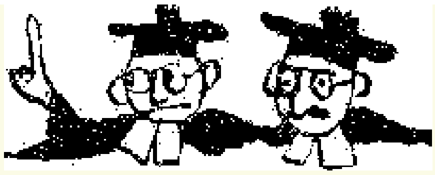
p	q	$p \to q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

La "tavola delle controversie"

Noi per ora ci avviciniamo "prudentemente" a questa tavola,
presentandola come la "**tavola delle controversie**",
perché, sebbene vi siano buone ragioni IN FAVORE della sua validità,
non si può tuttavia negare che esistano anche ottime ragioni CONTRO.

Direi quindi di fare entrare subito in aula gli avvocati di questo processo,
in cui la "tavola delle controversie" gioca il ruolo di imputato.

IL PROCESSO ALLA "TAVOLA DELLE CONTROVERSIE"



L'ARRINGA DELLA DIFESA

La correttezza, egregi signori, della cosiddetta "tavola delle controversie", è talmente ben fondata
che mi posso permettere di presentare ben QUATTRO argomenti a suo sostegno.

- PRIMO ARGOMENTO A FAVORE

  Innanzitutto, per brevità, data un'implicazione $p \to q$,
  chiameremo "**antecedente**" la proposizione p e "**conseguente**" la q.

  Ora, se antecedente e conseguente sono entrambe vere, è ovvio che $p \to q$ andrà considerata vera!
  Un esempio? Eccolo:
  "Se 98700 è multiplo di 3, allora 98701 non lo è".

  E' quindi giustificato il primo rigo della tavola:

p	q	$p \to q$
V	V	V

  Se invece l'antecedente è vera e la conseguente è falsa, l'implicazione è certamente da considerarsi falsa
  (*da una premessa vera, non può discendere una conclusione falsa*);
  da cui il secondo rigo

p	q	$p \to q$
V	F	F

  E andiamo ora al terzo e al quarto rigo:

p	q	$p \to q$
F	V	V
F	F	V

  Dico che è corretto considerare VERA una implicazione con l'antecedente falsa,
  qualunque sia il valore di verità della conseguente, in virtù della seguente considerazione:
  *se la premessa è falsa, da essa si può dedurre qualsiasi cosa, perché cade, appunto,
  la base di partenza sulla quale si fonda il ragionamento deduttivo.*

  Insomma, sentendo una persona che dice "Se i *reality* sono intelligenti, allora io sono un ippopotamo",
  tutti si sentono istintivamente d'accordo!

- SECONDO ARGOMENTO A FAVORE
  - La proposizione $p \to q$ seguente:

    "Se x è divisibile per 6, allora x è divisibile per 3"

    esprime senza ombra di dubbio un ragionamento *corretto*,
    quindi è evidente che andrà considerata vera qualunque sia *x*.

    Ora, considerato un numero intero *x*, tre sono i casi possibili:
    1) *x* è divisibile per 6 (e quindi anche per 3): *p* vera, *q* vera
    2) *x* non è divisibile per 6, ma è divisibile per 3: *p* falsa, *q* vera
    3) *x* non è divisibile né per 6 né per 3: *p* falsa, *q* falsa

    Ricapitoliamo.
    Nel caso 1) abbiamo *p* VERA, *q* VERA;
    nel caso 2) abbiamo *p* FALSA, *q* VERA;
    nel caso 3) abbiamo *p* FALSA, *q* FALSA
    e in tutti e tre questi casi, avevamo detto, l'implicazione va considerata **VERA**.

  - Invece la proposizione:

    "Se x è un numero primo, allora x è dispari",

    esprime una deduzione *sbagliata*.
    L'infondatezza del ragionamento può venir dimostrata facendo notare che
    c'è un numero (il 2) che è primo, e ciononostante è pari; ovvero,
    c'è un caso in cui l'antecedente è vera ma la conseguente è falsa.

    La verità dell'antecedente in questo caso particolare $x = 2$,
    confrontata con la falsità della conseguente,
    rivela la falsità dell'implicazione:

    p VERA, *q* FALSA, implicazione **FALSA**.

- TERZO ARGOMENTO A FAVORE

  Affermare che vale l'implicazione $p \to q$ equivale a sostenere che
  in tutti i casi in cui è vera p, si verifica anche q.
  Ciò significa dire che
  p è falsa, oppure, nel caso opposto, certamente è vera q.
  E quest'ultima affermazione, in simboli, è la $\boldsymbol{\overline{p} \vee q}$.

  Ricapitolando, *l'implicazione $p \to q$ ha lo stesso significato della proposizione composta $\overline{p} \vee q$*,
  e sarà quindi corretto fissare la tavola di verità di $p \to q$ in modo che coincida con quella di $\overline{p} \vee q$.
  Andiamo allora a compilare la tavola di verità di $\overline{p} \vee q$:

p	q	$\overline{p}$	q	$\overline{p} \vee q$
V	V	F	V	**V**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	V	**V**
F	F	V	F	**V**

  Vediamo che in ultima colonna essa porta la sequenza **VFVV**.
  Quindi così dovrà essere anche per $p \to q$.

- QUARTO ARGOMENTO A FAVORE

  Supponiamo che io prometta a mio figlio:
  "Se resti promosso, ti compro il motorino".
  Potrò essere accusato di aver fatto un'affermazione FALSA soltanto nel caso in cui,
  pur essendo mio figlio stato promosso, io (carogna!) NON gli abbia comprato il motorino.
  Negli altri 3 casi :
  - promozione SI', motorino SI';
  - promozione NO, motorino NO;
  - promozione NO, motorino SI' ugualmente (con gravissimo errore educativo)

  nessuno potrà dire che io abbia affermato il falso,
  quindi la mia affermazione andrà giudicata, in tutti e tre questi casi, VERA.
  Insomma, l'implicazione da me enunciata è da ritenersi FALSA esclusivamente in presenza
  di antecedente vera e conseguente falsa.

L'ARRINGA DELL'ACCUSA

Le argomentazioni della difesa sono ingegnose, e gli esempi presentati son stati scelti con molta scaltrezza.
Ma io scardinerò la "tavola delle controversie" fin dalle sue fondamenta.

Questa tavola pretende di "inscatolare" l'implicazione in quattro regole, che a partire dai valori di verità di antecedente e conseguente fisserebbero il valore di verità dell'implicazione nel suo complesso.

Bene! Cosa mi dite ora della proposizione seguente?
"SE Parigi è la capitale della Francia, ALLORA il numero 18 è divisibile per 3"

Antecedente e conseguente qui sono entrambe vere, quindi la tavola delle controversie affermerebbe che l'implicazione va considerata vera …
Ridicolo!!! L'implicazione in questione è invece **priva di senso**,
e di fronte ad un'affermazione priva di senso
(che quindi non si può nemmeno considerare una *proposizione*)
perdono il loro significato le categorie di "verità" e "falsità".

Il fatto è che per giudicare sulla verità o falsità di un'implicazione,
non è sufficiente conoscere il valore di verità delle due proposizioni componenti!
Occorre fare molto di più, ossia entrare *all'interno* di ciascuna delle due proposizioni
per analizzare il *significato* di entrambe, e la *relazione* fra i loro contenuti.
Insomma, è indispensabile entrare in questioni di carattere **SEMANTICO**
(= concernente il **SIGNIFICATO**), perché l'aspetto FORMALE non basta.

E c'è di più, oltre alle questioni di "sensatezza" o "non sensatezza".
Anche in parecchi casi in cui l'implicazione che si considera si può giudicare "sensata",
il suo valore di verità dipende non semplicemente dai valori di verità di antecedente e conseguente,
ma da considerazioni assai più profonde.
Ascoltatemi bene, il seguente esempio vi convincerà.

Pensiamo alla proposizione

"Se fra un'ora io immergerò questo pezzo di ferro in acqua bollente, esso fonderà"
(l'esempio è sostanzialmente tratto da "Introduction to Mathematical Logic", E. Mendelson, 1964).

Essa è senza alcun dubbio falsa!
E' falsa anche in caso di falsità dell'antecedente (sebbene la "tavola delle controversie"
ci dica che, con antecedente falso, l'implicazione va sempre considerata vera)!
Voglio dire: resta falsa anche se io, fra un'ora, NON immergerò il pezzo di ferro in acqua bollente!
Essa è infatti falsa "per sua natura", in virtù del fatto che il ferro NON PUO' fondere a 100 °C:
la sua temperatura di fusione è infatti 1535 °C.

Così pure, la proposizione
"Se Leopardi non avesse scritto "L'infinito", allora non sarebbe scoppiata la Prima Guerra Mondiale"
è, evidentemente, da considerarsi falsa
(anche se l'antecedente è falsa, e, quindi, la "tavola delle controversie" direbbe che l'implicazione è vera):
non ditemi per piacere che la stesura o meno de "L'infinito" da parte di Leopardi
possa avere in qualche modo influenzato la politica internazionale del secolo successivo!!!

LA REPLICA DELLA DIFESA

Beh, riguardo a Giacomo Leopardi, son convinto anch'io che se non avesse scritto "L'infinito"
la Prima Guerra Mondiale sarebbe scoppiata ugualmente; ma proposizioni di questo tipo,
esprimenti congetture riguardo alle conseguenze che avrebbe potuto avere un fatto non accaduto
("condizionali controfattuali"), non hanno nessun rilievo nel ragionamento matematico.

Cosa importa, poi, se l'applicazione della "tavola delle controversie" porterebbe a classificare "vere"
anche proposizioni che in realtà sono prive di significato?
Ciò che conta è che, di fronte alle implicazioni "sensate", essa "funzioni" sempre correttamente.
E in effetti funziona!

Non vorremo mica sbarazzarci di uno strumento così utile come la "tavola delle controversie"?
D'accordo, essa non è in grado di abbracciare tutta la complessità e varietà di quella costruzione logica che chiamiamo "implicazione", ma certo non si può negare che riesca a catturarne con fedeltà i tratti essenziali.

UN RAGIONEVOLE VERDETTO

Dal dibattito è emerso chiaramente che la "tavola delle controversie":

- *da una parte, non è in grado, nella sua schematicità, di esprimere in modo soddisfacente tutta la ricchezza di significati insita nella costruzione linguistica "SE … ALLORA …";*
- *dall'altra, riesce tuttavia a sintetizzare con estrema concisione (e, quindi, efficacia) alcune caratteristiche fondamentali di tale costruzione linguistica.*

Non è perciò uno strumento né da buttar via né da accettare acriticamente;
occorre tenerne sempre presenti sia i pregi che i limiti, bene illustrati dalla difesa e dall'accusa.

Chiameremo, d'ora in avanti,
" **implicazione *MATERIALE*** "
la proposizione composta,
indicata col simbolo $p \to q$,
e letta *"se p, allora q"*,
il cui valore di verità è determinato meccanicamente
applicando le quattro regole della tavola qui a destra,
senza "entrare all'interno"
delle proposizioni componenti *p*, *q*
(senza quindi esplorare *p*, *q*
dal punto di vista *semantico*, cioè del *significato*).

p	q	$p \to q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

La tavola di verità per **l'implicazione materiale**

La relazione che intercorre fra l' implicazione materiale e l' "autentica" implicazione
è un po' come quella che passa tra le due figure qui riportate …

Marilyn Monroe
(1/6/1926 – 5/8/1962)

… tuttavia anche le bozze schematiche possono essere parecchio utili, proprio per la loro essenzialità.

Più che servire per controllare la validità di un ragionamento, l'implicazione materiale è un comodo strumento per verificarne rapidamente l'eventuale NON correttezza.

Quando nel paragrafo 11 esamineremo la forma di implicazione di gran lunga più utilizzata in matematica, la cosiddetta "implicazione logica", potremo sintetizzare efficacemente il discorso affermando che

"un'implicazione logica $p(x) \Rightarrow q(x)$ *è:*

- *vera quando, per tutti i valori di x, è sempre vera la corrispondente implicazione materiale* $p \to q$
- *falsa quando esiste almeno un valore di x per cui la corrispondente implicazione materiale* $p \to q$ *è falsa".*

6. DOPO L'IMPLICAZIONE MATERIALE, ECCO LA BIIMPLICAZIONE MATERIALE

Un discorso analogo a quello fatto per l'implicazione
conduce alla tavola di verità
per la "*biimplicazione*" o "*doppia implicazione*",
che traduce la costruzione linguistica
"*se … allora … e viceversa*".

Quando ci si limita a fissare il valore di verità
della proposizione composta $p \leftrightarrow q$
basandosi solo sui valori di verità
delle proposizioni componenti
senza andare a valutare il loro legame semantico
(con tutti i limiti che questa "riduzione all'osso" comporta),
si parla preferibilmente di "biimplicazione **materiale**".

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

La tavola di verità per **la biimplicazione materiale**

7. NUOVE EQUIVALENZE LOGICHE NOTEVOLI

$p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$ **Importantissima.** E' chiamata **"PRIMA LEGGE DELLE INVERSE"**

$p \to q = \overline{p} \vee q$ **Importantissima. Descrive la corretta interpretazione di $p \to q$**

$p \wedge q = \overline{p \to \overline{q}}$

$p \vee q = \overline{p} \to q$

$p \to (q \wedge r) = (p \to q) \wedge (p \to r)$

$p \to (q \vee r) = (p \to q) \vee (p \to r)$

$p \to (q \to r) = (p \to q) \to (p \to r)$

$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$

$\overline{p \leftrightarrow q} = \overline{p} \leftrightarrow q$

$p \leftrightarrow q = \overline{p} \leftrightarrow \overline{q}$

$p \leftrightarrow q = (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$

Ricordiamo (vedi pag. 75)
che **due proposizioni composte,**
costituite dalle stesse proposizioni componenti
(collegate, però, in modo diverso dai connettivi logici),
si dicono "logicamente equivalenti"
se assumono sempre lo stesso valore di verità,
qualunque siano i valori di verità
delle proposizioni componenti.
E che
per verificare se due proposizioni
sono logicamente equivalenti,
ci si serve delle "tavole di verità" dei vari connettivi:

p	**q**	**$p \wedge q$**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

p	**q**	**$p \vee q$**
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

p	**$\overline{p}$**
V	**F**
F	**V**

p	**q**	**$p \to q$**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

ESERCIZI
(ricordiamo che in questo contesto il simbolo " = " va letto "logicamente equivalente a")

Esercizio 1. Serviti della tabella seguente per verificare la ***Prima Legge delle Inverse***

$$p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$$

p	q	$p \to q$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Esercizio 2. Verifica, tramite la tabella sottostante, l'equivalenza logica

$$p \to (q \to r) = (p \to q) \to (p \to r)$$

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \to (p \to r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Esercizio 3. Verifica la validità di alcune, a tua scelta,
fra le equivalenze logiche riportate in questa pagina.

ESERCIZI (risposte a pag. 376)

Riportiamo questi esercizi per gentilissima concessione del prof. Raffaele Mascella dell'Università di Teramo.

1) Posto:

A = "Carlo è ligure";
B = "Diego è piemontese",

scrivere le proposizioni che formalizzano i seguenti enunciati:

(a) "Se Carlo non è ligure, allora Diego non è piemontese"
(b) "È falso che se Carlo è ligure, allora Diego è piemontese"
(c) "Carlo è ligure se Diego è piemontese"
(d) "Carlo può essere ligure solo se Diego è piemontese"
(e) "Carlo è ligure se e solo se Diego è piemontese"
(f) "O Carlo è ligure o, se Carlo non è ligure, allora Diego è piemontese"

2) Posto

A = "Angelo viene alla festa",
B = "Bruno viene alla festa",
C = "Carlo viene alla festa"
e D = "Davide viene alla festa",

scrivere le proposizioni che formalizzano i seguenti enunciati:

(a) "Angelo viene alla festa, ma Bruno no"
(b) "Se Davide viene alla festa allora vengono anche Bruno e Carlo"
(c) "Carlo viene certamente alla festa se non vengono né Angelo né Bruno"
(d) "Davide viene alla festa se e solo se viene Carlo e non viene Angelo"
(e) "Alla festa vengono uno almeno fra Angelo e Bruno, e uno e uno solo fra Carlo e Davide"
(f) "Se Davide viene alla festa, allora, se Carlo non viene, viene Angelo"
(g) "Carlo viene alla festa se viene Davide, ma, se viene Davide, allora Bruno non viene"
(h) "Se vengono alla festa Angelo e Bruno, allora viene Carlo se non viene Davide"
(i) "Carlo viene alla festa se non vengono Bruno e Angelo o se viene Davide"
(l) "Se Angelo viene alla festa allora vengono Bruno o Carlo,
ma se Angelo non viene alla festa, allora vengono Carlo e Davide"
(m) "Angelo, Bruno e Carlo vengono alla festa se e solo se Davide non viene,
ma, se né Angelo né Bruno vengono, Davide viene se viene Carlo"

3) Dire in quali dei seguenti casi si hanno equivalenze (attraverso le tavole di verità):

(a) $p \to q$ equivale a $\overline{p \wedge \overline{q}}$?
(b) $(\overline{p} \to q) \vee (p \to \overline{q})$ equivale a $p \vee q$?
(c) $p \to \overline{q}$ equivale a $\overline{p} \vee \overline{q}$?

4) Dire quali delle seguenti coppie di forme proposizionali sono logicamente equivalenti:

(a) $p \to q$, $\overline{q} \to p$ (b) $p \wedge (q \to r)$, $q \wedge (p \to r)$ (c) $(p \vee q) \to r$, $(p \to r) \wedge (q \to r)$

5) (*Preparazione al test di ingresso del Politecnico di Torino*)

Luigi scommette con Mario che, se Eddy Merckx diventasse commissario tecnico della Nazionale Italiana di Ciclismo, un italiano vincerebbe sicuramente il prossimo giro d'Italia.
In quale dei seguenti casi sicuramente Luigi perderebbe la scommessa?

(a) Eddy Merckx diventa commissario tecnico, l'italiano Garzelli vince il prossimo Tour de France
(b) Eddy Merckx diventa commissario tecnico, lo spagnolo Sastre vince il prossimo Giro d'Italia
(c) Eddy Merckx non diventa commissario tecnico, l'italiano Garzelli vince il prossimo Giro d'Italia
(d) Eddy Merckx non diventa commissario tecnico, lo spagnolo Sastre vince il prossimo Giro d'Italia
(e) Eddy Merckx non diventa commissario tecnico

8. TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

Esistono delle **PROPOSIZIONI COMPOSTE che sono SEMPRE VERE,**
qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti.
Esse vengono dette **TAUTOLOGIE**.

Esempi: 1) $p \vee \overline{p}$ 2) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

Il metodo delle tavole di verità permette di verificare in modo facile (e divertente!) se una data proposizione composta è una tautologia.
Ad esempio, effettuiamo questa verifica per la 1):

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
V	F	**V**
F	V	**V**

ESERCIZIO - Verifica che la 2) è una tautologia, servendoti della seguente tabella:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Ecco una piccola rassegna di tautologie particolarmente interessanti:

$p \vee \overline{p}$	**Principio del terzo escluso**	$\overline{p \wedge \overline{p}}$	**Principio di non contraddizione**
$(p \wedge \overline{p}) \to q$	**"Ex falso quodlibet" (*)**	$(\overline{p} \to p) \to p$	**"Consequentia mirabilis"**
$(\overline{p} \to (q \wedge \overline{q})) \to p$	**Riduzione all'assurdo**	$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$	

(*) "Dal falso (si può dedurre) qualsiasi cosa"

ESERCIZIO: verifica tramite le tavole di verità che le proposizioni della tabella precedente sono, effettivamente, delle tautologie.

E' evidente che **due proposizioni composte a, b sono logicamente equivalenti se e solo se la biimplicazione $a \leftrightarrow b$ è una tautologia.**

E pertanto da una qualsivoglia equivalenza logica è possibile ottenere una tautologia semplicemente sostituendo il segno = ("logicamente equivalente") col simbolo $\leftrightarrow$ di biimplicazione.

Esempio: dall'equivalenza logica $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ si può trarre la tautologia $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$.

In contrapposizione con le tautologie, esistono pure delle **PROPOSIZIONI COMPOSTE**
che sono SEMPRE FALSE, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni componenti.
Esse vengono dette **CONTRADDIZIONI**. Esempio: $p \wedge \overline{p}$

Ovviamente,
- **la negazione di una tautologia è sempre una contraddizione;**
- **la negazione di una contraddizione è sempre una tautologia.**

ESERCIZI (risposte a pag. 376)

Dire quali delle seguenti proposizioni sono tautologie:

(a) $(p \to q) \leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}}$ (b) $q \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ (c) $(p \wedge q) \to p$

(d) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ (e) $((p \to q) \to q) \to q$

(f) $((p \to q) \to q) \vee \overline{q}$ (g) $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow (p \wedge (p \vee q))$

9. PROPOSIZIONI "APERTE"

Se io scrivo

"n è multiplo di 3"

non faccio, in tal modo, un'affermazione che si possa dire vera o falsa ***in assoluto***:
la verità o falsità di questa espressione linguistica dipenderà dal valore di *n*.

Ad esempio, con $n = 6$ è VERA, mentre con $n = 10$ è FALSA.

Un'AFFERMAZIONE CONTENENTE UNA VARIABILE
è detta PROPOSIZIONE APERTA o PREDICATO.

Ogni proposizione aperta ha dunque

a) il suo **INSIEME UNIVERSO** o **INSIEME AMBIENTE** o **DOMINIO**
vale a dire, l'insieme dei valori della variabile per i quali la proposizione ha senso:
nell'esempio fatto, è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali;

b) il suo **INSIEME DI VERITA'**
vale a dire, l'insieme dei valori della variabile che rendono vera la proposizione:
nell'esempio fatto, è $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

Facciamo un altro esempio:

"Le due diagonali di x sono uguali"

Questa è una proposizione aperta, o predicato, il cui insieme universo è costituito da quegli oggetti *x* per i quali abbia senso parlare di due diagonali: si tratta, evidentemente, dei quadrilateri.
L'insieme di verità della proposizione aperta considerata è invece costituito da tutti e soli quei quadrilateri aventi la proprietà di avere le diagonali uguali: fra di essi, troviamo in particolare i rettangoli e i trapezi isosceli.

Per indicare una proposizione aperta si può utilizzare
una lettera dell'alfabeto, seguita da una coppia di parentesi
contenenti al loro interno la variabile da cui la proposizione aperta dipende.
Esempi:

"n è multiplo di 3" = p(n) [*Leggi*: *p di n*]
"Le due diagonali di x sono uguali" = d(x)

ESERCIZI (risposte a pag. 376)

1) Stabilisci se la proposizione aperta
"x è un numero primo"
è vera o falsa nei seguenti casi:
a) $x = 111$ b) $x = 431$ c) $x = 2401$

2) Stabilisci se la proposizione aperta (a due "argomenti": NOTA)
" $x^2 \geq y$ "
è vera o falsa nei seguenti casi:
a) $x = 5, \quad y = 19$ b) $x = 0{,}25 \quad y = 0{,}07$ c) $x = 1/6 \quad y = 0{,}02\overline{7}$

NOTA:
"argomento"
è, in linea di massima,
sinonimo di "variabile
indipendente"

Le seguenti belle definizioni schematiche di:
intersezione, unione, differenza insiemistica,
sono scritte utilizzando proposizioni aperte.

Tieni presente che il simbolo " : "
è impiegato per indicare "tale che, tali che",
esattamente come il simbolo " / "

INTERSEZIONE	$\boxed{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x : x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B}\}}$	Leggi: $A \cap B$ è l'insieme degli *x* tali che $x \in A$ ET $x \in B$
UNIONE	$\boxed{\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x : x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B}\}}$	Leggi: $A \cup B$ è l'insieme degli *x* tali che $x \in A$ VEL $x \in B$
DIFFERENZA INSIEMISTICA	$\boxed{\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x : x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B}\}}$	Leggi: $A - B$ è l'insieme degli *x* tali che $x \in A$ ET $x \notin B$

10. CORRISPONDENZE FRA LOGICA E INSIEMI

Supponiamo ora che $a(x)$, $b(x)$ siano due proposizioni aperte, definite sullo stesso insieme ambiente.

- Detto A l'insieme di verità della $a(x)$, e detto B l'insieme di verità della $b(x)$, è facile convincersi che l'insieme di verità della proposizione aperta composta $a(x) \wedge b(x)$ è $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

  Ad esempio, considerate le proposizioni

  $$a(x) = \text{"}x \text{ è un numero pari"}; \quad b(x) = \text{"}x \text{ è un multiplo di } 3\text{"}$$

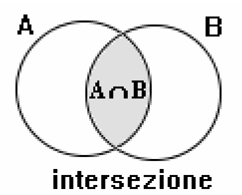
  - i rispettivi insiemi di verità sono:
    $\mathrm{A} = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ ...\}$; $\quad \mathrm{B} = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ ...\}$
  - la proposizione $a(x) \wedge b(x)$ è la seguente:
    "x è un numero pari e contemporaneamente è un multiplo di 3"
  - e l'insieme di verità della $a(x) \wedge b(x)$ è perciò l'insieme dei multipli di 6, ossia $\{6,\ 12,\ 18,\ ...\}$.

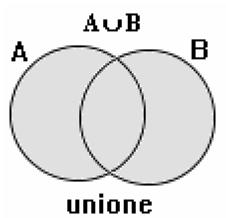
  Ma quest'ultimo insieme è appunto $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$!!!

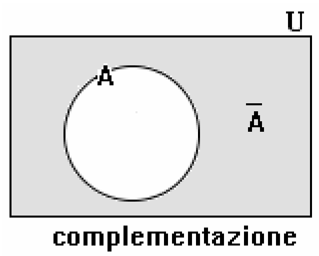
- E' altrettanto immediato determinare gli insiemi di verità di $a(x) \vee b(x)$; $\overline{a}(x)$:
  essi sono rispettivamente $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$; $\overline{\mathrm{A}}$ (= il complementare di A rispetto all'insieme universo)

RIASSUNTO SCHEMATICO

A = insieme di verità della proposizione aperta $a(x)$
B = insieme di verità della proposizione aperta $b(x)$







L'insieme di verità della proposizione aperta $a(x) \wedge b(x)$ è $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

Infatti, dire $a(x) \wedge b(x)$ è come dire $x \in \mathrm{A} \wedge x \in \mathrm{B}$ cioè $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

L'insieme di verità della proposizione aperta $a(x) \vee b(x)$ è $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

Infatti, dire $a(x) \vee b(x)$ è come dire $x \in \mathrm{A} \vee x \in \mathrm{B}$ cioè $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

L'insieme di verità della proposizione aperta $\overline{a}(x)$ è $\overline{\mathrm{A}}$ (= il complementare di A rispetto all'insieme universo)

Infatti, dire $\overline{a}(x)$ è come dire $x \notin \mathrm{A}$ cioè $x \in \mathrm{U} - \mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$

♥ **Notare come i SIMBOLI scelti dai matematici per indicare, da una parte, i connettivi proposizionali, dall'altra le operazioni fra insiemi, sono tali che CIASCUN SIMBOLO LOGICO RICHIAMA IL SUO CORRISPONDENTE INSIEMISTICO:**

LOGICA		INSIEMI	
congiunzione	$\wedge$	$\cap$	**intersezione**
disgiunzione	$\vee$	$\cup$	**unione**
negazione	$\overline{}$	$\overline{}$	**complementazione**

ESERCIZI (proposizioni aperte, logica e insiemi); le risposte sono a pag. 376.

1) Sia $a(x)=$"*x è multiplo di* 4", $b(x)=$"*x è multiplo di* 6".
Allora l'insieme di verità
di $a(x)$ è {...}
e quello di $b(x)$ è {...}.
Sarà poi $a(x)\wedge b(x)=$".."
mentre l'insieme degli x per cui è vera $a(x)\vee b(x)$ ha come elementi ....

2) Sia $p(x)=$"*x è multiplo di* 4", $q(x)=$"*x è multiplo di* 8".
Allora è
$p(x)\wedge q(x)=$ ……………………
$p(x)\vee q(x)=$ ……………………..
Quali sono gli x che rendono vera la proposizione $p(x)\wedge\overline{q(x)}$? ……………………………..

Si chiamano "**INTERVALLI**" particolari insiemi numerici (vedi schema seguente).
Gli intervalli possono essere: chiusi, aperti, semiaperti; possono essere limitati o illimitati.
Nota **l'uso delle parentesi**: parentesi **QUADRA** = **estremo COMPRESO**; **TONDA** = **estremo ESCLUSO**

Intervallo chiuso di estremi a e b: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a\le x\le b\}$

Intervallo aperto di estremi a e b: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a<x<b\}$

Interv. di estr. a e b, chiuso a sinistra e aperto a destra: $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a\le x<b\}$

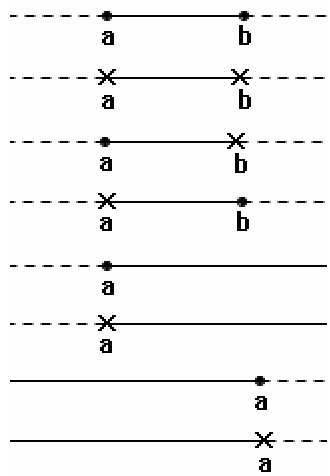
Interv. di estr. a e b, aperto a sinistra e chiuso a destra: $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a<x\le b\}$

Intervallo chiuso illimitato superiormente: $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x\ge a\}$

Intervallo aperto illimitato superiormente: $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x>a\}$

Intervallo chiuso illimitato inferiormente: $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}/x\le a\}$

Intervallo aperto illimitato inferiormente: $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}/x<a\}$



Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$:

- contiene il 4;
- contiene tutti i numeri, **NON SOLO** quelli interi **MA ANCHE** quelli "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- NON contiene l'8.

Anche l'intero insieme $\mathbb{R}$ si può pensare come un intervallo (illimitato da entrambe le parti): $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

3) a) $(2,5)\cap(3,7)=?$ b) $(2,5)\cup(3,7)=?$ c) $(2,5]\cap(3,7)=?$ d) $(2,5)\cup[3,7)=?$ e) $[2,5)\cup(3,7]=?$
f) $\left(-3,\frac{1}{4}\right)\cap[0,+\infty)=?$ g) $\left(-3,\frac{1}{4}\right)\cup[0,+\infty)=?$ h) $(-5,-1)\cap(2,7)=?$ i) $(-5,-1)\cup(2,7)=?$

4) Sia $a(x)=$"$0<x<5$". Qual è l'insieme ambiente di $a(x)$? …….. E il suo insieme di verità? …………

5) Sia $a(x)=$"$2<x<10$", $b(x)=$"$5<x<15$".
a) Qual è l'insieme di verità di $a(x)\wedge b(x)$? …………..
b) E quello di $a(x)\vee b(x)$? …………..
c) E quello di $a(x)\wedge\overline{b(x)}$? …………..
d) E quello di $\overline{a(x)}\wedge b(x)$? …………..

6) Sia $a(n)=$"*n è divisore di* 12", $b(n)=$"*n è divisore di* 24".
Si può osservare che ogni valore di n che rende vera $a(n)$, renderà vera pure $b(n)$.
Questo fatto, cosa comporta per i rispettivi insiemi di verità A, B?

7) Considerate le proposizioni aperte, nell'insieme ambiente dei quadrilateri:
$p(x)=$"*x è un parallelogrammo*", $d(x)=$"*x è un quadrilatero con le diagonali uguali*",
$c(x)=$"*x è un quadrilatero con almeno due lati opposti paralleli*",
stabilisci quali fra le proposizioni date sono vere nel caso x sia
a) un trapezio scaleno
b) un rettangolo.
c) Può esserci un valore di x che renda vera $d(x)$ ma false $p(x)$, $c(x)$?

11. DALL'IMPLICAZIONE E BIIMPLICAZIONE "MATERIALE" ALL'IMPLICAZIONE E BIIMPLICAZIONE "LOGICA"

E' frequentissimo in matematica utilizzare la struttura linguistica **SE … ALLORA …**
(o espressioni linguistiche equivalenti) per mettere in relazione
DUE PROPOSIZIONI APERTE NELLA STESSA VARIABILE.

Si parla allora di **IMPLICAZIONE LOGICA**.

Il simbolo specifico utilizzato per indicare l'implicazione logica è $\Rightarrow$

Esempio: *x è multiplo di 6* $\Rightarrow$ *x è multiplo di 3*

Leggi: "SE *x* è multiplo di 6, ALLORA *x* è multiplo di 3"
"il fatto che *x* sia multiplo di 6 IMPLICA che *x* è multiplo di 3"

Va detto che
la distinzione fra l'implicazione logica e l'implicazione materiale è spesso un po' "sfumata" (vedi NOTA 2).

Si dice "**implicazione logica**" una proposizione ottenuta stabilendo, fra due proposizioni aperte con la stessa variabile, un particolare legame che potrà essere indicato col simbolo

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

e descritto con l'espressione linguistica: "**SE … ALLORA …**", oppure "**… IMPLICA …**", o analoghe.

♥ Un' **IMPLICAZIONE LOGICA** è considerata (vedi poi NOTA 3):

- **VERA** quando accade che
  ogni valore della variabile che rende vera la proposizione che "scaglia la freccia" ("antecedente"), rende vera anche la proposizione che "riceve la freccia nella schiena" ("conseguente");
- **FALSA** quando avviene il contrario, ossia quando
  esiste almeno un valore della variabile per cui l'antecedente è vera, ma la conseguente è falsa.

♥ Di conseguenza, per **dimostrare la FALSITA'** di un'implicazione logica fra due proposizioni aperte, basterà trovare **anche un solo CONTROESEMPIO** (= caso in cui l'antecedente è vera, ma la conseguente è falsa).

NOTA 1 (SULLA SIMBOLOGIA; leggi anche, a complemento del discorso, le note successive)

Nella pratica dell'attività matematica, non è il caso di farsi eccessivi problemi quando si tratta di scegliere fra la notazione $\rightarrow$ e la notazione $\Rightarrow$ per indicare "implicazione" in un dato contesto.
$\Rightarrow$, in fondo, equivale a $\rightarrow$ abbinato con $\forall$ ("per ogni"): $p(x) \Rightarrow q(x)$ equivale a $\forall x,\ p(x) \rightarrow q(x)$.

♥ **I due simboli $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ vanno bene entrambi allo scopo di schematizzare un "SE … ALLORA …" ; diciamo che $\Rightarrow$ suggerisce maggiormente l'idea di un "SE … ALLORA …" di carattere *generale*, riferito a una situazione in cui sono presenti una o più variabili e valido per qualunque valore delle variabili coinvolte.**

Discorso analogo per la *doppia* implicazione "SE … ALLORA … E VICEVERSA" : $\leftrightarrow$ oppure $\Leftrightarrow$.

E' del tutto ovvio che una "freccia" ($\rightarrow$) si può anche impiegare con l'intenzione di indicare un "verso di percorrenza", oppure come simbolo di "rimando", di "collegamento", di "corrispondenza". Qui l'implicazione evidentemente non c'entrerebbe. L'interpretazione corretta si trae con facilità dal contesto.

NOTA 2 (SUL CONFINE A VOLTE LABILE TRA IMPLICAZIONE MATERIALE E LOGICA)

L'implicazione "materiale" e l'implicazione "logica" differiscono nel fatto che

- la prima lega due proposizioni CHIUSE,
- mentre la seconda lega due proposizioni APERTE (nella stessa variabile).

Si può osservare tuttavia che **parecchie implicazioni che si incontrano in matematica appaiono a prima vista come implicazioni materiali, ma in realtà sono implicazioni logiche "mascherate".**
Ad esempio, quando io dico

"Se il mio anno di nascita è divisibile per 6, allora è divisibile anche per 3"

in realtà sto soltanto utilizzando, riferito al caso particolare del mio anno di nascita, il **ragionamento generale** che corrisponde all'implicazione logica

"Se un numero x è divisibile per 6, allora x è divisibile anche per 3"

NOTA 3 (SULLA VERITA' O FALSITA' DI UNA IMPLICAZIONE LOGICA)

Osserviamo che un'implicazione logica $p(x) \Rightarrow q(x)$ è dunque:

- vera quando, per tutti i valori di *x*, è sempre vera la corrispondente implicazione materiale $p \rightarrow q$
- falsa quando esiste almeno un valore di *x* per cui la corrispondente implicazione materiale $p \rightarrow q$ è falsa.

Analogo è il discorso per la **biimplicazione logica**. Eccone un esempio:

ABC è equilatero $\Leftrightarrow$ *ABC è equiangolo*

"SE ABC è equilatero, ALLORA ABC è equiangolo E VICEVERSA"
"ABC è equilatero SE E SOLO SE è equiangolo"
"Il fatto che ABC sia equilatero IMPLICA che ABC sia equiangolo, E VICEVERSA"
"Il fatto che ABC sia equilatero BIIMPLICA che ABC sia equiangolo"

♥ Una **biimplicazione logica** (= biimplicazione fra due proposizioni aperte con la stessa variabile)

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

è considerata

- **VERA** quando accade che
  ogni valore della variabile che rende vera la proposizione di sinistra,
  rende vera anche la proposizione di destra,
  E VICEVERSA
  (in pratica, quando sono vere nel senso prima specificato,
  sia l'implicazione da sinistra verso destra $\Rightarrow$
  che l'implicazione da destra verso sinistra $\Leftarrow$);
- **FALSA** quando avviene il contrario, ossia quando
  esiste almeno un valore della variabile
  per cui una delle due proposizioni risulta vera e l'altra falsa.

ESERCIZI (risposte a pag. 376)

Fra le seguenti implicazioni e biimplicazioni logiche, stabilisci quali sono vere e quali false:

a) n è dispari $\Rightarrow$ n è primo

b) n è primo $\Rightarrow$ n è dispari

c) Se un quadrilatero ha i quattro lati uguali, allora ha anche le diagonali uguali

d) Se un quadrilatero ha le diagonali uguali, allora ha anche i quattro lati uguali

e) $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

f) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

g) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$

h) x divisibile per 6 $\Rightarrow$ x è divisibile per 3

i) x divisibile per 3 $\Rightarrow$ x è divisibile per 6

j) x divisibile per 6 $\Leftrightarrow$ x è divisibile per 3

k) Se un triangolo ha due lati uguali, allora ha anche due angoli uguali

l) Se un triangolo ha due angoli uguali, allora ha anche due lati uguali

m) ABC ha due angoli uguali $\Leftrightarrow$ ABC ha due lati uguali

n) $x < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0$

o) $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$

12. Condizione sufficiente (CS), necessaria (CN), necessaria e sufficiente (CNS); se, soltanto se, se e solo se (SSE). La Prima Legge delle Inverse

♥ **Quando vale l'implicazione $p \Rightarrow q$, si può dire che**

- p **è condizione SUFFICIENTE per il verificarsi di** q
- q **è condizione NECESSARIA per il verificarsi di** p

Perché "necessaria"?
Perché, se non si verifica q, non può verificarsi neppure p,
in quanto, se si verificasse p,
l'implicazione ci dice che si verificherebbe anche q.

Esempio: *x è multiplo di 6* $\Rightarrow$ *x è multiplo di* 3

Per un intero *x*,
l'essere multiplo di 6 è *SUFFICIENTE* per essere multiplo di 3;
l'essere multiplo di 3 è *NECESSARIO* per essere multiplo di 6
(in quanto se un intero NON è multiplo di 3,
è già subito escluso che possa essere multiplo di 6).

$$\underbrace{p}_{\substack{\textbf{CS}\\ \textbf{per il}\\ \textbf{verificarsi}\\ \textbf{di } q}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{q}_{\substack{\textbf{CN}\\ \textbf{per il}\\ \textbf{verificarsi}\\ \textbf{di } p}}$$

SE p, ALLORA q

p SOLTANTO SE q

♥ Una "condizione necessaria" è anche detta, dal latino, "CONDITIO SINE QUA NON", ossia "condizione senza la quale non può verificarsi l'altra".

E' facile rendersi conto che
un'implicazione $p \Rightarrow q$ è perfettamente equivalente all'implicazione $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

(1) "*Se un fungo è velenoso, allora diventa nero al taglio*"
è perfettamente equivalente a
(2) "*Se un fungo non diventa nero al taglio, allora non è velenoso*"

Possiamo convincerci di questa equivalenza tramite le semplici considerazioni seguenti.

- Supponiamo che sia vera la (1); voglio dimostrare che, in tal caso, è certamente vera anche la (2). Infatti, qualora io prenda un fungo, lo tagli, e veda che *NON* diventa nero, posso star certo che *NON* è velenoso: perché se per assurdo lo fosse, in forza della la verità della (1) avrebbe dovuto diventar nero al taglio.
- E, viceversa, supponiamo che sia vera la (2); voglio far vedere che, in tal caso, è certamente vera anche la (1). Infatti, qualora io prenda un fungo velenoso, posso star certo che diventerà nero al taglio; perché, se per assurdo non lo diventasse, in forza della la verità della (2) non sarebbe velenoso.

Il ragionamento fatto con riferimento ai funghi è facilmente generalizzabile ad implicazioni qualsiasi.
Resta così stabilita la cosiddetta "**Prima Legge delle Inverse**", che afferma appunto quanto si diceva:
♥ **un'implicazione $p \Rightarrow q$ è perfettamente equivalente all'implicazione $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$**

La Prima Legge delle Inverse è valida sia nel caso dell'implicazione logica
(sul quale abbiamo ragionato quando abbiamo parlato di funghi), che in quello dell'implicazione materiale:
avevamo già visto in precedenza che le due implicazioni materiali $p \to q$, $\overline{q} \to \overline{p}$ hanno la stessa tavola di verità.

Considerata ora un'implicazione logica $p \Rightarrow q$,

- l'implicazione $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ne viene detta la **CONTRONOMINALE**
- l'implicazione $q \Rightarrow p$ ne viene detta l' **INVERSA**
- l'implicazione $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ ne viene detta la **CONTRARIA**

La Prima Legge delle Inverse può essere enunciata dicendo che
un'implicazione è equivalente alla sua contronominale,
nel senso che, se un'implicazione è vera, allora è vera anche la rispettiva contronominale, e viceversa.

Invece **non esiste alcun legame generale fra il valore di verità di una implicazione e quello della sua inversa:**
ad esempio, per l'implicazione (vera): *"Se un triangolo ha due lati uguali, allora ha anche due angoli uguali"*,
anche l'inversa è vera;
mentre nel caso dell'implicazione (vera): *"Se un numero è divisibile per 6, allora è divisibile per 3"*,
l'inversa è falsa.

Così pure, non c'è alcun legame generale fra il valore di verità di un'implicazione e quello della "contraria".

Si può d'altra parte osservare che **l'inversa e la contraria di una stessa implicazione sono sempre equivalenti fra loro, in quanto sono una la contronominale dell'altra.**

♥ **Nel caso della "DOPPIA IMPLICAZIONE", si può dire che, quando è vera la**

$$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q},$$

p è condizione SUFFICIENTE E NECESSARIA affinché si verifichi q
q è condizione NECESSARIA E SUFFICIENTE affinché si verifichi p

Vale a dire:
quando è vera la biimplicazione $p \Leftrightarrow q$,
possiamo affermare che
ciascuna delle due condizioni p, q è tanto necessaria quanto sufficiente
(CNS = Condizione Necessaria e Sufficiente) al verificarsi dell'altra.

♥ **Una doppia implicazione $p \Leftrightarrow q$ può essere letta:**
p SE E SOLO SE q.

$$\underbrace{p}_{\substack{\textbf{CNS}\\ \textbf{per il}\\ \textbf{verificarsi}\\ \textbf{di } q}} \Leftrightarrow \underbrace{q}_{\substack{\textbf{CNS}\\ \textbf{per il}\\ \textbf{verificarsi}\\ \textbf{di } p}}$$

p SE E SOLO SE q

q SE E SOLO SE p

♥ "Se e solo se", "cond. necessaria e sufficiente" sono locuzioni "regine" per indicare DOPPIA implicazione

ESERCIZI (risposte a pag. 376)

Metti al posto dei puntini la locuzione corretta fra:
- **SUFFICIENTE (SUFF), CONDIZIONE SUFFICIENTE (CS)**
- **NECESSARIO (NEC), CONDIZIONE NECESSARIA (CN),**
- **NECESSARIO E SUFFICIENTE (NS), CONDIZIONE NECESSARIA E SUFF. (CNS),**
- **SE,**
- **SOLTANTO SE,**
- **SE E SOLO SE (SSE)**

1) Per poter comandare a un sergente, è …………. essere un capitano.
(NOTA: i "gradi" dell'esercito sono, dal basso verso l'alto:
soldato semplice, caporale, sergente, maresciallo, tenente, capitano, maggiore, colonnello, generale).

2) Per poter concludere che un numero intero è pari, è ………… sapere che è multiplo di 4.

3) Un numero intero è pari …..…….. è multiplo di 4.

4) Condizione ………... affinché un numero intero sia dispari, è che il suo quadrato sia dispari.

5) Un intero è dispari ……...… il suo quadrato è dispari.

6) Condizione ………… perché una persona residente in Italia possa votare alle elezioni politiche, è che abbia compiuto i 18 anni.

7) Una persona residente in Italia può votare alle elezioni politiche …..…..… ha compiuto 18 anni.

8) Per fare una buona pastasciutta, è ………… ricordarsi di salare la pasta.

9) Sia ABCD un quadrilatero. Affinché ABCD sia un rettangolo, è …..…..... che abbia le diagonali uguali.

10) Condizione ………… affinché un numero intero sia maggiore di 100, è che sia maggiore di 50.

11) Condizione ………… affinché un numero intero sia divisibile per 10, è che sia divisibile per 5.

12) Condizione ………… affinché un triangolo abbia i tre lati uguali, è che abbia i tre angoli uguali.

13) Un triangolo è equilatero ………… è equiangolo.

14) Condizione ………… affinché un quadrilatero sia un rombo, è che abbia le diagonali perpendicolari.

15) Condizione ………… affinché un quadrilatero sia un parallelogrammo, è che le sue diagonali si taglino scambievolmente per metà.

16) Condizione ………… affinché due angoli siano uguali, è che abbiano i lati paralleli e concordi.

17) Condizione ………… affinché un parallelogrammo sia un rombo, è che abbia le diagonali perpendicolari.

18) Condizione ………… affinché un quadrilatero abbia le diagonali perpendicolari, è che abbia due lati consecutivi uguali fra loro, e gli altri due pure uguali fra loro.

19) Condizione ………… affinché due triangoli siano uguali, è che abbiano rispettivamente uguali i tre lati.

20) Un quadrilatero è un parallelogrammo ………… ha gli angoli opposti uguali.

ESERCIZI (risposte a pag. 377)

Di ciascuna delle seguenti implicazioni, scrivi

- **la contronominale**
- **la contraria**
- **l'inversa**

stabilendone il valore di verità e confrontandolo con il valore di verità dell'implicazione iniziale.

1) *Se un intero è primo, allora è dispari* [Metti una croce sulla risposta corretta:] VERA / FALSA

Contronominale:	VERA/FALSA
Contraria:	VERA/FALSA
Inversa:	VERA/FALSA

2) *Se un intero è divisibile per 10, allora è divisibile anche per 5* VERA / FALSA

Contronominale:	VERA/FALSA
Contraria:	VERA/FALSA
Inversa:	VERA/FALSA

3) *Se un triangolo ha i tre lati uguali, allora ha anche i tre angoli uguali* VERA / FALSA

Contronominale:	VERA/FALSA
Contraria:	VERA/FALSA
Inversa:	VERA/FALSA

4) *Se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, allora ha i quattro lati uguali* VERA / FALSA

Contronominale:	VERA/FALSA
Contraria:	VERA/FALSA
Inversa:	VERA/FALSA

5) *Se Cristina è ricoverata all'ospedale, allora ha partorito* VERA / FALSA

Contronominale:	VERA/FALSA
Contraria:	VERA/FALSA
Inversa:	VERA/FALSA

ESERCIZI su implicazione e biimplicazione logica, Prima Legge delle Inverse … **con risposte a pag. 377**
(da test di ammissione all'Università: 1, 4, 6, 7 Architettura, 2, 5 Medicina, 3 Veterinaria, 9 Politecnico)

1) La maestra dice a Pierino: *"Se risolvi correttamente due esercizi su cinque, ti darò la sufficienza"*.
Pierino non prende la sufficienza. Dunque, necessariamente Pierino:
A) ha risolto correttamente un esercizio B) ha risolto correttamente un esercizio e ne ha sbagliato un altro
C) non ha risolto correttamente nessun esercizio D) ha risolto correttamente al più un esercizio
E) ha risolto due esercizi, ma con errori

2) Si completi correttamente il seguente ragionamento ipotetico:
Se non avessi avuto talento non saresti diventato artista; ma sei diventato artista dunque
A) sei artista B) sarai artista C) non avrai talento D) non hai talento E) hai talento

3) L'affermazione "quando mangio troppo mi viene mal di stomaco" implica che:
A) non ho mal di stomaco pur avendo mangiato troppo
B) a volte capita che non abbia mal di stomaco pur avendo mangiato troppo
C) se ho mal di stomaco vuol dire che ho mangiato troppo
D) se non mi viene mal di stomaco allora non ho mangiato troppo
E) o mangio troppo o mi viene mal di stomaco

4) Per un intervallo *I* di numeri reali vale la seguente proprietà: *I è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*
Senza che tu debba conoscere il significato dei termini in oggetto, scegli tra le seguenti affermazioni l'unica che consegue necessariamente dalla proprietà enunciata.
A) Se I è limitato ma non compatto, allora I è chiuso B) Se I non è limitato, allora I non è compatto
C) Se I è chiuso e compatto, allora I non è limitato D) Se I è chiuso oppure è limitato, allora I è compatto
E) Se I non è chiuso oppure non è limitato, allora I è compatto

5) Quale delle seguenti proposizioni equivale a dire che
<condizione sufficiente affinché la proposizione Q sia vera è che sia vera la proposizione P> ?
A) Se Q è vera, allora P è vera B) Se P è vera, allora Q è vera
C) Se P è falsa, allora Q è falsa D) P è falsa se e solo se Q è falsa E) P è vera se e solo se Q è vera

6) Alessandro afferma: *Se Rossi parte in pole position arriva primo.*
Quale delle seguenti proposizioni è la NEGAZIONE di quella di Alessandro?
A) Se Rossi non parte in pole position non vince
B) Rossi può non vincere anche se parte in pole position
C) Rossi non vince mai ogni volta che parte in pole position
D) Rossi può non partire in pole position e non vincere
E) Rossi può arrivare primo anche se non parte in pole position

7) Se Salvatore ha superato il test e Carmela ha superato il test, allora anche Benedetto ha superato il test.
Però Salvatore non ha superato il test. Quindi:
A) Benedetto non ha superato il test B) Benedetto oppure Carmela non hanno superato il test
C) Benedetto potrebbe avere superato il test D) Benedetto non ha superato il test e Carmela ha superato il test
E) se neppure Carmela ha superato il test, Benedetto non ha superato il test

8) Anna, Bruno, Carlo e Daniela stanno valutando se partire per Cortina il prossimo fine settimana.
Si sa che: se parte Carlo, parte anche Daniela; se non parte Anna, non parte nemmeno Daniela;
se parte Anna, lo fa pure Bruno. Quale delle seguenti affermazioni può essere dedotta?
A) Non parte nessuno B) Partono Anna e Bruno C) Partono tutti
D) Se non parte Bruno, non parte nessuno E) Se parte Anna, parte anche Carlo

9) In base alle tue conoscenze di Geometria, riempi i puntini con la locuzione corretta fra
"necessaria" (N), "sufficiente" (S), "necessaria e sufficiente "NS"; "SE", "SOLO SE", "se e solo se" (SSE):
a) Un triangolo ha due angoli uguali … ha due lati uguali
b) Condizione … affinché un quadrilatero abbia le diagonali perpendicolari, è che abbia tutti i lati uguali
c) Un quadrilatero ha i lati opposti a due a due paralleli … questi lati opposti sono a due a due uguali
d) Condizione … affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali, è che abbia i 4 angoli di 90°
e) Condizione … affinché un triangolo sia isoscele, è che la mediana e l'altezza relative a un lato coincidano
f) Due rette sono parallele … formano con una trasversale angoli corrispondenti uguali
g) In un poligono convesso la somma degli angoli interni è di 540° … i lati sono 5
h) Condizione … affinché un quadrilatero abbia i lati opposti uguali, è che abbia gli angoli opposti uguali
i) Un quadrilatero ha i 4 angoli retti … ha le diagonali fra loro uguali
l) Un triangolo è rettangolo … la mediana relativa a un lato è uguale a metà del lato stesso
m) Condiz. … affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali, è che sia un trapezio isoscele o un rettangolo

13. REGOLE DI INFERENZA

Consideriamo la proposizione: $\boxed{\left[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \overline{r}\right] \to \overline{p}}$

Essa è (come si verifica facilmente, sia col ragionamento diretto che con la tavola di verità) una *tautologia*.
Ci interessa osservare che si tratta di una tautologia della forma $(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \to \ldots$

> Una tautologia che si presenta sotto la forma $\boxed{(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \to \ldots}$
> vale a dire, **una TAUTOLOGIA che sia un' IMPLICAZIONE, nella quale L'ANTECEDENTE È UNA CONGIUNZIONE DI DUE O PIÙ PROPOSIZIONI, viene detta REGOLA DI INFERENZA (= REGOLA DI DEDUZIONE, REGOLA DI RAGIONAMENTO)**

In effetti: supponiamo che, in una determinata situazione, tutte le "premesse"
(cioè, le proposizioni che occupano i puntini fra parentesi) siano vere;
sapendo che l'implicazione è una tautologia, cioè è sempre vera, ne potremo DEDURRE con sicurezza
che la conclusione (ossia, la proposizione che occupa i puntini dopo la freccia) è vera.

Abbiamo sfruttato uno "**schema di ragionamento**" che ci ha aiutato, a partire da certe premesse,
a trarre una conclusione corretta.

Applicazione. Supponiamo di sapere che sono vere le seguenti proposizioni:

"Se Bobi ha capito l'addestramento, allora Bobi farà scappare il postino"
"Se il postino scapperà, allora il direttore dell'ufficio postale mi telefonerà per protestare"
"Il direttore dell'ufficio postale non mi ha telefonato"

Per la regola di inferenza $\boxed{\left[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \overline{r}\right] \to \overline{p}}$, possiamo allora dedurre

"Bobi non ha capito l'addestramento".

Forse questo esempio ti ha un po' deluso, perché non è che ci fosse assoluto bisogno di scomodare
le "tautologie" o le "tavole di verità" o le "regole di inferenza" per trarre questa conclusione sul povero Bobi.

In effetti, molte delle principali regole di inferenza, alcune delle quali vengono persino indicate
con nomi particolari, appaiono piuttosto banali e scontate.
Tuttavia, non sarà del tutto inutile elencarne alcune:
quelle banali, se non altro, serviranno a classificare in modo schematico ed ordinato
i principali tipi di ragionamento di cui ci serviamo nella vita di tutti i giorni.

$\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$	Regola del "**modus ponens**"
$\left[(p \to q) \wedge \overline{q}\right] \to \overline{p}$	Regola del "**modus tollens**"
$\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$	"**Sillogismo ipotetico**"
$\left[(p \vee q) \wedge \overline{q}\right] \to p$	"**Sillogismo disgiuntivo**"
$\left[\overline{p \wedge q} \wedge q\right] \to \overline{p}$	
$\left[(p \leftrightarrow q) \wedge (\overline{q} \to r) \wedge (p \to r)\right] \to r$	(tanto per dare un esempio di regola di inferenza non troppo ovvia)

Osserviamo, per terminare, che il "**modus tollens**"
può essere visto come un'ennesima variazione sul vecchio tema della "**Prima Legge delle Inverse**".

Ti segnalo che **in molti libri di testo le regole di inferenza
vengono "raffigurate" in un modo diverso da quello che abbiamo scelto noi**:

ad esempio, anziché scrivere $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$ spesso si scrive $\begin{array}{c} \boldsymbol{p \to q} \\ \underline{\boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{q} \end{array}$

(suggestivo! E' un po' come se la conseguenza venisse vista come la "somma", il "risultato" delle premesse).

Il significato della schematizzazione è sempre lo stesso, ossia la scrittura equivale ad affermare che
"se sono vere le premesse $p \to q$ e p, allora ne consegue la verità di q".

ESERCIZI (risposte a pag. 377)

1) Controlla la correttezza di alcune, a tua scelta, fra le 6 regole della tabella precedentemente riportata; cioè, considerata una di tali implicazioni, costruiscine la tavola di verità per constatare che è una tautologia.

2) Considera il seguente ragionamento:

Se c'è la luna piena, i coyote ululano.
Non c'è la luna piena.
Quindi, ne deduco che i coyote non ululano.

Ti sarai reso conto subito che NON si tratta di un ragionamento corretto. I coyote potrebbero benissimo ululare anche in assenza di luna piena, ad esempio nel periodo degli amori. Per esercizio, controlla la sua non correttezza schematizzandolo e verificando che l'implicazione ottenuta non è una tautologia.

3) Lo schema di ragionamento

$$\left[(a \to c) \wedge (b \to \bar{c})\right] \to (a \to \bar{b})$$

è corretto?
Cerca dapprima di giungere alla risposta senza utilizzare la tavola di verità. Successivamente, a titolo di conferma, compila anche la tavola di verità.

4) *Se $A \subseteq X$, allora,*
nel caso sia $B \subseteq X$,
è anche $C \subseteq X$.
Se $B \subseteq X$, anche $A \subseteq X$.
Ma C non è incluso in X.
Quindi, B non è incluso in X.

Il ragionamento fatto è corretto?
Rispondi ragionando, ed eventualmente aiutandoti con una tavola di verità.

5) *Per passare l'esame, è sufficiente*
sapere a memoria l'indice del libro di testo.
Io imparerò a memoria l'indice del libro di testo,
solo se rimarrò a casa nel fine settimana.
Ma io andrò via per il fine settimana.
Quindi non passerò l'esame.

Schematizza il ragionamento, e stabilisci se è corretto.

6) Quanti dei seguenti ragionamenti risultano logicamente attendibili? (*dal Test di Ingresso a Medicina* 2006)

PRIMO	*Ogni volta che conquista una vetta, Messner si concede una bella bevuta.* *Adesso ha appena conquistato una vetta.* *Dunque si concederà una bella bevuta.*
SECONDO	*Ogni volta che vince il Tour de France, Armstrong si concede una bevuta.* *Adesso si concede una bevuta.* *Dunque ha appena vinto il Tour de France.*
TERZO	*Rossi ha appena vinto una gara.* *Ogni volta che vince una gara, Rossi fa impennare la moto.* *Dunque adesso Rossi farà impennare la moto.*
QUARTO	*Bearzot sta fumando la pipa.* *Dopo aver vinto una partita, Bearzot fuma sempre la pipa.* *Dunque Bearzot ha appena vinto una partita.*

14. QUANTIFICATORI

$\forall$ ("*per ogni*", "*per qualsiasi*", "*qualunque sia*"): "*quantificatore UNIVERSALE*"
$\exists$ ("*esiste*") *la cui negazione è* $\nexists$ ("*non esiste*"): "*quantificatore ESISTENZIALE*"

Per imparare a trafficare coi quantificatori, ecco un buon **ESERCIZIO**.
Leggi ad alta voce le seguenti proposizioni; poi **stabilisci**, per ciascuna di esse, **se è vera o falsa.**

Risposte a pag. 377; clicca sulla freccia per chiarimenti ⇨

1) $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists y \in \mathbb{Z} \;/\; x+y=0$

2) $\exists x \in \mathbb{Z} \;/\; \forall y \in \mathbb{Z}, \quad x+y=0$

3) $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists y \in \mathbb{Z} \;/\; x \cdot y=0$

4) $\exists x \in \mathbb{Z} \;/\; \forall y \in \mathbb{Z}, \quad x \cdot y=0$

5) $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \exists y \in \mathbb{Q} \;/\; x \cdot y=1$

6) $\forall x \in \mathbb{Q}-\{0\}, \quad \exists y \in \mathbb{Q} \;/\; x \cdot y=1$

7) $\exists x \in \mathbb{Z} \;/\; 2x-1=0$

8) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \,/\, x \in A \wedge x \notin B$

Tieni presente che:

$\mathbb{Q}$ *indica l'insieme dei numeri razionali (relativi)*

$\mathbb{Z}$ *indica l'insieme degli interi relativi.*
Dunque $\mathbb{Z}$ *è un sottoinsieme di* $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}_a$ *indica l'insieme dei numeri razionali assoluti*
$\mathbb{R}$ *è l' insieme dei numeri reali (relativi)*
$\mathbb{R}_a$ *è l' insieme dei numeri reali assoluti*

La "classica" **definizione schematica di sottoinsieme**:

$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)}$ ("A è sottoinsieme di B se e solo se quando x appartiene ad A, allora x appartiene anche a B")

può essere **riscritta in modo equivalente utilizzando i quantificatori**:

$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \quad x \in B)}$ ("A è sottoinsieme di B se e solo se per ogni x appartenente ad A, x appartiene anche a B")

E' importante saper scrivere correttamente la **negazione di una proposizione contenente quantificatori**.
Facciamo qualche esempio (ricorda che "/", ":" si leggono "*tale* (*o tali*) *che*"):

	Proposizione	*Negazione*
9)	$\forall x \in I, \; x \in J$	$\exists x \in I \,/\; x \notin J$
10)	$\forall x \in \mathbb{R}, \; \exists y \in \mathbb{R} \,/\; xy=1$	$\exists x \in \mathbb{R} \,/\; \forall y \in \mathbb{R}, \; xy \neq 1$
11)	$\exists a \in \mathbb{R}: \; \forall b,c \in \mathbb{R}, \; a \cdot b \cdot c=0$	$\forall a \in \mathbb{R}, \; \exists b,c \in \mathbb{R}: \; a \cdot b \cdot c \neq 0$

♥ C'è una **regola generale per negare una proposizione contenente quantificatori**: essa dice di
♪ **mutare ogni quantificatore universale in esistenziale, e viceversa**
♫ **e sostituire la proposizione cui si riferiscono i quantificatori con la sua negazione**.

ESERCIZI: fra le seguenti proposizioni contenenti quantificatori, riconosci quali sono quelle false, e in tal caso scrivine la negazione.

	Proposizione	*V o F ?*	*Negazione (in caso di falsità dalla proposizione iniziale)*
12)	$\forall x \in \mathbb{R}_a, \; x^2 \geq x$		
13)	$\exists a \in \mathbb{N} \;/\; a^2=20$		
14)	$\forall n \in \mathbb{N}, \; n^2+n$ *è pari*		
15)	$\exists x \in \mathbb{R} \;/\; x=1/x$		
16)	$\exists x \in \mathbb{R} \;/\; x=-1/x$		
17)	$\forall x,y \in \mathbb{R} \;\; x^2=y^2 \Rightarrow x=y$		

Risposte a pag. 377; clicca sulla freccia per chiarimenti ⇨

ESERCIZI (negazione di proposizioni con quantificatori). **Risposte a pag. 377.**

1) Se non è vero che esista uno studente che ha fatto giuste tutte le domande di un certo test, allora:
A) c'è uno studente che non ne ha azzeccata neppure una
B) esiste almeno uno studente che ne ha sbagliata una o più
C) ognuno degli studenti le ha sbagliate tutte
D) ciascuno studente ne ha sbagliata almeno una
E) tutti gli studenti ne han fatta giusta almeno qualcuna

2) Aldo dice: "Dài, ci sarà chi saprà risolvere almeno uno dei miei problemi! ...".
Bruno ribatte: "Non è mica vero!".
Cosa afferma Bruno?
A) Che qualcuno non sa risolvere tutti i problemi di Aldo
B) Che tutti sanno risolverli tutti
C) Che nessuno è in grado di risolvere nemmeno uno dei problemi in questione
D) Che nessuno è in grado di risolvere tutti i problemi
E) Che qualcuno sa risolverli tutti

I seguenti sono tratti da test di ingresso universitari: 3, 5, 7, 8 *Architettura*; 4*, Veterinaria*; 6*, Medicina*

3) Pierino (lo sbruffone) afferma: "Ogni volta che gioco a tombola, vinco io!"
Il suo amico Carletto ribatte che questo non è vero. Carletto ha ragione; dunque necessariamente
A) una volta ha giocato a tombola con Pierino e ha vinto Pierino
B) ogni volta che ha giocato a tombola, Pierino ha perso
C) qualche volta Carletto ha giocato a tombola con Pierino e altri amici, e non ha vinto Carletto
D) ogni volta che non ha giocato a tombola con Pierino, ha vinto Carletto
E) almeno una volta Pierino ha giocato a tombola e non ha vinto

4) Negare che "ogni uomo ha un cane" equivale a dire che:
A) nessun uomo ha un cane B) tutti gli uomini non hanno cani C) esistono uomini senza cane
D) tutti i cani sono di ogni uomo E) ogni uomo non ha un cane

5) *Credevo che tutti i medici avessero un rimedio per ogni male, ma l'esperienza mi ha costretto a ricredermi.*
Quale delle seguenti affermazioni consegue necessariamente dalla premessa?
A) Per ogni male, c'è un medico che non sa porvi rimedio
B) C'è un male per cui nessun medico ha un rimedio
C) I medici non hanno rimedio per nessun male
D) Esiste un medico che non ha un rimedio per un certo male
E) Ogni medico manca del rimedio per almeno un male

6) Se è vero che «non tutti i mali vengono per nuocere»,
sarà necessariamente vera anche UNA delle affermazioni seguenti:
A) i mali non nuocciono B) quelli che nuocciono non sono mali
C) se non vengono per nuocere non sono mali D) qualche male non viene per nuocere
E) se sono mali non vengono per nuocere

7) Un grande teorico dei numeri ha scoperto i numeri *troppobelli*, e, avendo osservato che tutti quelli che ha scoperto sono pari, congettura che esistano solo numeri *troppobelli* pari.
Un suo allievo, studiando con cura questi numeri, afferma che la congettura del maestro è falsa.
Dunque l'allievo sostiene che:
A) nessun numero pari è *troppobello* B) c'è almeno un numero pari che non è *troppobello*
C) esiste solo un numero finito di *troppobelli* pari D) tutti i numeri *troppobelli* sono dispari
E) c'è almeno un numero *troppobello* dispari

8) Nel libero Stato di Burgundia tutti gli abitanti sono biondi oppure bruni. Inoltre
NON E' VERO che in ogni città di Burgundia c'è almeno una casa in cui tutti gli abitanti sono biondi.
Allora necessariamente in Burgundia:
A) c'è almeno una città dove c'è almeno un bruno in ogni casa
B) in ogni città c'è almeno una casa in cui tutti gli abitanti sono bruni
C) in ogni città c'è almeno un bruno in ogni casa
D) c'è almeno una città dove ci sono dei biondi in ogni casa
E) c'è almeno una città dove c'è almeno una casa in cui almeno un abitante è bruno

15. SCHEMI DI RAGIONAMENTO CON QUANTIFICATORI: COME CONTROLLARE LA LORO VALIDITA' ?

Abbiamo visto nel paragrafo 13 che le "regole di inferenza", ovvero le tautologie della forma

$$\boxed{(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \rightarrow \ldots}$$

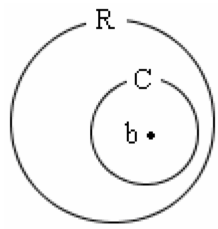
esprimono dei veri e propri "schemi di ragionamento", tramite i quali, se le premesse sono tutte vere, si è sicuri che anche la conclusione sarà vera.

Bene: **esistono anche "schemi di ragionamento" la cui validità non è controllabile per mezzo di una tavola di verità, in quanto le proposizioni coinvolte contengono dei quantificatori, e il ragionamento è basato su questi, cosicché occorre "guardare all'interno" delle proposizioni per capire se lo schema è valido o meno.**
In questi casi, lo strumento più comodo per rendersi conto se lo schema di ragionamento è corretto consiste nei diagrammi di Venn.

Esempi:

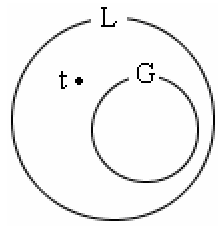
Tutti i conigli sono roditori.
Bunny è un coniglio.
Quindi, Bunny è un roditore.

(Banale, ma corretto!)



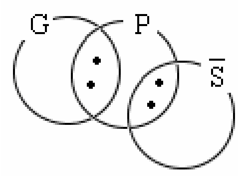
Tutti i gatti amano il latte.
Tom non è un gatto.
Quindi, Tom non ama il latte.

(Non corretto, come mostra il diagramma: t deve trovarsi all'esterno di G, d'accordo, ma nonostante questo vincolo è possibilissimo che si trovi all'interno del "recinto" L!)



Alcuni giovani sono pigri.
Qualche persona pigra non ha mai praticato uno sport.
Quindi, c'è qualche giovane che non ha mai fatto sport.

(Scorretto. La figura qui a fianco, compatibile con le due premesse, non va d'accordo con la conclusione)



ESERCIZI - Stabilisci se sono corretti i seguenti ragionamenti (risposte a pag. 377)

Nessun mammifero fa le uova.
Tutti i felini sono mammiferi. (NOTA)
Quindi, nessun felino fa le uova.

NOTA - Osserviamo che la premessa sui mammiferi è falsa (i monotremi, di cui fan parte gli ornitorinchi, sono mammiferi ma fanno le uova); tuttavia, se si guarda alla "struttura" del ragionamento …

Tutte le sberle fanno male.
Alcune sberle sono educative.
Quindi, alcune cose che fanno male sono educative.

Tutti i trichechi adulti pesano più di un quintale.
Nessun animale dello zoo di Roma è un tricheco adulto
Quindi, nessun animale dello zoo di Roma pesa più di un quintale.

Alcuni matematici sono egoisti.
Fra le persone non serene ci sono parecchi egoisti.
Quindi, alcuni matematici non sono sereni.

Gli allibratori sono disonesti.
Nessun abitante di Collefiorito dorme male la notte.
I disonesti dormono male la notte.
Quindi nessun allibratore è abitante di Collefiorito.

Tutti i miei amici vanno in montagna.
Qualche persona che va in montagna butta le cartacce sui sentieri.
Quindi, qualcuno fra i miei amici butta le cartacce sui sentieri.

Tutte le ragazze bionde ti piacciono.
Tutte le ragazze della mia classe sono bionde.
Quindi, tutte le ragazze che ti piacciono stanno nella mia classe

LOGICA DEDUZIONE …

ESERCIZI sui ragionamenti con quantificatori dai test di Ingresso universitari **(risposte a pag. 377)**

1) Se è vero che:
- tutte le persone generose sono serene;
- Lisa è generosa;
- Sara è serena;

si può dedurre che:

A) le persone non generose non sono serene
B) Sara non è generosa
C) Lisa è serena
D) le persone serene sono generose
E) Sara è generosa

(Architettura)

2) Se sono vere entrambe le affermazioni
- qualche studente della classe quinta A ha gli occhiali
- qualche studente della classe quinta A tifa Bologna

allora:

A) tutti gli studenti della quinta A tifano Bologna
B) c'è almeno uno studente della quinta A che ha gli occhiali e tifa Bologna
C) c'è almeno uno studente della quinta A che porta gli occhiali e non tifa Bologna
D) c'è almeno uno studente della quinta A che non ha gli occhiali e non tifa Bologna
E) non si può escludere che esista uno studente della quinta A che non ha gli occhiali e non tifa Bologna

(Architettura)

3) Nello stato di Burgundia, una norma di circolazione stabilisce che ogni automobile, se non è verniciata di rosso, deve avere gomme chiodate e vetri oscurati.
Poiché questa norma viene rigorosamente rispettata, possiamo affermare con sicurezza che:

A) non ci sono automobili rosse con gomme chiodate e vetri oscurati
B) ogni automobile verniciata di rosso ha gomme chiodate e vetri oscurati
C) ogni automobile è rossa oppure ha vetri oscurati
D) c'è almeno un'automobile che ha vetri oscurati oppure non è verniciata di rosso
E) ogni automobile che ha gomme chiodate e vetri oscurati è rossa

(Architettura)

4) Il signor Candido constata che
a) Giovanna ha fatto una rapidissima carriera come economista.
Il signor Candido ne deduce che
b) Giovanna non è una persona onesta.
La ragione necessaria e sufficiente del passaggio logico che opera il signor Candido dalla constatazione del fatto a) al giudizio b)
è la sottintesa convinzione che (UNA SOLA IPOTESI E' CORRETTA):

A) solo alcune persone eccezionali facciano onestamente carriera come economisti
B) nessuna persona onesta faccia carriera in campo economico
C) le persone disoneste facciano rapida carriera solo in campo economico
D) nessuna economista onesta faccia rapida carriera nel suo campo
E) tutte le donne-economiste siano disoneste

(Medicina)

5) Tutti i cani sono fedeli e tutti gli animali fedeli sono mammiferi.
Alcuni mammiferi possono passeggiare sui tetti.
Dunque
…
Una sola delle deduzioni qui elencate completa correttamente il sillogismo:

A) è impossibile che alcuni cani non possano passeggiare sui tetti
B) è impossibile che alcuni mammiferi non siano fedeli
C) è impossibile che alcuni cani possano passeggiare sui tetti
D) non è impossibile che alcuni cani possano passeggiare sui tetti
E) gli animali che possono passeggiare sui tetti sono mammiferi

(Medicina)

6) Nessun ingenuo è cattivo - qualche cattivo è adulto - dunque ……………….. non è ingenuo.
S'individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:

A) qualche ingenuo B) qualche cattivo C) ogni cattivo D) qualche adulto E) ogni adulto

(Medicina)

7) Tutti i condottieri sono coraggiosi - nessun coraggioso è dissimulatore - dunque …………….. è condottiero.
Si individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:
A) nessun coraggioso B) qualche condottiero C) qualche dissimulatore
D) ogni dissimulatore E) nessun dissimulatore

(Medicina)

8) Se è vero che «chi disprezza compra; chi loda vuol lasciare»
sarà necessariamente vera anche UNA delle affermazioni seguenti:
A) chi vuol comprare, loda B) chi vuol lasciare, disprezza C) chi non vuol comprare, disprezza
D) chi vuol lasciare, non loda E) chi disprezza, non vuol lasciare

(Medicina)

9) Se è vero che «tutti gli intellettuali sono interlocutori noiosi»,
sarà necessariamente VERA anche UNA delle affermazioni seguenti:
A) tutti gli interlocutori sono intellettuali noiosi B) nessun interlocutore noioso è intellettuale
C) tutti i noiosi sono intellettuali D) tutti gli interlocutori sono noiosi
E) alcuni interlocutori noiosi sono intellettuali

(Medicina)

10) Nessun minerale è animato - qualche esistente è animato - dunque .... non è minerale.
S'individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:
A) qualche esistente B) ogni animato C) qualche minerale D) ogni esistente E) ogni minerale

(Medicina)

11) Tutti i piccioni mangiano le fave - alcuni uccelli non mangiano le fave - dunque .... non sono piccioni.
S'individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:
A) le fave B) alcuni piccioni C) alcune fave D) tutti gli uccelli E) alcuni uccelli

(Medicina)

12) Quale di questi ragionamenti è corretto da un punto di vista deduttivo?
A) Carlo frequenta la prima elementare.
La maggioranza dei bambini che frequentano la prima elementare ha sei anni, quindi Carlo ha sei anni
B) Carlo ha 4 anni. I bambini sopra 4 anni sono biondi. Quindi Carlo non è biondo
C) Carlo ha 4 anni. I bambini di 4 anni sono tutti biondi. Quindi Carlo è biondo
D) Carlo ha 4 anni. I bambini sopra 4 anni non sono biondi. Quindi Carlo è biondo
E) se Carlo avesse sei anni e frequentasse la prima elementare, e se tutti gli altri bambini di quella classe fossero biondi, Carlo sarebbe biondo

(Medicina)

13) Quale delle seguenti affermazioni equivale a dire:
"Non tutti i laureati in Veterinaria fanno il veterinario"?
A) Vi è almeno un laureato in Veterinaria che non fa il veterinario
B) Nessun laureato in Veterinaria fa il veterinario
C) Tutti i laureati in Veterinaria fanno i veterinari
D) Non esiste un laureato in Veterinaria che non faccia il veterinario
E) Tutti i laureati in Veterinaria fanno un lavoro diverso dal veterinario

(Veterinaria)

14) Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
A) fra i numeri pari ci sono tutti i multipli di 12 B) tra i multipli di 12 ci sono tutti i numeri pari
C) i multipli di 12 sono tutti pari D) ci sono numeri pari che non sono multipli di 12
E) ci sono numeri pari che sono multipli di 12

(Veterinaria)

15) Tutti gli eccessi sono biasimevoli - alcune passioni non sono biasimevoli -
dunque .... non sono eccessi.
S'individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:
A) alcuni eccessi B) alcune passioni C) tutte le passioni D) tutti gli eccessi E) tutti i biasimevoli

(Veterinaria)

16) Tutti i notai sono ricchi. Nessun ricco è una persona insicura. Quindi ………………………. è un notaio
Si individui il CORRETTO completamento del sillogismo:
A) nessuna persona insicura B) qualche persona insicura
C) qualche ricco D) ogni ricco E) soltanto un ricco

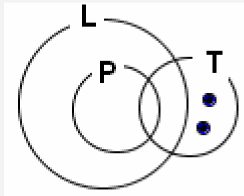
(Veterinaria)

ARISTOTELE E I SILLOGISMI

Il sommo filosofo greco Aristotele (384-322 a. C.)
era una mente di eccezionali qualità, con un formidabile senso della regolarità e dell’ordine.
Le sue riflessioni sulle più semplici e fondamentali strutture del pensiero razionale lo portarono ad analizzare il cosiddetto “sillogismo”, una sequenza di tre proposizioni (Premessa 1 + Premessa 2 = Conclusione) l’ultima delle quali rappresenta una conseguenza logica delle due precedenti.

Ecco un esempio di sillogismo:

Tutti i Presidi hanno la laurea
Qualche cittadino di Trieste non ha la laurea
Quindi qualche cittadino di Trieste non è un Preside



Questo sillogismo è corretto.

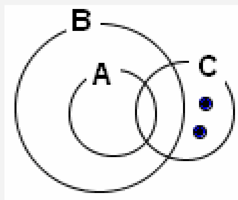
Ed ecco un altro esempio:

Tutte le gomme pesano almeno un chilo
Qualche oggetto nella mia cartella pesa meno di un chilo
Quindi qualche oggetto nella mia cartella non è una gomma

Questo sillogismo è corretto, ed è del tutto equivalente al precedente.
Non ci interessa il fatto che la prima premessa sia falsa;
è *la forma del ragionamento* ad essere corretta,
è la *struttura* che “funziona”, indipendentemente dal suo contenuto.

Insomma: sia nel caso dei Presidi che in quello delle gomme siamo di fronte a un sillogismo del tipo

Tutti gli A sono B
Qualche C non è B
Quindi qualche C non è A



Un sillogismo di questa “forma” è corretto, esprime un ragionamento valido,
nel senso che ogniqualvolta le due premesse siano vere,
conduce sempre a una conclusione vera: non accade mai, insomma,
che le due premesse possano essere vere ma la conclusione falsa.

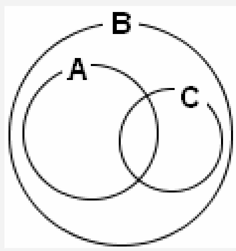
Ancora:

Tutti i mammiferi hanno il sangue caldo
Tutti gli equini hanno il sangue caldo
Quindi tutti gli equini sono mammiferi

Questo sillogismo NON è invece corretto.
Non importa che la conclusione sia vera
(come del resto entrambe le premesse);
è la concatenazione logica che non “va”!

Per rendercene meglio conto, portiamolo sotto la forma astratta

Tutti gli A sono B
Tutti i C sono B
Quindi tutti i C sono A



Un diagramma di Venn ci aiuta a cogliere la non correttezza del ragionamento:
non è detto che tutti i C debbano per forza essere A!!!

“Quando noi affermiamo o neghiamo qualcosa di qualcos’altro, cioè giudichiamo o formuliamo proposizioni, noi non ragioniamo ancora. E nemmeno, ovviamente, noi ragioniamo quando formuliamo una serie di giudizi ed elenchiamo una serie di proposizioni fra loro sconnesse. Noi ragioniamo, invece, quando passiamo da giudizi a giudizi, da proposizioni a proposizioni che abbiano fra loro determinati nessi, e che siano, in certo qual modo, le une cause di altre, le une antecedenti, le altre conseguenti.
Non c’è ragionamento, se non c’è questo nesso, questa consequenzialità.” (G. Reale, *Introduzione ad Aristotele*)

“Un ragionamento è una successione di enunciati collegati fra loro da inferenze [= procedimenti deduttivi] che consentono di passare da alcune premesse date ad una certa conclusione […]. Possiamo anche dire che il ragionamento è finalizzato a giustificare una certa tesi, espressa nella conclusione, a partire da certe premesse.
[…] Le premesse sono enunciati, e come tali sono vere o false, mentre l’inferenza può essere valida o invalida a seconda che segua correttamente o meno le leggi logiche.” (G. Boniolo e P. Vidali, *Strumenti per ragionare*)

Un sillogismo è, in definitiva, una sequenza di tre proposizioni

Premessa 1
Premessa 2

Conclusione

dove ciascuna proposizione può essere della forma

- UNIVERSALE se contiene “ogni”, “PARTICOLARE” se contiene “qualche”
- AFFERMATIVA o NEGATIVA

e quindi si può descrivere la “forma” di ciascuna delle tre proposizioni dicendo che si tratta di una proposizione

- universale affermativa (A, prima vocale di “AFFIRMO”): “tutti i P sono Q, ogni P è Q”
- oppure universale negativa (E, prima vocale di “NEGO”): “tutti i P non sono Q, nessun P è Q”
- oppure particolare affermativa (I, seconda vocale di “AFFIRMO”): “qualche P è Q, esiste un P che è Q”
- o particolare negativa (O, seconda vocale di “NEGO”): “qualche P non è Q, esiste un P che non è Q”.

In questo modo, possiamo già avere ben $4^3 = 64$ diversi tipi di sillogismo: AAA, AAE, AAI, … fino a OOO.

Poi ogni tipo di sillogismo si distingue in 4 possibili “figure”, a seconda che il “termine medio”, quello che compare in entrambe le premesse - e non compare più nella conclusione - faccia: da soggetto nella 1^a premessa e da predicato nella 2^a (sp), oppure da predicato in entrambe (pp) , oppure … , come nella schematizzazione seguente, nella quale abbiamo indicato il “termine medio” sempre con Q:

I figura (sp)	II figura (pp)	III figura (ss)	IV figura (ps)
$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,Q\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,P$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,P\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,Q$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,Q\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,P$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,P\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,Q$
$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,R\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,Q$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,R\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,Q$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,Q\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,R$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,Q\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,R$
$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,R\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,P$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,R\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,P$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,R\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,P$	$\frac{\text{ogni}}{\text{qualche}}\,R\ \ \frac{\text{è}}{\text{non è}}\,P$

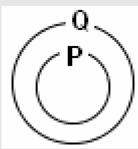
E allora, dato che per ciascuno dei 64 tipi ci sono 4 diverse “figure”, si hanno ben $64 \cdot 4 = 256$ sillogismi diversi.

Bene: **di questi 256 sillogismi, soltanto una piccola parte è corretta**; gli altri esprimono ragionamenti fallaci.

Ai vari sillogismi validi (che sono in totale 24, comprendendo anche quelli che per essere corretti richiedono di supporre che un determinato insieme non sia vuoto, e quelli che indeboliscono una conclusione “universale” sostituendola con la corrispondente “particolare”) la tradizione medievale ha dato dei nomi fascinosi: ad esempio,
B**A**RB**A**R**A** (che indicava il sillogismo **AAA sp**), C**E**L**A**R**E**NT (**EAE sp**), D**ARII** (**AII sp**),
F**E**R**IO** (**EIO sp**), F**E**ST**I**N**O** (**EIO pp**), F**E**R**I**S**O**N (**EIO ss**), FR**E**S**I**S**O**N (**EIO ps**), ecc. ecc.

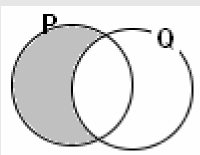
La correttezza o meno dei vari sillogismi può essere stabilita tramite i **diagrammi di Venn**, tenendo conto che:

“Tutti i P sono Q”
equivale a $P \subseteq Q$

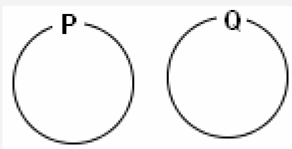


oppure $P - Q = \varnothing$

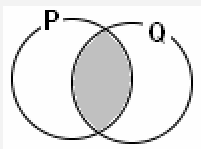
(sfondo grigio = insieme vuoto)



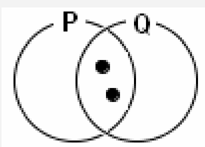
“Nessun P è Q”
equivale a $P \cap Q = \varnothing$



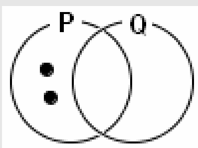
visualizzabile anche così:



“Qualche P è Q”
equivale a $P \cap Q \neq \varnothing$



“Qualche P non è Q”
equivale a $P - Q \neq \varnothing$



Esempio:
sarà corretto il ragionamento che segue?

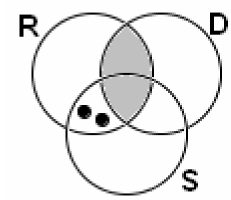
Nessun ricco ha i debiti.
Qualche ricco è spendaccione.
Quindi qualche spendaccione non ha i debiti.

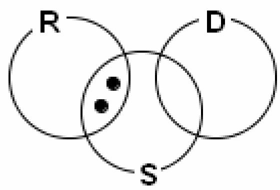
Riscritto in forma astratta, esso diventa:

Nessun R è D.
Qualche R è S.
Quindi qualche S non è D.

Si tratta di un sillogismo di tipo EIO, figura ss.

Rappresentiamo R, D, S nel modo che preferiamo:





… e vediamo che il sillogismo è CORRETTO.

NOTA 1 - Il famoso “Tutti gli uomini sono mortali; Socrate è un uomo; quindi Socrate è mortale” può rientrare in una delle forme “standard” di sillogismo se pensiamo di sostituire al posto di “Socrate” le parole “ogni *x* che è identico a Socrate”, “ogni *x* che coincide con Socrate”.

NOTA 2 - Si potrebbe obiettare che c’è ulteriormente le possibilità di “inventare” nuovi sillogismi, oltre ai 256 di cui si è parlato, scambiando la posizione delle due lettere nella conclusione; ma in realtà, così facendo, si rientrerebbe in casi di sillogismo già esaminati, come si può vedere scambiando l’ordine, che è irrilevante, delle due premesse.

ESERCIZI **(risposte a pag. 377)**

1) A) *Verifica che i seguenti sillogismi sono corretti.* B) *Il primo è della forma “AOO pp”; e gli altri quattro?*

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Tutti i P sono Q	Nessun P è Q	Tutti i P sono Q	Qualche Q è P	Qualche Q non è P
Qualche R non è Q	Ogni R è Q	Nessun R è Q	Ogni Q è R	Ogni Q è R
Qualche R non è P	Nessun R è P	Nessun R è P	Qualche R è P	Qualche R non è P

2) *Verifica che i seguenti sillogismi NON sono corretti*:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Ogni Q è P	Nessun P è Q	Ogni P è Q	Ogni Q è P	Qualche P è Q
Nessun R è Q	Nessun R è Q	Qualche Q è R	Nessun Q è R	Qualche R non è Q
Nessun R è P	Nessun R è P	Nessun R è P	Qualche R non è P	Qualche R non è P

3) *Verifica che il sillogismo*

Tutti i Q sono P
Tutti i Q sono R
Qualche R è P

non sarebbe, a ben guardare, corretto, e tuttavia diventa corretto se si suppone che l’insieme Q non sia …
[NOTA: Qualche R è P = Esiste almeno un R che è P]

4) *Stabilisci quali dei seguenti ragionamenti sono corretti e quali scorretti (nota che non tutti sono nella forma standard del sillogismo, ma comunque potrebbero essere ad essa ricondotti)*

(a) “Nessun cane sa leggere.
Tutti i barboncini sono cani.
Quindi nessun barboncino sa leggere”

(b) “Tutti gli ubriaconi sono teste calde.
Tutti i bergamaschi sono teste calde.
Quindi tutti i bergamaschi sono ubriaconi”

(c) “Tutti gli elefanti sono mammiferi.
Nessuna gallina è un elefante.
Quindi nessuna gallina è un mammifero”

(d) “Alcuni cantanti non sanno suonare.
Alcuni giovani non sanno suonare.
Quindi alcuni giovani non sono cantanti”

(e) “Nessuna persona onesta è violenta.
Alcuni politici sono onesti.
Nessun politico è violento”

(f) “Nessun pesce ha i polmoni.
Tutti i pesci sono animali che vivono sott’acqua.
Nessun animale che vive sott’acqua ha i polmoni”

(g) “Nessun pastore è vegetariano.
Qualche pastore è laureato.
Quindi qualche laureato non è vegetariano”

(h) “Tutti gli asini volano.
Alcuni asini sono carnivori.
Perciò qualche essere carnivoro vola”

(i) “Solo i maggiorenni possono votare.
Qualche persona che può votare è analfabeta.
Quindi alcuni maggiorenni sono analfabeti”

(l) “Gli avari sono scontrosi.
Alcuni ignoranti sono scontrosi.
Quindi alcuni avari sono ignoranti”

(m) “Alcuni filosofi hanno la testa fra le nuvole.
Alcune persone con la testa fra le nuvole sono geniali.
Quindi alcuni filosofi sono geniali”

(n) “Some small birds live on honey.
All birds that live on honey are colourful.
Hence, some colourful birds are small”

(o) “Nessuna mucca fa le uova.
Qualche animale che fa le uova ha il pelo.
Perciò qualche essere col pelo non è una mucca”

(p) “Tutti gli insegnanti sono pazienti.
Chi è paziente non urla.
Quindi nessuna persona che urla è un insegnante”

(q) “Nessuno, tranne gli iscritti all’Università, può entrare in aula.
Solo chi è studente è iscritto all’Università.
Quindi solo chi è studente può entrare in aula”

Qui sotto, la **tavola dei 24 sillogismi validi**. I 9 a destra, però, lo sono a patto di supporre non vuoto un certo insieme.

	AAA	EAE	AEE	AII	IAI	EIO	AOO	OAO	AAI	EAO	AEO	EAO	AAI	AAI
sp	BARBARA	CELARENT		DARII		FERIO			BARBARI	CELARONT				
pp		CESARE	CAMESTRES			FESTINO	BAROCO			CESARO	CAMESTROS			
ss				DATISI	DISAMIS	FERISON		BOCARDO				FELAPTON	DARAPTI	
ps			CALEMES		DIMARIS	FRESISON					CALEMOS	FESAPO		BAMALIP

16. RISPOSTE AD ALCUNI FRA I QUESITI DEL CAPITOLO DI LOGICA

pag. 355:

1) (a) $\overline{\mathrm{A}} \to \overline{\mathrm{B}}$ (b) $\overline{\mathrm{A} \to \mathrm{B}}$ (c) $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ (d) $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ (e) $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}$ (f) $\mathrm{A} \vee \left(\overline{\mathrm{A}} \to \mathrm{B}\right)$

2) (a) $\mathrm{A} \wedge \overline{\mathrm{B}}$
(b) $\mathrm{D} \to (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$
(c) $\left(\overline{\mathrm{A}} \wedge \overline{\mathrm{B}}\right) \to \mathrm{C}$
(d) $\mathrm{D} \leftrightarrow \left(\mathrm{C} \wedge \overline{\mathrm{A}}\right)$
(e) $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \left(\left(\mathrm{C} \wedge \overline{\mathrm{D}}\right) \vee \left(\overline{\mathrm{C}} \wedge \mathrm{D}\right)\right)$; oppure $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \left((\mathrm{C} \vee \mathrm{D}) \wedge \left(\overline{\mathrm{C} \wedge \mathrm{D}}\right)\right)$
(f) $\mathrm{D} \to \left(\overline{\mathrm{C}} \to \mathrm{A}\right)$
(g) $(\mathrm{D} \to \mathrm{C}) \wedge \left(\mathrm{D} \to \overline{\mathrm{B}}\right)$
(h) $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \to \left(\overline{\mathrm{D}} \to \mathrm{C}\right)$
(i) $\left(\left(\overline{\mathrm{B}} \wedge \overline{\mathrm{A}}\right) \vee \mathrm{D}\right) \to \mathrm{C}$
(l) $(\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})) \wedge \left(\overline{\mathrm{A}} \to (\mathrm{C} \wedge \mathrm{D})\right)$
(m) $\left((\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \leftrightarrow \overline{\mathrm{D}}\right) \wedge \left(\left(\overline{\mathrm{A}} \wedge \overline{\mathrm{B}}\right) \to (\mathrm{C} \to \mathrm{D})\right)$

3) Si hanno equivalenze solo nei casi (a), (c) 4) (c) 5) (b)

pag. 356: a, c, d, f, g sono tautologie, le altre no

pag. 357: 1a) Falsa 1b) Vera 1c) Falsa 2a) Vera 2b) Falsa 2c) Vera

pag. 359:

1) $\{4,8,12,16,20,24,...\}$; $\{6,12,18,24,30,36,...\}$; $a(x) \wedge b(x) = "x \textit{ è multiplo di } 12"$; 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24,...

2) $p(x) \wedge q(x) = "x \textit{ è multiplo di } 8" = q(x)$; $p(x) \vee q(x) = "x \textit{ è multiplo di } 4" = p(x)$; 4, 12, 20, 28, 36,...

3) a) $(3,5)$ b) $(2,7)$ c) $(3,5]$ d) $(2,7)$ e) $[2,7]$ f) $[0, 1/4)$ g) $(-3,+\infty)$ h) $\varnothing$
i) L'insieme che si indica, appunto, con $(-5,-1) \cup (2,7)$

4) $\mathbb{R}$; l'intervallo $(0, 5)$

5) a) $(5, 10)$ b) $(2, 15)$ c) $(2,5]$ d) $[10, 15)$

6) Comporta che $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ $\mathrm{A} = \{\textit{divisori di } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $\mathrm{B} = \{\textit{divisori di } 24\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$

7) a) *c* b) *p, d, c* c) Sì, esistono quadrilateri con le diagonali uguali ma non dotati delle proprietà *p*, *c*

pag. 361: a) F (controesempi: $n = 9$, $n = 15$, $n = 21$, $n = 25$, … b) F (controesempio: $n = 2$)
c) F d) F e) V f) F (*x* e *y* potrebbero essere opposti …)
g) F (non valendo l'implicazione in uno dei due versi, è ovvio che non vale la doppia implicazione)
h) V i) F j) F k) V l) V m) V n) V o) V

pag. 363:

1) SUFF.

x è un capitano ⇒ *x può comandare a un sergente*
La condizione che "scaglia la freccia" è SUFFICIENTE per il verificarsi dell'altra.

2) SUFF. 3) SE 4) NEC. E SUFF. (quando c'è doppia implicazione, si parla di CNS)

5) SE E SOLO SE (SSE) (quando c'è doppia implicazione, la locuzione corretta è SE E SOLO SE)

6) NEC. (*non* è anche suff.: se uno ha compiuto i 18 anni, ma non ha la cittadinanza, …

7) SOLO SE

8) NEC. (*non* è anche suff.: se ad es. la si lascia nell'acqua bollente per un'ora …)

9) NEC.

ABCD è un rettangolo ⇒ *ABCD ha le diagonali uguali*
La condiz. che "riceve la freccia nella schiena" è NECESSARIA per il verificarsi dell'altra.

10) NEC. 11) NEC. 12) NEC. E SUFF. 13) SE E SOLO SE (che "va d'accordo" con NEC. E SUFF. dell'es. prec.)

14) NEC. 15) NEC. E SUFF. 16) SUFF. 17) NEC. E SUFF. 18) SUFF. 19) NEC. E SUFF. 20) SE E SOLO SE

pag. 364:

1) *Se un intero è primo, allora è dispari* [Metti **una croce sulla risposta corretta**:] VERA / ~~FALSA~~
Contronominale: *Se un intero non è dispari, allora non è primo* VERA / ~~FALSA~~
Contraria: *Se un intero non è primo, allora non è dispari* VERA / ~~FALSA~~
Inversa: *Se un intero è dispari, allora è primo* VERA / ~~FALSA~~

2) *Se un intero è divisibile per 10, allora è divisibile anche per 5* ~~VERA~~ / FALSA
Contronominale: *Se un intero non è divisibile per 5, allora non è divisibile per 10* ~~VERA~~ / FALSA
Contraria: *Se un intero non è divisibile per 10, allora non è divisibile per 5* VERA / ~~FALSA~~
Inversa: *Se un intero è divisibile per 5, allora è divisibile per 10* VERA / ~~FALSA~~

3) *Se un triangolo ha i tre lati uguali, allora ha anche i tre angoli uguali* ~~VERA~~ / FALSA
Contronominale: *Se un triangolo non ha i tre angoli uguali, allora non ha i tre lati uguali* ~~VERA~~ / FALSA
Contraria: *Se un triangolo non ha i tre lati uguali, allora non ha i tre angoli uguali* ~~VERA~~ / FALSA
Inversa: *Se un triangolo ha i tre angoli uguali, allora ha anche i tre lati uguali* ~~VERA~~ / FALSA

4) *Se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, allora ha i quattro lati uguali* VERA / ~~FALSA~~
Contronominale: *Se un quadr. non ha i quattro lati uguali, allora non ha le diag. perp.* VERA / ~~FALSA~~
Contraria: *Se un quadr. non ha le diag. perp., allora non ha i quattro lati uguali* ~~VERA~~ / FALSA
Inversa: *Se un quadr. ha i quattro lati uguali, allora ha le diag. perp.* ~~VERA~~ / FALSA

5) *Se Cristina è ricoverata all'ospedale, allora ha partorito* VERA? / FALSA? (vedi NOTA)
Contronominale: *Se Cristina non ha partorito, allora non è ricoverata all'ospedale* VERA? / FALSA?
Contraria: *Se Cristina non è ricoverata all'ospedale, allora non ha partorito* VERA? / FALSA?
Inversa: *Se Cristina ha partorito, allora è ricoverata all'ospedale* VERA? / FALSA?

NOTA
Sembra ragionevole considerare l'implicazione 5) falsa solo qualora l'antecedente sia vera (Cristina ricoverata) e la conseguente falsa (Cristina non ha partorito). Stesso discorso per l'inversa.
In ogni caso, è chiaro che non possiamo scrivere nulla se non sappiamo chi è Cristina e come sono andate le cose.
E' però sicuro, a priori, che la proposizione data e la sua contronominale avranno lo stesso valore di verità;
e che la contraria e l'inversa avranno lo stesso valore di verità (essendo una la contronominale dell'altra).
Puoi controllare che ciò avviene per tutti gli esempi di questa pagina.

pag. 365:

1) D 2) E 3) D 4) B 5) B 6) B 7) C 8) D
9) a) SSE b) SUFF. c) SSE d) SUFF e) NEC E SUFF f) SSE g) SSE h) NEC E SUFF
i) SOLO SE (l'espress. linguistica che in realtà si utilizzerebbe in questo caso è: "*può avere* i 4 angoli retti")
l) SSE m) SUFF

pag. 367: 3) corretto 4) corretto 5) non corretto 6) 2 (il primo e il terzo)

pag. 368: 1) V 2) F (non c'è nessun x che vada bene *per ogni* y!) 3) V 4) V 5) F (per via dello 0)
6) V 7) F ($1/2 \notin \mathbb{Z}$) 8) V 12) F $\exists x \in \mathbb{R}_a \,/\, x^2 < x$ 13) F $\forall a \in \mathbb{N},\ a^2 \neq 20$ 14) V 15) V
16) F $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq -1/x$ 17) F $\exists x, y \in \mathbb{R} /\ x^2 = y^2 \not\Rightarrow x = y$ oppure $\exists x, y \in \mathbb{R} /\ x^2 = y^2 \wedge x \neq y$

pag. 369:

1) D 2) C 3) E 4) C 5) D 6) D 7) E 8) A

pag. 370:

Il primo è corretto.
Osserviamo che la premessa sui mammiferi è falsa
(i monotremi, di cui fan parte gli ornitorinchi, sono mammiferi ma fan le uova);
tuttavia il ragionamento, come struttura, è valido.
Anche il secondo e il quinto ragionamento della lista sono corretti, gli altri non lo sono.

pagg. 371-372:

1) C 2) E 3) C 4) D 5) D 6) D 7) E 8) E 9) E 10) A 11) E 12) C 13) A 14) B 15) B 16) A

pag. 375:

1B) (b) EAE pp (CESARE) (c) AEE pp (CAMESTRES) (d) IAI ss (DISAMIS) (e) OAO ss (BOCARDO)
3) l'insieme Q non sia vuoto 4) Sono corretti: (a), (g), (h), (i), (n), (o), (p), (q).