

NUMERI RELATIVI

1. I NUMERI RELATIVI: COSA SONO E A COSA SERVONO

I **numeri SENZA SEGNO** (es. 3; 29; $1/4$; 8,02; ...) vengono anche chiamati "numeri **ASSOLUTI**", mentre ai **numeri CON SEGNO** (es. -4 ; $+7$; $-0,98$; $+5/6$; ...) si dà il nome di "numeri **RELATIVI**".

I numeri relativi si dividono in:

POSITIVI; **NEGATIVI**; e lo **ZERO** ("neutro", cioè né positivo né negativo).

A cosa servono i numeri relativi? Servono a descrivere le "**GRANDEZZE ORIENTATE**", cioè quelle grandezze che **possono variare in due sensi opposti a partire da un "livello zero"** (temperature, altitudini e depressioni, anni prima e dopo Cristo, cariche elettriche, bilanci finanziari, ...)

Per esprimere il valore di una grandezza di questo tipo, non è sufficiente un numero assoluto!

- ❑ Ad es., una temperatura misurata in gradi Celsius può essere più alta o più bassa rispetto allo "zero termico" convenzionale (che è poi la temperatura di passaggio dell'acqua dallo stato liquido allo stato solido). E' comodo associare il simbolo "+" all'idea di "sopra lo zero" e il "-" all'idea di "sotto lo zero": scriverò allora, a seconda dei casi, ad esempio, $+7^\circ\text{C}$, oppure -7°C
- ❑ E se voglio indicare in modo rapido che una certa località di Israele (dove esiste una forte depressione della crosta terrestre) si trova ad un'altitudine di "35 m sotto il livello del mare", potrò segnare questa altitudine come -35 m (sottintendendo, naturalmente, che il livello del mare sia considerato come "livello zero") ➡

Soltanto "traffucando" effettivamente coi numeri relativi, ed impiegandoli nei vari rami della scienza (ad esempio la Fisica), ci si può rendere conto di quanto **enorme** sia la **varietà delle loro applicazioni**.

Al posto di scrivere $+7$ per brevità si può scrivere semplicemente 7 (a meno che motivi di chiarezza non suggeriscano di evitare l'abbreviazione).
Infatti i **numeri positivi vengono sostanzialmente identificati coi numeri assoluti**.

Due numeri entrambi positivi, o entrambi negativi, insomma: **dello stesso segno**, si dicono "**concordi**".
Ad esempio, -7 e -25 sono concordati; $+5/4$ e $+1$ sono concordati.

Due numeri di segno diverso si dicono "**discordi**": ad esempio, $+89$ e -6 sono discordi.

Due numeri come -4 e $+4$, che **differiscono solo per il segno**, si dicono "**opposti**".
Si può scrivere $0 = +0 = -0$, e quindi 0 è considerato l'opposto di sé stesso.

♥ Si dice "**VALORE ASSOLUTO**" di un numero relativo, il numero stesso privato del suo segno.
Ad esempio, il valore assoluto di -5 è 5, il valore assoluto di $+1/3$ è $1/3$.
In alternativa a "valore assoluto" si può dire "MODULO".

Per indicare il valore assoluto di un numero relativo, si pone il numero entro **una coppia di stanghette verticali**.

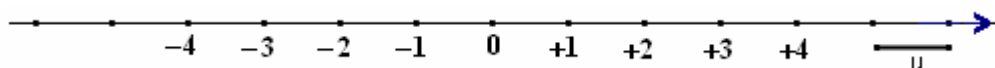
Esempi: $|-5| = 5$ $\left|+\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ (leggi: "valore assoluto di -5 uguale a 5", ecc.)

Poiché i numeri assoluti coincidono sostanzialmente coi numeri positivi ($5 = +5$, $1/3 = +1/3$) si può anche dire che

- ♥ **il valore assoluto di un numero relativo è**
- il numero stesso, se questo è positivo o nullo;
 - l'opposto del numero, se questo è negativo.

2. LA "NUMBER LINE"

Quando si vuol dare una **rappresentazione grafica dell'insieme dei numeri relativi** (rappresentazione che evidenzia visivamente anche l'**ordinamento** di questo insieme), si ricorre al cosiddetto "**asse delle ascisse**".



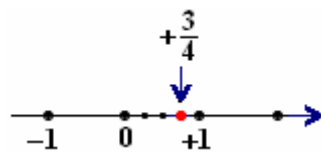
- ♥ Un "**asse delle ascisse**" (noi di norma preferiremo dire, all'inglese, "**NUMBER LINE**" ➡) è una retta, sulla quale sono stati fissati:
- a) un punto, detto "**origine**", solitamente indicato con la lettera **O** (rappresenterà il numero "zero")
 - b) un'**unità di misura u** per le lunghezze
 - c) e un **verso di percorrenza da considerarsi come "verso positivo"**
(di solito, salvo rare eccezioni, se la retta è orizzontale si suole assumere come verso positivo quello che va da sinistra verso destra, mentre se la retta è verticale quello che va dal basso verso l'alto).

Se, a partire dall'origine e andando in verso *positivo*, noi riportiamo sull'asse delle ascisse tanti segmenti consecutivi tutti uguali all'*unità di misura*, le estremità di questi segmenti rappresenteranno gli *interi positivi*: $+1, +2, +3, +4, \dots$
 Se facciamo la stessa cosa sempre a partire dall'origine, ma in verso *negativo*, le estremità dei segmenti disegnati rappresenteranno i numeri *interi negativi*: $-1, -2, -3, -4, \dots$

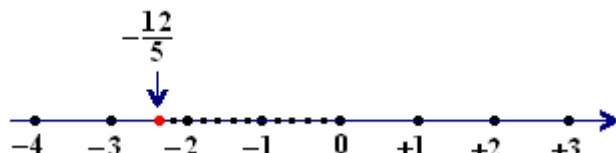
Per rappresentare una **frazione**, occorrerà pensare di dividere l'unità di misura in tante parti uguali quant'è il denominatore della frazione, e poi ... ma mi spiegherò con degli esempi.

Se vogliamo rappresentare la frazione $+3/4$, dovremo **dividere l'unità di misura in 4 parti uguali e prendere un segmento formato da 3 di queste parti**.

Tale segmento andrà riportato a partire dall'origine in **verso positivo**, e la sua estremità rappresenterà, appunto, la frazione $+3/4$.



Per rappresentare il numero $-12/5$ dovremo **dividere l'unità di misura in 5 parti uguali, poi considerare il segmento formato da 12 di questi segmentini**, e riportarlo a partire dall'origine in **verso negativo**. L'estremità del segmento così disegnato rappresenterà, appunto, il numero $-12/5$.



La "number line" è di estrema utilità in un mucchio di questioni di interesse matematico.

Per ora, limitiamoci ad osservare che la rappresentazione sull'asse delle ascisse permette di **confrontare** agevolmente due numeri relativi assegnati, per stabilire qual è il maggiore e quale il minore:

♥ **FRA DUE NUMERI RELATIVI DATI, SI CONSIDERA MINORE QUELLO CHE, rappresentato su di una "number line" orizzontale (NOTA), STA PIU' A SINISTRA**

NOTA: ... e orientata "in modo standard", cioè col verso di percorrenza positivo che va da sinistra a destra

Se si pensa ad es. alle temperature (minore=più bassa) o agli anni prima e dopo Cristo (minore=precedente), si comprenderà agevolmente come questo ordinamento dell'insieme dei numeri relativi "vada d'accordo" con le applicazioni di questi stessi numeri alla descrizione delle grandezze orientate.

♥ **FRA DUE NUMERI ENTRAMBI NEGATIVI IL MINORE E' quello più lontano dall'origine, ossia QUELLO CHE HA VALORE ASSOLUTO MAGGIORE;**
 e (davvero importante!)

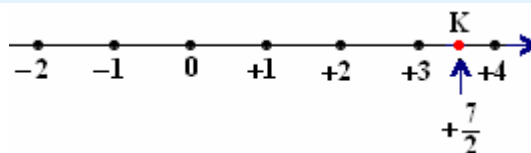
♥ **IL VALORE ASSOLUTO o "modulo" DI UN NUMERO RELATIVO CORRISPONDE ALLA DISTANZA DALL'ORIGINE del punto che gli è associato sulla number line.**

Osserviamo che **ad ogni numero relativo corrisponde uno e un solo punto sull'asse delle ascisse, e viceversa ad ogni punto sull'asse delle ascisse corrisponde uno e un solo numero relativo.**

Si dice che c'è una "**corrispondenza biunivoca**" fra i punti dell'asse delle ascisse ed i numeri reali relativi.

Preso un numero relativo x , il punto P corrispondente viene detto "punto immagine" del numero x . Il numero x , invece, viene detto "ascissa" del punto P .

Nella figura qui a fianco, il numero $+7/2 = +3,5$ e il punto K si corrispondono: si dice quindi che K è "il punto immagine" (o, più brevemente, "l'immagine") del numero $+7/2$, mentre il numero $+7/2$ è "l'ascissa" del punto K .



L'immagine del numero zero è l'origine; l'ascissa dell'origine è zero.

ESERCIZI (vai alle risposte ➡)

- 1) Qual è il minore fra tutti i numeri interi relativi, formati da tre cifre?
- 2) Qual è il minore fra tutti i numeri interi relativi, formati da tre cifre tutte diverse fra loro?
- 3) Qual è il maggiore fra tutti gli interi relativi, formati da tre cifre?
- 4) Qual è il maggiore fra tutti gli interi negativi, formati da tre cifre?
- 5) Sul quaderno, disegna un asse delle ascisse (unità di misura: 2 quadretti) e, su di esso, rappresenta i seguenti numeri relativi: $+3$ $-1/4$ $+2/3$ $-3/5$ $-3,5$ $27/4$ $-11/6$
- 6) Fra i due numeri relativi $-1,3$ e $-1,\bar{3}$, qual è il minore?

3. SOMMA, DIFFERENZA, QUESTIONI VARIE RIGUARDANTI I SEGNI

□ SOMMA

♥ La **somma di due numeri relativi** è quell'operazione che si esegue interpretando i **numeri positivi** come **soldi guadagnati**, i **numeri negativi** come **soldi persi**, e pensando a un **totale**.

1° numero <i>a</i>	2° numero <i>b</i>	somma <i>a + b</i>
-7	-5	-12
+4	+11	+15
-20	+6	-14
-8,1	+10,3	+2,2

Con linguaggio più propriamente matematico, possiamo dire che

- quando i due numeri sono **CONCORDI** (cioè, hanno lo stesso segno), la loro somma è quel numero che ha
 - come segno lo **STESSO SEGNO** degli addendi,
 - e come valore assoluto la **SOMMA** dei loro valori assoluti
 es. $-15 + (-6) = -21$ $+10 + (+9) = +19$ $-3,6 + (-2,31) = -5,91$
- quando i due numeri sono **DISCORDI** (ossia, hanno segni opposti), la loro somma è quel numero che ha
 - come segno il **SEGNO DELL'ADDENDO "PREVALENTE"** (= con val. ass. maggiore)
 - e come valore assoluto la **DIFFERENZA** fra i valori assoluti degli addendi
 es. $-30 + (+12) = -18$ $-9 + (+25) = +16$ $+3,2 + (-10,3) = -7,1$
- la somma di due numeri opposti (come **+5 e -5**) è zero.

Clicca sulla freccia
⇒
per una
descrizione
della regola
in Inglese

Si può dimostrare che l'operazione così definita gode delle proprietà commutativa, associativa e dissociativa

Abbiamo dunque visto che per sommare due numeri relativi, non sempre bisogna effettuare una somma nel senso usuale della parola, perché se i due numeri sono discordi in realtà bisogna effettuare (fra i loro moduli) una *sottrazione*.
♥ Per questo motivo, quando si parla di somma di due o più numeri relativi, anziché usare semplicemente la parola "somma" si preferisce usare la locuzione "**SOMMA ALGEBRICA**": proprio per indicare che non sempre si tratta di una "somma" nel senso in cui la parola "somma" è intesa comunemente.

♥ Ricordiamo, infine, che **un modo di eseguire mentalmente la somma algebrica** è il seguente:

- un addendo **POSITIVO** mi dice di "**contare in AVANTI**", ossia di "**PROCEDERE IN VERSO POSITIVO SULL'ASSE DELLE ASCISSE**";
- ← un addendo **NEGATIVO** mi dice di "**contare all'INDIETRO**", di "**scalare delle unità**", cioè di "**PROCEDERE IN VERSO NEGATIVO SULL'ASSE DELLE ASCISSE**".

Ad esempio, eseguire la somma algebrica $-5 + (-7)$ vuol dire partire dal primo addendo (-5), che si immagina rappresentato sull'asse delle ascisse, e poi spostarsi a *sinistra* (dato che in questo caso il secondo addendo è *negativo*) di 7 unità. Si giunge così al numero -12 .

Per **indicare la somma algebrica di due o più numeri relativi**, in teoria dovrei fare così:

se ad es. devo indicare la somma algebrica dei numeri $-4, -7, +20, -2$ dovrei scrivere

$$-4 + (-7) + (+20) + (-2),$$

cioè dovrei racchiudere ciascun numero relativo (ad eccezione, volendo, del primo) entro parentesi: e questo perché **in Matematica si considera scorretto scrivere due segni uno di seguito all'altro**.

In pratica, però,

♥ quando si vuole **INDICARE LA SOMMA ALGEBRICA di due o più numeri relativi**, si usa scrivere questi numeri relativi uno di seguito all'altro coi rispettivi segni, senza parentesi:

$$-4 + (-7) + (+20) + (-2) = -4 - 7 + 20 - 2; \quad -23 + (+5) = -23 + 5; \quad 12 + (-68) = 12 - 68$$

In virtù di questa **convenzione**, di questo accordo fra i matematici, motivato da esigenze di brevità, resta allora fissata la seguente **REGOLA**:

♥ + davanti a + dà +
+ davanti a - dà - In breve: un segno + davanti a un altro segno lascia invariato quest'ultimo.

❑ DIFFERENZA

Sottrarre una perdita
è come aggiungere un guadagno,
e sottrarre un guadagno
è come aggiungere una perdita ➡

♥ **SOTTRARRE un numero relativo
equivale ad ADDIZIONARE
ALGEBRICAMENTE L'OPPOSTO
di quel numero ➡**

1° numero a	2° numero b	differenza $a - b$
+8	-10	$+8 - (-10) = +8 + 10 = +18$
-6	-2	$-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$
-4	+3	$-4 - (+3) = -4 - 3 = -7$
+11	+20	$+11 - (+20) = +11 - 20 = -9$

Resta dunque stabilita la **REGOLA**:



– davanti a + dà –
– davanti a – dà +

**In breve: un segno – davanti a un altro segno
muta quest'ultimo nel segno opposto.**

A Dal punto di vista matematico, è più corretto presentare l'operazione di sottrazione
P fra numeri relativi **in modo astratto**, senza parlare di debiti e crediti. Vediamo come.
P
R Innanzitutto, occorre ricordare che in Matematica
O la "sottrazione" è definita come l'operazione inversa dell'addizione.
F La sottrazione è dunque l'operazione mediante la quale, dati due numeri,
O se ne trova un terzo che addizionato al secondo dà come risultato il primo.
N Insomma: $a - b = c$ se c è tale che $c + b = a$.
D Vogliamo dimostrare che la differenza $a - b$ è data dalla somma algebrica $a + b'$
I (essendo b' l'opposto di b , ossia essendo $b' + b = 0$).
M Dovremo far vedere che prendendo il numero $a + b'$,
E e addizionandogli algebricamente b ,
N si ottiene come risultato a .
T
O In effetti: $(a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$, come volevasi dimostrare.

❑ OSSERVAZIONI SU:

- **L'OPPOSTO DI UN NUMERO RELATIVO;**
- **LA REGOLA PER LO SCIoglimento DELLE PARENTESI
PRECEDUTE DA UN SEGNO + O DA UN SEGNO –**

Nell'ambito di una sottrazione fra numeri relativi, il segno "–" di sottrazione
provoca dunque l'effetto di cambiare il segno del numero che lo segue.

♥ Si è affermata allora, fra i matematici, l'abitudine di usare **IL SEGNO "–" davanti a un numero
ANCHE AL DI FUORI DELL'OPERAZIONE DI SOTTRAZIONE**,
e precisamente **QUANDO SI VUOLE INDICARE L'OPPOSTO** del numero in questione.

Quindi avremo, per esempio, $-(-9) = +9$; $-(+1/4) = -1/4$ e così via.

In generale,

per indicare l'opposto di un numero indicato con la lettera a , si userà il simbolo $-a$.



ATTENZIONE!

♥ Quando, in un'espressione letterale, si incontra il simbolo $-a$,
non si deve pensare, vedendo il –, che tale simbolo rappresenti per forza un numero negativo:

$-a$ rappresenta l'opposto di a , per cui

- se a è positivo, $-a$ è negativo,
- ma se a è negativo, $-a$ è positivo.

Ad esempio, per $a = -5$, avremo $-a = -(-5) = +5$

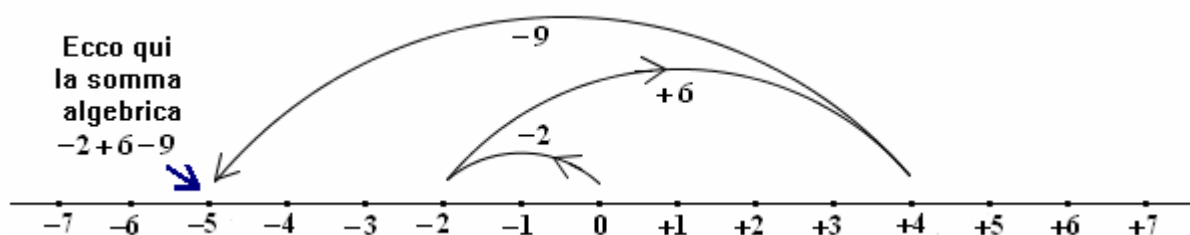
La scrittura $-(-2+6-9)$ indica l'opposto del numero, che è il risultato della somma algebrica $-2+6-9$.

Ora, è facile convincersi che $-(-2+6-9) = +2-6+9$, ossia:

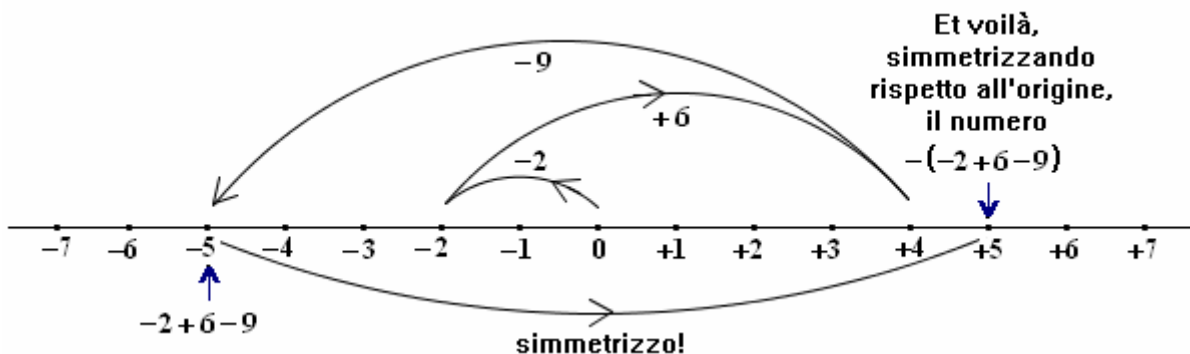
"L'OPPOSTO DI UNA SOMMA ALGEBRICA è uguale alla SOMMA ALGEBRICA DEGLI OPPOSTI".

Un modo suggestivo per giustificare la verità di questa affermazione è il seguente
(ci riferiremo per meglio fissare le idee all'esempio fatto, ma ne verrà fuori un ragionamento di carattere generale).

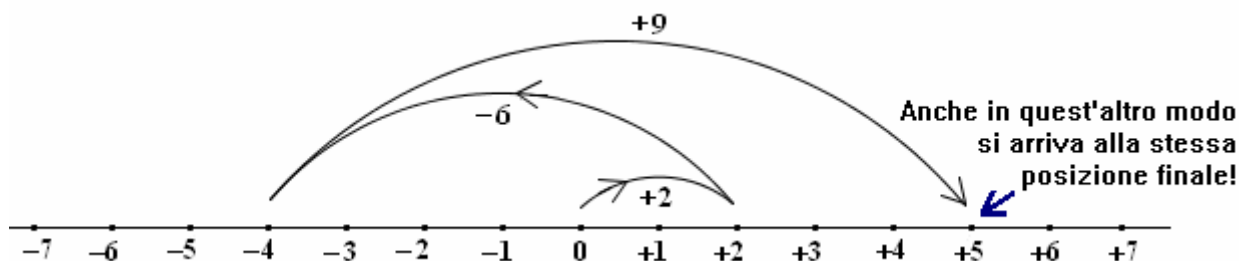
- ♪ Abbiamo visto che una somma algebrica si può pensare come effettuabile tramite successivi spostamenti sull'asse delle ascisse (verso destra, quando l'addendo è positivo, verso sinistra quando è negativo); quindi possiamo pensare di effettuare il calcolo $-2+6-9$ tramite tre saltelli successivi: **sinistra 2 poi destra 6 poi sinistra 9** (s'intende: a partire dall'origine)



- ♪ Ora, a partire da $-2+6-9$, dobbiamo **passare all'opposto** $-(-2+6-9)$; e fare l'opposto di un numero relativo significa, geometricamente, prendere tale numero e passare al suo **"simmetrico rispetto all'origine"**



- ♪ Però è evidente che **si arriverebbe alla stessa posizione finale** (nel nostro esempio, +5) anche ricominciando da capo e prendendo i medesimi addendi, ma ciascuno col segno opposto, cosicché ogni singolo movimento venga effettuato nel verso opposto: a partire dall'origine, **destra 2 poi sinistra 6 poi destra 9**



Resta così acquisita la regola che dice:

♥ SE UN SEGNO -, USATO PER INDICARE "L'OPPOSTO DI", SI TROVA DAVANTI AD UNA PARENTESI CONTENENTE UNA SOMMA ALGEBRICA, ALLORA E' LECITO SCIOGLIERE LA PARENTESI, CAMBIANDO TUTTI I SEGNI.

□ LA REGOLA PER LO SCIOGLIMENTO DI UNA PARENTESI, CONTENENTE UN NUMERO RELATIVO OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, PRECEDUTA DA UN SEGNO + O DA UN SEGNO – ; UNA GIUSTIFICAZIONE ESAURIENTE E COMPLETA

SE HO UN SEGNO – DAVANTI A UNA PARENTESI CHE CONTIENE UN NUMERO RELATIVO, OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, POSSO SCIOGLIERE LA PARENTESI CAMBIANDO PERO' DI SEGNO TUTTI I NUMERI ENTRO PARENTESI.

SE HO UN SEGNO + DAVANTI A UNA PARENTESI CHE CONTIENE UN NUMERO RELATIVO, OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, POSSO SCIOGLIERE LA PARENTESI SENZA CAMBIARE NESSUN SEGNO.

La giustificazione della regola è piuttosto elaborata, e, contrariamente a quanto si sarebbe tentati di pensare, NON è già stata data, perché bisogna considerare **tutte** le diverse situazioni che si possono presentare; ora, nelle pagine precedenti, abbiamo già preso in esame qualcuno dei casi, ma non la totalità! Coraggio, dunque:

A	$-5 + (-7) = -5 - 7$	In questo caso, il + centrale indica somma algebrica e, come abbiamo già detto, la comunità dei matematici ha stabilito una convenzione secondo la quale, quando si vuole indicare la somma algebrica di due o più numeri relativi, si potranno scrivere questi numeri relativi uno di seguito all'altro coi rispettivi segni, senza introdurre parentesi.
B	$-5 - (-7) = -5 + 7$	In questo caso, il – centrale indica sottrazione e, come abbiamo già visto, sottrarre un numero relativo equivale ad aggiungere algebricamente l'opposto. Quindi $-5 - (-7) = -5 + (+7)$ ma anziché $-5 + (+7)$ è possibile, per brevità, scrivere semplicemente $-5 + 7$ in virtù della convenzione appena ricordata al precedente punto A).
C	$-(-7) = +7$	In questo caso, il – davanti al (-7) non è un – di sottrazione, ma indica invece che “si vuole considerare l'opposto del numero (-7) ”; e l'opposto di un numero relativo è il numero che si ottiene cambiando il segno e lasciando invariato il valore assoluto.
D	$+(-7) = -7$	In questo caso, il + davanti al (-7) non indica niente di particolare; ribadisce soltanto che si vuole considerare proprio il numero (-7) , senza passare all'opposto. Quindi, quando troviamo scritto $+(-7)$, potremo senza indugio scrivere semplicemente -7 .
E	$+(-9+14-11) = -9+14-11$	Vedi il precedente caso D): è la stessa cosa.
F	$-(-9+14-11) = +9-14+11$	Il – davanti alla parentesi indica qui “passaggio all'opposto”; e, come è stato ben spiegato nella pagina precedente, l'opposto di una somma algebrica è uguale alla somma algebrica degli opposti.
G	$-4 + (-9+14-11) = -4 - 9 + 14 - 11$	Il + davanti alla parentesi indica, in questo caso, somma algebrica; e abbiamo già puntualizzato che la somma algebrica gode delle proprietà associative e dissociative. La proprietà dissociativa è proprio quella che qui giustifica la possibilità di eliminare la parentesi, lasciando invariati i segni.
H	$-4 - (-9+14-11) = -4 + 9 - 14 + 11$	Il – davanti alla parentesi indica, in questo caso, sottrazione; è noto che sottrarre un numero relativo equivale ad aggiungere algebricamente l'opposto; e l'opposto di una somma algebrica (vedi pagina precedente) è uguale alla somma algebrica degli opposti. Quindi $-4 - (-9+14-11) = -4 + (+9-14+11)$; infine, $-4 + (+9-14+11) = -4 + 9 - 14 + 11$, come già visto (caso G)

Occhio al caso in cui la parentesi è elevata ad esponente, e preceduta dal segno –; qui è indispensabile tenere presente che l'elevamento a potenza ha la priorità.

Esempio: $-(-5)^2 = -(+25) = -25$

4. PRODOTTO DI NUMERI RELATIVI

Per il prodotto, è stata fissata la seguente **REGOLA DEI SEGNI**:

- | | | | | | |
|----|---|--------------|---|----|---|
| a) | + | moltiplicato | + | dà | + |
| b) | + | moltiplicato | - | dà | - |
| c) | - | moltiplicato | + | dà | - |
| d) | - | moltiplicato | - | dà | + |
| e) | inoltre, ogni numero relativo moltiplicato per 0 dà 0 | | | | |

♥ OSSERVAZIONE

Noterai che questa regola del “segno moltiplicato segno” finisce per coincidere con la regola, già acquisita, del “segno davanti a segno”.
E' importante però comprendere che **si tratta di DUE REGOLE BEN DISTINTE CHE SI ASSOMIGLIANO, NON di UNA REGOLA SOLA!**

La **e)** è motivata dall'ovvia esigenza di conservare, per il numero 0, il ruolo di “**elemento assorbente**” per la moltiplicazione, che gli compete nell'ambito dei numeri assoluti.

Giustificiamo ora le **a), b), c), d)** (per motivi di semplicità, ragioneremo su esempi specifici).

Per quanto riguarda la possibilità di *sottintendere* (in certi casi) *il puntino di moltiplicazione*, puoi cliccare sulla freccia



a) $(+5) \cdot (+3) = ?$

Dato che i numeri positivi equivalgono sostanzialmente ai numeri assoluti (=senza segno), coerentemente dovrà essere $(+5) \cdot (+3) = 5 \cdot 3 = 15 = +15$.

La regola “+ **moltiplicato** + dà +” resta così giustificata.

c) $(-5) \cdot (+3) = ?$

Sempre per il fatto che i numeri positivi equivalgono sostanzialmente ai numeri assoluti, è “logico” che la moltiplicazione per +3 abbia lo stesso significato della moltiplicazione per 3, la quale sta ad indicare una “somma ripetuta”:

$$(-5) \cdot (+3) = (-5) \cdot 3 = (-5) + (-5) + (-5) = -15$$

Abbiamo così giustificato anche la regola “- **moltiplicato** + dà -”.

b) $(+5) \cdot (-3) = ?$

E' del tutto spontaneo e sensato porre le varie definizioni in modo che le proprietà delle operazioni, inerenti ai numeri assoluti, non perdano la loro validità.

Allora, se non vogliamo rinunciare alla “commutativa della moltiplicazione”, dovrà essere

$$(+ 5) \cdot (- 3) = (- 3) \cdot (+ 5) \quad \begin{array}{l} = \\ \text{regola} \\ \text{giustificata} \\ \text{prima} \end{array} \quad - 15$$

e ciò giustifica la regola “+ **moltiplicato** - dà -”

d) $(-5) \cdot (-3) = ?$

Consideriamo questa sequenza di operazioni:

$$(-5) \cdot (+3) = -15$$

$$(-5) \cdot (+2) = -10$$

$$(-5) \cdot (+1) = -5$$

$$(-5) \cdot 0 = 0$$

$$(-5) \cdot (-1) = ?$$

$$(-5) \cdot (-2) = ?$$

$$(-5) \cdot (-3) = ?$$

Nello svolgere le prime tre operazioni della sequenza, abbiamo applicato una regola già acquisita (“- moltiplicato + dà -”).

La quarta operazione è stata eseguita con la già motivata regola **e)**.

Riflettiamo, ora: ogni volta che il secondo fattore in gioco è diminuito di un'unità, il risultato “ha fatto un saltino”, sulla *number line*, di 5 unità verso DESTRA.

E' quindi del tutto “logico” che i “punti interrogativi” vengano sciolti continuando a saltare verso DESTRA di 5 unità, e ottenendo perciò, rispettivamente, +5, +10 e +15.

Ecco così giustificata anche la regola
“- **moltiplicato** - dà +”

D'altronde,

la REGOLA DEI SEGNI sopra fissata è l'unica che consenta al prodotto fra numeri relativi, di godere di due fondamentali proprietà che già caratterizzavano il prodotto fra numeri assoluti: mi riferisco alla proprietà distributiva rispetto alla somma (che andrà qui pensata come somma algebrica), e alla proprietà commutativa.

Infatti:

a) + moltiplicato + dà +	$(+4) \cdot (+6) = ?$ Poiché i numeri positivi devono potersi sostanzialmente identificare coi numeri assoluti ($+4 = 4$, $+6 = 6$), il risultato dev'essere per forza $+24 = 24$
b) + moltiplicato - dà -	$(+4) \cdot (-6) = ?$ Consideriamo l'espressioncina $(+4) \cdot (+6 - 6)$. $\square$ Si ha $(+4) \cdot (+6 - 6) = +4 \cdot 0 = 0$. $\square$ Applicando sulla stessa espressione la distributiva, si avrebbe: $(+4) \cdot (+6 - 6) = +4 \cdot (+6) + (+4) \cdot (-6) = \underbrace{+24}_{\text{come già stabilito prima}} + (+4) \cdot (-6)$ Il risultato dovrà essere ancora 0, altrimenti saremmo costretti a dire che la distributiva non vale più; dunque, $+24 + (+4) \cdot (-6) = 0$ E quest'ultima uguaglianza è corretta solo se si accetta il risultato $(+4) \cdot (-6) = -24$. Quindi la regola b) è l'unica compatibile con la conservazione della distributiva .
c) - moltiplicato + dà -	$(-4) \cdot (+6) = ?$ Se si vuole che la moltiplicazione continui a godere della proprietà commutativa , si dovrà accettare che sia $(-4) \cdot (+6) = (+6) \cdot (-4) = \underbrace{-24}_{\text{regola già motivata prima}}$
d) - moltiplicato - dà +	$(-4) \cdot (+6 - 6) = \begin{cases} (-4) \cdot 0 = 0 \\ (-4) \cdot (+6) + (-4) \cdot (-6) = \underbrace{-24}_{\text{vedi sopra}} + (-4) \cdot (-6) \end{cases}$ per cui l'unica definizione compatibile con la distributiva è $(-4) \cdot (-6) = +24$

Si può dimostrare che il prodotto fra numeri relativi, definito dalla regola dei segni di cui sopra, gode di TUTTE le proprietà che valgono per il prodotto fra numeri assoluti: commutativa, associativa-dissociativa, distributiva.

PRODOTTO DI PIU' FATTORI

La seguente osservazione ci sarà molto utile quando, fra breve, parleremo di potenze di numeri relativi.

Per un prodotto di più fattori, il segno del risultato dipende dal numero di fattori negativi in gioco:

- ♥ se il numero di fattori negativi è pari, il risultato sarà positivo, perché i segni “-” si compensano a coppie;
- ♥ se invece il numero di fattori negativi è dispari, il risultato sarà negativo, perché i segni “-” si compensano ancora a coppie, ma questa volta ne rimane uno "scompagnato".

$$-\frac{3}{4} \cdot (-8) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(+\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \underset{\substack{\text{numero} \\ \text{pari} \\ \text{di fattori} \\ \text{negativi}}}{=} +\frac{21}{100}; \quad -\frac{1}{7} \cdot (+2) \cdot (-35) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot (-18) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \underset{\substack{\text{numero} \\ \text{dispari} \\ \text{di fattori} \\ \text{negativi}}}{=} -3$$

5. IL RECIPROCO (o “inverso”) DI UN NUMERO RELATIVO IL QUOZIENTE DI DUE NUMERI RELATIVI

Dato un numero relativo a , si dice “reciproco” di a quel numero relativo che moltiplicato per a dà come risultato $+1$.

Numero	Reciproco	
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{5}$	Infatti $-\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = +1$
$+\frac{3}{7}$	$+\frac{7}{3}$	
$-\frac{1}{5}$	-5	
$+3$	$+\frac{1}{3}$	
$-0,75 = -\frac{75}{100} = -\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	

Si capisce che, dato un numero razionale relativo, per farne il reciproco basterà

- ♪ scrivere il numero dato sotto forma di frazione (se già non lo è),
- ♪ poi “capovolgere” questa frazione, mantenendo invariato il segno che la precede.

- ☐ Esistono due numeri relativi che hanno la proprietà di coincidere col proprio reciproco. Quali sono? ➡
- ☐ Se ti chiedono “qual è il reciproco del numero 0”, tu cosa rispondi? ➡

♥ Per effettuare una divisione fra due numeri relativi (ossia, per trovarne il “quoziente”) basta moltiplicare il primo per il reciproco del secondo.

Esempi: $+\frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{7}\right) = +\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{21}{10}$; $\frac{-3}{-\frac{1}{10}} = -3 \cdot (-10) = +30$; $+\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

La giustificazione di questa regola ricalca la giustificazione data per la regola della sottrazione (sottrarre significa aggiungere algebricamente il numero opposto). Vediamo.

La divisione è definita come l'operazione inversa della moltiplicazione.

E' l'operazione mediante la quale, dati due numeri, se ne trova un terzo che, moltiplicato per il secondo, dà come risultato il primo. Es.: $30 : 6 = 5$ perché $5 \cdot 6 = 30$; $+\frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{21}{10}$ perché $-\frac{21}{10} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = +\frac{3}{5}$.

Insomma: **$a : b = c$ quando $c \cdot b = a$.**

Noi vogliamo dimostrare che il quoziente $a : b$ è dato dal prodotto $a \cdot b'$ (essendo b' il reciproco di b , ossia essendo $b' \cdot b = +1$).

Dovremo far vedere che il prodotto $a \cdot b'$, se viene moltiplicato per b , dà come risultato a .

Ma in effetti: $(a \cdot b') \cdot b = a \cdot (b' \cdot b) = a \cdot (+1) = a$ C.V.D. (Come Volevasi Dimostrare)

E' evidente che le stesse considerazioni danno la giustificazione generale della regola “divisione = moltiplicazione per il reciproco” anche nell'ambito dei numeri assoluti!

COME SI INDICA IL RECIPROCO DI UN NUMERO (RELATIVO O ANCHE ASSOLUTO)

Consideriamo il numero $-\frac{5}{6}$. Se faccio l'operazione $\frac{1}{-\frac{5}{6}}$, che risultato ottengo? Ottengo $\frac{1}{-\frac{5}{6}} = 1 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{6}{5}$.

Ora, $-\frac{6}{5}$ è il reciproco di $-\frac{5}{6}$. Si capisce immediatamente che questa osservazione si può generalizzare:

dato un numero relativo a , il risultato dell'operazione $1/a$ è il reciproco di a . D'altronde (scusa l'insistenza) per il fatto che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, la scrittura $1/a$, che equivale ad $1 : a$, indica quel numero il quale moltiplicato per a dà 1; ma questo è proprio, per definizione, il reciproco di a .

♥ Perciò, in matematica, se si deve indicare il RECIPROCO di un numero a , si utilizza il simbolo $\frac{1}{a}$.

6. POTENZE DI NUMERI RELATIVI

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125} \text{ (un n° dispari di fattori negativi!)}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{81} \text{ (un n° pari di fattori negativi!)}$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^4 = \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{16} \text{ (fattori tutti positivi!)}$$

$$(+7)^3 = (+7) \cdot (+7) \cdot (+7) = +343 \text{ (fattori tutti positivi!)}$$

OCCHIO!



$(-3)^2 = +9$ ma $-3^2 = -9$
Infatti, in quest'ultimo caso, l'esponente 2 si riferisce soltanto al 3, mentre il segno $-$ è un " $-$ di opposto" che si applica *alla fine*.

Quando eleviamo a potenza un numero relativo, l'essenziale è che teniamo presente il significato dell'elevamento a potenza, che è sempre quello usuale: **una potenza (con esponente >1) è un particolare prodotto, in cui i fattori sono tutti uguali**; precisamente, è il prodotto di tanti fattori uguali alla "base" quante sono le unità dell' "esponente".

♥ **Per quanto riguarda il segno del risultato, basterà allora utilizzare l'osservazione sul prodotto di più fattori fatta al precedente paragrafo 4): dunque**

- una potenza CON BASE NEGATIVA avrà risultato
 - NEGATIVO SE L'ESPONENTE (che dà il numero dei fattori) E' DISPARI
 - POSITIVO SE L'ESPONENTE (che dà il numero dei fattori) E' PARI
- mentre una potenza CON BASE POSITIVA equivale a un prodotto di fattori tutti positivi e quindi AVRA' SEMPRE RISULTATO POSITIVO, indipendentemente dalla parità o disparità dell'esponente.

Sono sempre valide, poi, anche quando la base è un numero relativo, le definizioni
 $a^1 = a$; $a^0 = 1$ ($a \neq 0$: l'operazione 0^0 si considera "indeterminata")

Sottolineiamo ancora, perché è un'osservazione banale ma davvero molto importante, che
 ♥ **qualsiasi numero non nullo (sia positivo che negativo), se viene elevato ad esponente PARI, dà sempre risultato POSITIVO.**

A questo proposito, anticipiamo una riflessione che sarà in seguito molto utile.

- Il valore dell'espressione $a+1$ potrà essere positivo, negativo o nullo a seconda del valore di a : ad esempio, se $a = -7$ avremo $a+1 = -7+1 = -6$, mentre se $a = +2$ avremo $a+1 = +2+1 = +3$;
- invece l'espressione a^2+1 assumerà sempre valore > 0 , per qualsiasi valore di a : ad esempio, con $a = -7$ avremo $a^2+1 = +49+1 = +50$; con $a = +2$ avremo $a^2+1 = +4+1 = +5$; con $a = 0$ avremo $a^2+1 = 0+1 = +1$; ecc. ecc.

ESERCIZI

- 1) a) $(-3)^2 =$ b) $(-3)^3 =$ c) $(-3)^4 =$ d) $(-3)^5 =$ e) $(-3)^6 =$ f) $-3^6 =$ g) $(-3)^1 =$ h) $(-3)^0 =$
- 2) a) $(+10)^2 =$ b) $(+10)^3 =$ c) $(-10)^2 =$ d) $(-10)^1 =$ e) $(+10)^0 =$ f) $-10^6 =$ g) $(-10)^6 =$
- 3) a) $\left(-\frac{4}{11}\right)^2 =$ b) $\left(-\frac{5}{7}\right)^3 =$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^7 =$ d) $(-1)^{114} =$ e) $\left(+\frac{1}{6}\right)^3 =$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 =$ g) $\left(-\frac{2}{13}\right)^1 =$
- 4) $(-2)^4 + (+2)^4 + (-2)^3 + (+2)^3$ 5) $(-2)^3 + (-3)^2 + (-4)^1 + (-5)^0$ 6) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{-3^2}{-2^3}$
- 7) $\frac{(-3)^2+1}{(-2)^2+1}$ 8) $\frac{-3^2+1}{-2^2+1}$ 9) $\frac{(-3)^3+1}{(-2)^3+1}$ 10) $\frac{-3^3+1}{-2^3+1}$ 11) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^4$
- 12) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (-6)^9$ 13) $\left(-\frac{3}{4}\right)^7 (-8)^7 \left(-\frac{1}{6}\right)^7$ 14) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{10} : \left(-\frac{2}{3}\right)^9 + \frac{5}{3}$ 15) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{10} - 4^5$

- RISULTATI** 1) a) +9 b) -27 c) +81 d) -243 e) +729 f) -729 g) -3 h) +1 2) a) +100 b) +1000 c) +100
 d) -10 e) +1 f) -1000000 g) +1000000 3) a) $+\frac{16}{121}$ b) $-\frac{125}{343}$ c) $+\frac{1}{128}$ d) +1 e) $+\frac{1}{216}$ f) $+\frac{81}{625}$ g) $-\frac{2}{13}$
 4) 32 5) -2 6) 0 7) 2 8) $\frac{8}{3}$ 9) $\frac{26}{7}$ 10) $\frac{26}{7}$ 11) $\frac{7}{81}$ 12) $2^9 = 512$ 13) -1 14) 1 15) 0

7. POTENZE AD ESPONENTE NEGATIVO

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$5^2 = 5 \cdot 5$$

$$5^1 = 5 \text{ "un numero elevato a 1 è uguale a sé stesso"}$$

$$5^0 = 1 \text{ "un numero non nullo, elevato a 0, dà 1"}$$

$$5^{-1} = ?$$

$$5^{-2} = ?$$

$$5^{-3} = ?$$

Ogni volta che l'esponente diminuisce di un'unità, il risultato viene diviso per 5 !

E' quindi "logico" che i "punti interrogativi" vengano sciolti continuando a dividere per 5 il risultato precedente.

Si ottiene così

$$5^{-1} = 5^0 : 5 = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

$$5^{-2} = 5^{-1} : 5 = \frac{1}{5} : 5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$5^{-3} = 5^{-2} : 5 = \frac{1}{5^2} : 5 = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

Ascolta anche quest'altra considerazione.

Appare desiderabile che le potenze ad esponente negativo vengano introdotte in modo tale che si conservi, se possibile,

la validità delle "vecchie" proprietà

che sussistevano per gli esponenti positivi.

Alla luce di questo, dovrebbe essere, ad esempio,

$$5^{-3} \cdot 5^3 = 5^{-3+3} = 5^0 = 1.$$

Ma ciò si avrà solo se avremo posto la definizione $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

Perveniamo allora "spontaneamente" alla seguente definizione:

$$a^{-n} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{a^n} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^n}_{\substack{\text{reci-} \\ \text{proco} \\ \text{di } a}} \quad (a \text{ numero assoluto o relativo non nullo, } n \text{ intero positivo})$$

NOTA

Infatti

si può scrivere, ad esempio,

$$\frac{1}{5^3} = \frac{1^3}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

♥ Una **POTENZA AD ESPONENTE NEGATIVO** si esegue facendo

- il **reciproco** della potenza avente la stessa base, ma esponente opposto

oppure, equivalentemente, facendo

- il **RECIPROCO DELLA BASE** e l'**OPPOSTO DELL'ESPONENTE**



Esempi:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = 1 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{9} \\ \text{oppure} \\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \\ \text{reci-} \\ \text{proco} \\ \text{di } 3/4 \end{cases}$$

$$\left(+\frac{7}{2}\right)^{-3} = \left(+\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343} \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^5 = -32 \quad (+2)^{-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

$$(-7,3)^{-2} = \left(-\frac{1}{7,3}\right)^2 = \frac{1}{53,29} = 0,0187...$$

$$10^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{1.000.000} = 0,000001$$

Il numero 0 non può essere elevato ad esponente negativo:

ciò infatti implicherebbe di far comparire 0 a denominatore (*illegal operation*).

Osserviamo che $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$;

quindi il reciproco di un numero a

si può indicare sia con $\frac{1}{a}$ che con a^{-1} .

Numero	Reciproco	Opposto
a	$\frac{1}{a}$ oppure a^{-1}	$-a$

Si può dimostrare che le potenze ad esponente intero negativo così introdotte godono anch'esse di TUTTE QUANTE le proprietà che abbiamo già visto valere per gli esponenti maggiori o uguali a 0.

Q u a l c h e e s e m p i o	additiva degli esponenti:	$a^{-3} \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^8} = a^{-8}$	$\frac{-3-5}{\text{somma algebrica}} = -8$
	additiva degli esponenti:	$a^{-3} \cdot a^7 = \frac{1}{a^3} \cdot a^7 = \frac{a^7}{a^3} = a^4$	$\frac{-3+7}{\text{somma algebrica}} = +4$
	moltiplicativa degli esponenti:	$(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = (a^2)^3 = a^6$	$(-2) \cdot (-3) = +6$
	sottrattiva degli esponenti:	$a^{-3} : a^{-5} = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3} \cdot a^5 = \frac{a^5}{a^3} = a^2$	$-3 - (-5) = +2$
	potenza di un prodotto:	$(ab)^{-4} = \frac{1}{(ab)^4} = \frac{1}{a^4 b^4} = \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{b^4} = a^{-4} \cdot b^{-4}$	

ESERCIZI

1) Esegui le seguenti **potenze a esponente negativo**.

a) $\left(-\frac{5}{11}\right)^{-2} = \dots$ b) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-5} = \dots$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-4} = \dots$ d) $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-3} = \dots$ e) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-5} = \dots$ f) $(-14)^{-2} = \dots$
 g) $\left(+\frac{3}{7}\right)^{-3} = \dots$ h) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-6} = \dots$ i) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} = \dots$ l) $(-5)^{-5} = \dots$ m) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \dots$

2) Esegui le operazioni a) ... f) **applicando le proprietà delle potenze**. Qualche esempio dello stesso tipo:

$$\left(-\frac{3}{7}\right)^{-10} : \left(-\frac{3}{7}\right)^{-12} = \left(-\frac{3}{7}\right)^{-10-(-12)} = \left(-\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-8+5-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^2 = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\right]^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-6} = \left(\frac{4}{3}\right)^6 = \frac{4096}{729}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot 4^{-5} = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4\right]^{-5} = (-2)^{-5} = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

a) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)^{-3} = \dots$ b) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^{-5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^6 : \left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} = \dots$ c) $\left(-\frac{26}{33}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{22}{13}\right)^{-2} = \dots$

d) $(+0,4)^{-5} \cdot (+0,4)^5 : (+0,4)^{-1} = \dots$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-20} : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^7 = \dots$ f) $\frac{(0,12)^{-5} \cdot (0,12)^{-5}}{[(0,12)^{-3}]^3} \cdot (0,12)^3 = \dots$

g) La seguente espressione equivale a una potenza di 10: quale? $(+0,05)^{-4} \cdot (-0,2)^{-4} : (-0,01)^4$

3) Completa la tabella sottostante:

a	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
b	-3	-2	-1	0	1	2	3	-2	-1	0	1	2	99	104	-1
a ^b															

RISULTATI

1) a) $\left(-\frac{5}{11}\right)^{-2} = \left(-\frac{11}{5}\right)^2 = +\frac{121}{25}$ b) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-5} = \left(-\frac{10}{3}\right)^5 = -\frac{100000}{243}$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-4} = (+2)^4 = +16$

d) $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(+\frac{4}{3}\right)^3 = +\frac{64}{27}$ e) -100000 f) $\frac{1}{196}$ g) $\frac{343}{27}$ h) 64 i) $\frac{625}{81}$ l) $-\frac{1}{3125}$ m) $\frac{8}{27}$

2) a) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{-5} = -\frac{243}{100000}$ b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} = -\frac{5}{3}$ c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{16}$ d) $(+0,4)^1 = 0,4$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

f) $(0,12)^2 = 0,0144$ g) $(-0,01)^{-8} = \left(-\frac{1}{100}\right)^{-8} = (-100)^8 = 100^8 = (10^2)^8 = 10^{16}$

3) -8 +4 -2 1 $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{8}$ imp. imp. indet. 0 0 -1 +1 -1

8. NOTAZIONE “ESPONENZIALE” O “SCIENTIFICA”

Le potenze di 10 ad esponente positivo si prestano bene ad esprimere i numeri grandissimi, mentre quelle ad esponente negativo ci aiutano a rappresentare i numeri piccolissimi:

10^{18}	un miliardo di miliardi	EXA
10^{15}	un milione di miliardi	PETA
10^{12}	mille miliardi	TERA
10^9	1.000.000.000	GIGA (Nota)
10^6	1.000.000	MEGA (Nota)
10^3	1000	KILO (Nota)
10^2	100	ETTO
10^1	10	DECA
10^0	1	
10^{-1}	0,1	deci
10^{-2}	0,01	centi
10^{-3}	0,001	milli
10^{-6}	0,000001	micro
10^{-9}	0,000000001	nano
10^{-12}	un millesimo di miliardesimo	pico
10^{-15}	un milionesimo di miliardesimo	femto
10^{-18}	un miliardesimo di miliardesimo	atto

NOTA (molto importante)

A volte, in un contesto INFORMATICO (il discorso, comunque, è complicato: vedi questa PRECISAZIONE →), i prefissi KILO-MEGA-GIGA ecc. indicano valori un po' diversi da quelli della tabella qui a sinistra. Poiché in Informatica sono fondamentali le potenze di 2 piuttosto che quelle di 10,

il KILO tipico dell'Informatica non è esattamente 1000, ma è la potenza di 2 che più si avvicina a 1000, ossia $2^{10} = 1024$ (= KILO binario). Analogamente per MEGA, GIGA ecc.

♥ Schematizzando:

		In senso binario (computer)
KILO	10^3	$2^{10} = 1024$
MEGA	10^6	$2^{20} = 1.048.576$
GIGA	10^9	$2^{30} = 1.073.741.824$
...	...	...

♥ NOTAZIONE “ESPONENZIALE” o “SCIENTIFICA”

E' una notazione standard, ampiamente utilizzata, nella quale il numero è sempre visto come prodotto di un fattore compreso fra 1 e 10 ($1 \leq a < 10$) per una potenza di 10.

Esempi: $123000000000 = 1,23 \cdot 10^{11}$ $0,0024 = 2,4 \cdot 10^{-3}$
 $30,7 = 3,07 \cdot 10$ $0,000000000000075 = 7,5 \cdot 10^{-14}$

♥ L'esponente va fissato tenendo presente che

OGNI UNITÀ DELL'ESPONENTE CORRISPONDE A SPOSTARE LA VIRGOLA DI UN POSTO:
verso DESTRA → se l'esponente è POSITIVO,
verso SINISTRA ← se è NEGATIVO.

TABELLA A - Esempi di quantità fisiche espresse in notazione scientifica (valori approssimati)

Numero di Avogadro	$6,022 \cdot 10^{23}$	Lunghezza di un batterio	$m \cdot 10^{-5}$
Distanza della Terra dalla stella più vicina (Alpha Centauri)	$m \cdot 3,9 \cdot 10^{16}$	Massa di un atomo di idrogeno	$kg \cdot 1,673 \cdot 10^{-27}$
Raggio della Terra	$m \cdot 6,37 \cdot 10^6$	Massa di un protone	$kg \cdot 1,672 \cdot 10^{-27}$
Velocità della luce	$m/s \cdot 2,998 \cdot 10^8$	Massa di un elettrone	$kg \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}$

ESERCIZI

- Porta i seguenti numeri in notazione scientifica:
a) 0,00000358 b) 358 c) 35800000000000 d) 35,8 e) 777,77 f) 7/125 g) 1/3 h) 123/4 i) 5^5
- Sul display di una calcolatrice scientifica, il risultato di un calcolo compare come $3.2 \text{ } \overline{11}$; riscrivi il numero in notazione ordinaria (osserva che il “punto” è l'equivalente anglosassone della nostra “virgola”)
- 1000^{-1000} , scritto in notazione scientifica, è: a) $1 \cdot 10^{-3000}$ b) $1 \cdot 10^{-1000000}$ c) $1 \cdot 10^{-1000000000}$
- Qual è il risultato dell'operazione $1,8 \cdot 10^{-10} : (4,5 \cdot 10^{-3})$, scritto in notazione scientifica?
a) $4 \cdot 10^4$ b) $0,04 \cdot 10^{-6}$ c) $4 \cdot 10^{-8}$ d) $0,4 \cdot 10^{-7}$

- 5) Esegui queste operazioni fra numeri in notazione scientifica, scrivendo il risultato in notazione scientifica:
 a) $(3,5 \cdot 10^{-4}) \cdot (8 \cdot 10^{-7})$ b) $(3,5 \cdot 10^{-4}) : (8 \cdot 10^{-7})$ c) $(3,5 \cdot 10^{-4}) + (8 \cdot 10^{-7})$ d) $(8 \cdot 10^{-7})^2$
 e) $(5,2 \cdot 10^8)^2 \cdot (8 \cdot 10^{-15})$ f) $(5,2 \cdot 10^8)^2 : (8 \cdot 10^{-15})$ g) $(4,12 \cdot 10^{-5}) \cdot (7,8 \cdot 10^6)$ h) $(3 \cdot 10^{-11}) : (9 \cdot 10^{13})$
- 6) Quanti litri di acqua occorrerebbero per riempire una piscina quadrata di lato 1 km, e profonda 10 metri?
- 7) Un grande aereo può pesare $1,8 \cdot 10^5$ kg. Quanto pesa un colibrì, se il rapporto fra i due pesi è $6,4 \cdot 10^6$?
- 8) Serviti dei dati della TABELLA A (*nonché della calcolatrice!*) per rispondere ai quesiti sottostanti.

Approssima pure i risultati trovati, ma portali sempre in notazione scientifica.

- a) Di quanti metri cubi è il volume della Terra? ($\text{volume sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$, con $\pi = 3,14159\dots$)
- b) Quanti secondi ci sono in 1 anno “medio” (di 365,25 giorni)? Quanti ne ha vissuti un uomo di 70 anni?
- c) Quanti chilometri percorre la luce in 1 anno? [Approfondimento: definizione di “anno luce” $\Rightarrow$]
- d) Quanti secondi impiega un raggio di luce proveniente dalla Terra, a raggiungere la stella più vicina?
E a quanti anni corrisponde tale intervallo di tempo?
- e) Quant’è lungo l’equatore terrestre?
E quanti batteri in fila ci vorrebbero per fare un “trenino” di batteri lungo come l’equatore terrestre?
- f) Quant’è la massa in grammi di una *mole* di idrogeno atomico, cioè di un numero di Avogadro di atomi di idrogeno? [Approfondimenti: I) differenza fra “massa” e “peso” $\Rightarrow$ II) Il concetto di “mole” $\Rightarrow$]
- g) Calcola il rapporto fra la massa di un protone e la massa di un elettrone.
- 9) Chiaramente, nel concreto, un foglio di carta non si può ripiegare su sé stesso per troppe volte!
... Ma se fosse possibile farlo per 50 volte, che spessore si raggiungerebbe?
Rispondi tenendo presente che una risma da 500 fogli di carta per fotocopie è spessa 5 cm circa, e fai il calcolo: a) dapprima utilizzando l’approssimazione per difetto $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$
b) poi col valore esatto, servendoti, com’è ovvio, di una calcolatrice tascabile.
- 10) *Vediamo se riesci a cavartela con questo problema, che allo stato attuale delle tue conoscenze comporta un certo impegno (quanto varrà r^3 ?), e richiede anche di estrarre una radice cubica. Però ce la puoi fare! Lavora con cura e ricontrolla, prima di andare a sbirciare il risultato!!!*
La forma della Luna è pressoché sferica, e il suo volume è di circa $2,2 \cdot 10^{19} \text{ m}^3$. Gli abitanti della Terra sono $\approx 7 \cdot 10^9$ (anno 2012). Infine, la formula per la superficie della sfera è $S = 4\pi r^2$. Utilizzando queste informazioni, stabilisci, e scrivi in notazione scientifica, quante persone si avrebbero mediamente in ogni km^2 se tutta la popolazione terrestre si trasferisse sulla Luna.

RISPOSTE

- 1) a) $3,58 \cdot 10^{-6}$ b) $3,58 \cdot 10^2$ c) $3,58 \cdot 10^{13}$ d) $3,58 \cdot 10$ e) $7,7777 \cdot 10^2$ f) $0,056 = 5,6 \cdot 10^{-2}$
 g) $0,3333\dots = 3,333\dots \cdot 10^{-1}$ h) $30,75 = 3,075 \cdot 10$ i) $3125 = 3,125 \cdot 10^3$
- 2) Significa $3,2 \cdot 10^{-11} = 0,000000000032$ 3) a) perché $1000^{-1000} = (10^3)^{-1000} = 10^{-3 \cdot 1000} = 10^{-3000}$ 4) c)
- 5) a) $28 \cdot 10^{-11} = 2,8 \cdot 10^{-10}$ (il fattore 28 non andava bene perché non era compreso fra 1 e 10: allora ♥ **abbiamo diviso per 10 questo fattore e contemporaneamente moltiplicato per 10 l’altro!**)
 b) $0,4375 \cdot 10^3 = 4,375 \cdot 10^2$ c) $0,00035 + 0,0000008 = 0,0003508 = 3,508 \cdot 10^{-4}$
 d) $64 \cdot 10^{-14} = 6,4 \cdot 10^{-13}$ e) $2,1632 \cdot 10^3$ f) $3,38 \cdot 10^{31}$ g) $3,2136 \cdot 10^2$ h) $3,333\dots \cdot 10^{-25}$
- 6) 10^{10} litri (1 litro = 1 dm^3 , e $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$) 7) Circa $2,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 28 \text{ g}$
- 8) a) $\approx \frac{4}{3}\pi \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 258,5 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \approx 1082 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 = \mathbf{1,082 \cdot 10^{21} \text{ m}^3}$
 b) $3600 \text{ s} \cdot 24 \cdot 365,25 = 86400 \text{ s} \cdot 365,25 = 31557600 \text{ s} = \mathbf{3,15576 \cdot 10^7 \text{ s}}$ 70 anni $\approx 2,2 \cdot 10^9 \text{ s}$
 c) $\approx (2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot (3,15576 \cdot 10^7 \text{ s}) \approx \mathbf{9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}}$ (1 “anno luce”)
 d) $\approx (3,9 \cdot 10^{16} \text{ m}) : (2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = (3,9 : 2,998) \cdot (10^{16} : 10^8) \text{ s} \approx \mathbf{1,3 \cdot 10^8 \text{ s}}$
 $(1,3 \cdot 10^8 \text{ s}) : (3,15576 \cdot 10^7 \text{ s}) \approx 0,412 \cdot 10 \text{ anni} = \mathbf{4,12 \text{ anni}}$
 e) lunghezza equatore $\approx m \ 6,37 \cdot 10^6 \cdot 2\pi \approx m \ 6,37 \cdot 10^6 \cdot 6,28 \approx m \ 40 \cdot 10^6 = \mathbf{m \ 4 \cdot 10^7}$
 $(m \ 4 \cdot 10^7) : (m \ 10^{-5}) = \mathbf{4 \cdot 10^{12}}$ batteri in fila nel “trenino”
 f) massa di 1 atomo di idrogeno $\approx \text{kg } 1,673 \cdot 10^{-27} = \text{g } 1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 10^3 = \text{g } 1,673 \cdot 10^{-24}$
 massa di 1 mole di idrogeno $\approx \text{g } 1,673 \cdot 10^{-24} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \approx \text{g } 10,0748 \cdot 10^{-1} = \mathbf{g \ 1,00748}$
 g) $\approx (\text{kg } 1,672 \cdot 10^{-27}) : (\text{kg } 9,109 \cdot 10^{-31}) \approx 0,18355 \cdot 10^4 = \mathbf{1,8355 \cdot 10^3}$
- 9) a) $10^{14} \text{ mm} = 10^8 \text{ km}!!!$ b) Circa $1,126 \cdot 10^{14} \text{ mm} = 1,126 \cdot 10^8 \text{ km}$ 10) Circa 184 persone per km^2

9. ESERCIZI SUI NUMERI RELATIVI (risposte a pag. 58)

- Un sommozzatore scende a 35 metri sotto il livello del mare, poi: risale di 12 metri, ridiscende di 25 metri, sale nuovamente di 18 metri. A che profondità si trova a questo punto?
- Se la temperatura, a partire da $+7^\circ\text{C}$, si abbassa di 5° per 3 volte di seguito, a quanti gradi si porta?
- Al Casinò, l'irrequieto Calogero perde subito 10 gettoni, poi per 3 volte consecutive ne vince 5, poi ne punta 20 in un sol colpo ma disgraziatamente li perde.
Se ogni gettone è da 20 euro, qual è la sua situazione finanziaria ora?
- Arturo ha guadagnato, giocando in Borsa, 2500 euro nel mese di Gennaio; a Febbraio ha però perso 1800 euro, in Marzo ha perso il doppio di quanto aveva perso in Febbraio, e in Aprile ha avuto un'altra perdita, tripla di quella di Marzo. Soltanto in Maggio ha poi guadagnato 800 euro.
Qual è la sua situazione finanziaria ora (fine Maggio), rispetto a inizio anno?
E quale espressione con numeri relativi la descrive?
- Una pulce, essendo atterrata per caso su di una *number line*, in corrispondenza del punto di ascissa $+1/2$, compie una serie di 8 saltelli consecutivi, ciascuno di lunghezza $1/3$, verso sinistra, poi, avendo visto un ragno, se la batte rapidamente saltando per 15 volte verso destra; ognuno di questi 15 salti, per il terrore, è di ampiezza doppia rispetto a ciascuno degli 8 salti precedenti. Stabilisci in corrispondenza di quale ascissa si trova ora la pulce, e a quale distanza dal punto di partenza.
- Disegna sul tuo quaderno una **number line**, e su di essa, con l'unità di misura specificata fra parentesi, rappresenta i numeri relativi indicati. La correzione di a) è su carta, quelle di b), c), d), e) su Internet →
 - $-3 + 3 + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} + \frac{20}{3}$ (u = 1 quadretto) b) $-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3,2 - \frac{32}{7}$ (u = 1 quadretto)
 - $+\frac{3}{4} + \frac{13}{4} - \frac{11}{4} - \frac{11}{2} - 1,25$ (u = 1 quadretto) d) $-\frac{9}{2} - \frac{7}{4} + \frac{15}{4} + 1,3 + \sqrt{5}$ (u = 2 quadretti)
 - $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{13}{4} - \frac{27}{8} + 2,2$ (u = 2 quadretti, *number line* verticale)

- Svolgi le seguenti espressioncine nelle quali compare il simbolo di valore assoluto:

$$\text{a) } |-3| + |-1| + |2| + 6 \quad \text{b) } |-15| \cdot (-3) + (-15) \cdot |-3| \quad \text{c) } \frac{(-7+|8|) \cdot (|-5|-7) + 2}{4} \quad \text{d) } \frac{|-5 \cdot 7| + |-5| \cdot |7|}{|-6|-7}$$

- Alcune proprietà del simbolo di “valore assoluto” sono: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ $|a + b| \leq |a| + |b|$

Ora: nella $|a + b| \leq |a| + |b|$, in quali casi il simbolo “ $\leq$ ” (che significa “minore, o uguale”) può diventare “ $=$ ”?

- Quanti sono gli interi relativi strettamente compresi fra -13 e $+3$?
 (“strettamente”) vuol dire $-13 < x < +3$ e NON $-13 \leq x \leq +3$

- Esegui le seguenti **somme algebriche**:

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } -5 - 9 = \dots & \text{e) } +2 + 10 = \dots & \text{i) } -512 + 254 = \dots & \text{o) } -0,45 - 0,3 = \dots & \text{s) } 0 - 0,5 = \dots \\ \text{b) } -12 + 8 = \dots & \text{f) } -5 - 5 = \dots & \text{l) } -132 + 305 = \dots & \text{p) } +13,1 - 24,72 = \dots & \text{t) } -0,41 - 0 = \dots \\ \text{c) } +7 - 9 = \dots & \text{g) } -7 + 7 = \dots & \text{m) } -75 - 142 = \dots & \text{q) } +0,1 - 0,01 = \dots & \text{u) } -0,4\overline{7} + 1 = \dots \\ \text{d) } -3 + 18 = \dots & \text{h) } +4 - 5 = \dots & \text{n) } +37 + 73 = \dots & \text{r) } -3,8 + 4,4 = \dots & \text{v) } 0,0\overline{4} - 0,5 = \dots \end{array}$$

- Esegui le seguenti **somme algebriche tra frazioni**. Esempi:

$$\begin{array}{l} -\frac{7}{10} + \frac{1}{15} = \frac{-21+2}{30} = \frac{-19}{30} = -\frac{19}{30} \quad -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{-2-3-1}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \frac{5}{7} - 3 = \frac{5-21}{7} = \frac{-16}{7} = -\frac{16}{7} \\ +\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8} \quad +\frac{3}{5} - \frac{11}{10} = \frac{6-11}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{10} + 2 - \frac{1}{6} = \frac{-9+60-5}{30} = \frac{46}{30} = \frac{23}{15} \\ \text{a) } -\frac{3}{4} - \frac{4}{5} = \dots \quad \text{c) } -\frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7} = \dots \quad \text{e) } -4 + \frac{11}{3} = \dots \quad \text{g) } -\frac{3}{5} + \frac{3}{10} - \frac{3}{2} + 3 = \dots \\ \text{b) } +\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \dots \quad \text{d) } +3 - \frac{5}{2} = \dots \quad \text{f) } 1 - \frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \dots \quad \text{h) } \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \dots \end{array}$$

- Esegui le seguenti **sottrazioni**. Esempi:

$$-9 - (-5) = -9 + 5 = -4 \quad -\frac{4}{3} - \left(+\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{3} - \frac{1}{5} = \frac{-20-3}{15} = -\frac{23}{15} \quad 5 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 5 + \frac{1}{2} = \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2}$$

- a) $-7 - (-3) = \dots$ b) $+15 - (-6) = \dots$ c) $-1 - (+5) = \dots$ d) $-123 - (-56) = \dots$
 e) $+8 - (-5) = \dots$ f) $10 - (+123) = \dots$ g) $-0,7 - (-1,5) = \dots$ h) $0 - (-9,45) = \dots$
 i) $-\frac{3}{4} - \left(-\frac{4}{5}\right) = \dots$ l) $1 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \dots$ m) $+\frac{1}{2} - \left(+\frac{1}{4}\right) = \dots$ n) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \dots$
 o) $\frac{3}{41} - \left(+\frac{4}{19}\right) = \dots$ p) $-\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \dots$ q) $-\frac{5}{3} - \left(+\frac{2}{5}\right) = \dots$ r) $6 - \left(-\frac{11}{3}\right) = \dots$

13) Esegui le seguenti **somme algebriche**. Esempi:

$$(-4) + (-7) + (+1) - (-3) - (+5) = -4 - 7 + 1 + 3 - 5 = -16 + 4 = -12$$

$$-\frac{5}{12} - \left(-\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{12} + \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{-5 + 28 - 3}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

- a) $-5 + (-3) - (-7) + (+2) = \dots$ e) $0 - (-13) + (+5) + (-9) - (-10) = \dots$ i) $-3 - (+4,7) - (-0,9) = \dots$
 b) $3 + (+8) + (-11) = \dots$ f) $(-40) - (-21) + (-14) = \dots$ l) $2 - \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) = \dots$
 c) $+19 - (-33) + (-14) - (-1) = \dots$ g) $-\frac{4}{9} - \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) - (-1) = \dots$ m) $-\frac{3}{10} - \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{12}{5}\right) = \dots$
 d) $-4 + (-5) - (-6) = \dots$ h) $+4 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \dots$ n) $2,4 - (-3,05) + (-7,45) = \dots$

14) **Operazioni crociate:** riempi le caselle vuote

	+		=	-13
-		-		-
2	+	4	=	
=		=		=
-10	+		=	

-13	-		=	
+		-		+
	+	-3	=	-11
=		=		=
	-	-6	=	

-2	+		=	
+		-		+
-4	-		=	-5
=		=		=
	+		=	-4

	+		=	1
+		-		+
	-	0	=	
=		=		=
-10	+		=	-4

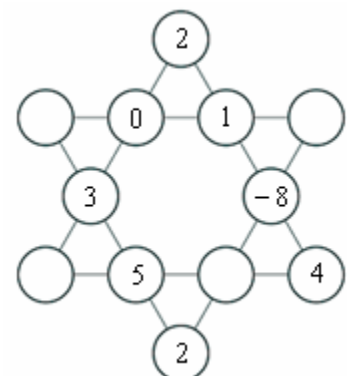
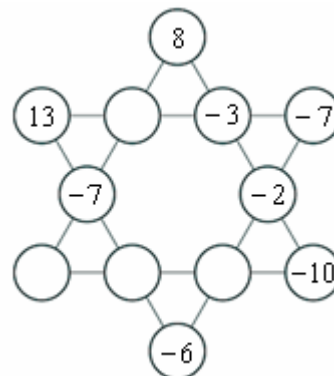
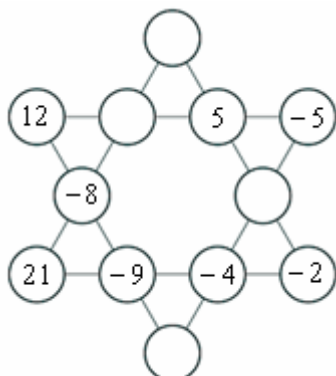
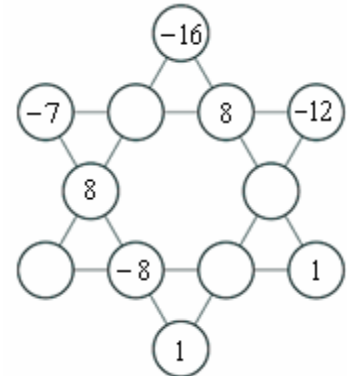
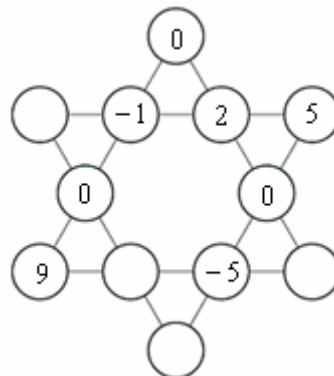
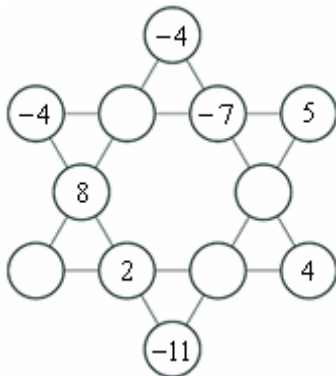
-3	+		=	
-		-		-
-10	+		=	-16
=		=		=
	+	-7	=	

-9	+	4	=	
-		-		-
-9	+		=	
=		=		=
	+	10	=	

Questo
delizioso
sito
merita
la tua
visita!!!



15) **Stelle magiche:** riempi i pallini vuoti (la somma algebrica su ogni linea deve essere sempre la stessa)



16) Esegui le seguenti **moltiplicazioni**. Esempi: $(+5) \cdot (-3) = -15$ $-\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) = +\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

- a) $-7 \cdot (-3) = \dots$ b) $+15 \cdot (-6) = \dots$ c) $-1 \cdot (+5) = \dots$ d) $-20 \cdot (-5) = \dots$
 e) $-\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \dots$ f) $+\frac{2}{3} \cdot \left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \dots$ g) $-\frac{4}{10} \cdot (+5) = \dots$ h) $-7 \cdot \left(-\frac{4}{21}\right) \cdot \left(-\frac{15}{10}\right) = \dots$
 i) $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-8) = \dots$ l) $(+0,3) \cdot (+0,2) = \dots$ m) $0 \cdot (-9,45) = \dots$ n) $-0,3 \cdot (-0,3) = \dots$

17) Esegui le seguenti **divisioni**. Es. $+15 : (-5) = -3$ $(-12) : (-21) = +\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ $-\frac{3}{8} : \left(-\frac{9}{16}\right) = -\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) = \frac{2}{3}$

$$-5 : \left(-\frac{1}{2}\right) = -5 \cdot (-2) = 10 \quad -\frac{4}{3} : \left(+\frac{5}{6}\right) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = -\frac{8}{5} \quad \left(+\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{1}{2}$$

- a) $-4 : (-5) = \dots$ b) $-7 : (+21) = \dots$ c) $+72 : (-8) = \dots$ d) $-22 : (-66) = \dots$ e) $-\frac{3}{4} : \left(-\frac{4}{5}\right) = \dots$ f) $0 : (-3) = \dots$
 g) $+\frac{5}{6} : \left(-\frac{15}{2}\right) = \dots$ h) $-\frac{1}{3} : \frac{1}{30} = \dots$ i) $+\frac{3}{7} : \left(+\frac{12}{30}\right) = \dots$ l) $-1,4 : (-0,2) = \dots$ m) $0,02 : (-0,01) = \dots$

18) **Metti il segno di operazione giusto** al posto del rombo:

- a) $(-5) \blacklozenge (-5) = -10$ b) $(-5) \blacklozenge (-5) = +1$ c) $(-5) \blacklozenge (-5) = 0$ d) $(-5) \blacklozenge (-5) = +25$
 e) $(-6) \blacklozenge (+3) = -3$ f) $(-6) \blacklozenge (+3) = -2$ g) $(-6) \blacklozenge (+3) = -9$ h) $(-6) \blacklozenge (+3) = -18$
 i) $(-8) \blacklozenge 0 = -8$ l) $(-8) \blacklozenge 1 = -8$ m) $(-8) \blacklozenge 1 = -9$ n) $(-8) \blacklozenge 0 = \text{impossibile}$ o) $0 \blacklozenge (-8) = 0$

19) **Trova due interi relativi conoscendone la somma s e il prodotto p:**

$$s = -12, p = +20 \quad s = -1, p = -20 \quad s = +3, p = -18 \quad s = 0, p = -25 \quad s = +30, p = -64 \quad s = -13, p = +12$$

$$s = 12, p = 27 \quad s = -14, p = 40 \quad s = -10, p = -96 \quad s = -70, p = 1000 \quad s = -1, p = -552 \quad s = 1, p = -2$$

20) **Completa le TABELLE.** Risposte a pag. 59; alla fine (NON prima), clicca qui [↗](#) per alcune osservazioni

a	-6	-6	+6	+6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-5	-3	0			+2	$-\frac{1}{4}$	
b	-2	+2	-2	+2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-5	0	-3	+10	-4			$-\frac{3}{4}$
a + b											-5	-7	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{12}$	$-\frac{19}{12}$

a	-6	-6	+6	+6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-5	-3	0			$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
b	-2	+2	-2	+2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-5	0	-3	-6	+5			$-\frac{3}{4}$
a - b											+1	-9	$+\frac{4}{3}$	-2	$+\frac{7}{20}$

a	-6	-6	+6	+6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	+7	-8	$+\frac{2}{3}$		
b	-2	+2	-2	+2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$							$-\frac{1}{6}$	+2
a · b								0	0	1	-21	+16	-4	$+\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{3}$

a	-6	-6	+6	+6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0				$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
b	-2	+2	-2	+2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	+2	$-\frac{1}{12}$		
a : b											6	-5	+8	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

21) 5 amici si mettono d'accordo per giocare in Borsa in "società", ripartendo guadagni e perdite.

Se giorno dopo giorno il loro investimento subisce le seguenti variazioni: $+400 - 100 - 500 - 300 - 500$, scrivi l'espressione che descrive quanto tocca a ciascuno dopo questi 5 giorni, e calcolane il valore.

22) Esegui le seguenti **potenze**. Esempi: $\left(-\frac{7}{9}\right)^2 = +\frac{49}{81}$ $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$ $\left(+\frac{2}{3}\right)^4 = +\frac{16}{81}$ $\left(+\frac{5}{7}\right)^3 = +\frac{125}{343}$

a) $\left(-\frac{1}{10}\right)^3 = \dots$ b) $\left(-\frac{6}{11}\right)^2 = \dots$ c) $\left(+\frac{4}{5}\right)^2 = \dots$ d) $\left(+\frac{3}{5}\right)^3 = \dots$ e) $\left(-\frac{13}{12}\right)^2 = \dots$ f) $\left(-\frac{16}{24}\right)^3 = \dots$ g) $(+4)^4 = \dots$

23) Esegui le seguenti operazioni **applicando le proprietà delle potenze**. Esempi:

$$\left(-\frac{4}{3}\right)^5 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3 : \left(-\frac{4}{3}\right)^6 = \left(-\frac{4}{3}\right)^{5+3-6} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \quad \left(+\frac{6}{7}\right)^5 \cdot \left(-\frac{14}{9}\right)^5 = \left[\left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{14}{9}\right)\right]^5 = \left(-\frac{4}{3}\right)^5 = -\frac{1024}{243}$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^4 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = -\left(\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}$$

$$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^5 : \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right]^3 : \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^{10} : \left(-\frac{2}{5}\right)^9 : \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^{10-9-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

a) $\left(-\frac{1}{10}\right)^6 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = \dots$ b) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^3 : \left(-\frac{2}{3}\right)^7 = \dots$ c) $\left(\frac{12}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right)^3 = \dots$ d) $(+0,2)^5 \cdot (+0,2)^5 : (+0,2)^7 = \dots$

e) $\left[\left(-\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2\right]^3 : \left[\left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right]^4 = \dots$ f) $\left[\frac{(-5)^2 \cdot (-5)^3}{(-5)^4}\right]^5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 = \dots$ g) $\frac{\left(+\frac{3}{10}\right)^3 \left(+\frac{3}{10}\right)^3}{\left(+\frac{3}{10}\right)^2} = \dots$

h) $(+5)^{12} : (-5)^9$ i) $(-10)^4 \cdot 10^3 \cdot (-10)^5$ l) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \left(+\frac{3}{4}\right)\right]$ m) $(-0,3)^3 \cdot (-0,2)^3 \cdot (-0,1)^3$

24) VERO O FALSO?

- a) La differenza fra un numero relativo e il suo opposto è uguale al doppio di quel numero relativo
b) Il quoziente fra due numeri opposti (entrambi non nulli) è sempre -1
c) Il prodotto fra un numero relativo e il suo opposto è uguale al quadrato di quel numero relativo

V	F
V	F
V	F

25) Un intero relativo x ha un certo valore; si osserva che se questo valore diminuisse di 1 unità, il quadrato del numero crescerebbe di 15 unità. Strano, vero? Ma no! Determina, per tentativi, x !

26) Partendo da un numero x sulla *number line* lo elevo al quadrato, e in questo modo passo dall'altra parte rispetto all'origine. Poi sottraggo dal numero ottenuto 1 unità e mi ritrovo, rispetto all'origine, dalla stessa parte del numero iniziale. Cosa mi puoi dire di certo sul numero x ?

27) Sottraggo dal cubo di -5 il quadrato di -5 , aggiungo algebricamente -5 al risultato e infine moltiplico per -5 il numero ottenuto. Scrivi l'espressione algebrica corrispondente a questa procedura, e calcolane il valore.

28) Quanti sono gli interi relativi n tali che $|n| < 5$? E quanti quelli tali che $|n| \leq 5$?

29) VERO O FALSO?

- a) Il quadrato di un numero reale negativo, è sempre maggiore del numero stesso
b) Il quadrato di un numero reale positivo, è sempre maggiore o uguale al numero stesso
c) La somma algebrica di un numero negativo col suo valore assoluto è 0
d) La somma algebrica di un numero positivo col suo valore assoluto è uguale al doppio del numero
e) La distanza di due punti sulla *number line*, è sempre uguale al valore assoluto della differenza delle loro ascisse, prese in un ordine qualsiasi
f) L'ascissa del punto di mezzo di un segmento sulla *number line*, si può sempre ottenere sommando algebricamente le ascisse dei due estremi, poi facendo la metà del risultato
g) Il cubo di un numero reale negativo è sempre minore o uguale al numero stesso

V	F
V	F
V	F
V	F
V	F
V	F
V	F

30) Scrivi il simbolo corretto (" $<$ " o " $>$ ") al posto dei puntini:

a) $-25 \dots -24$ b) $-\frac{15}{4} \dots -\frac{19}{5}$ c) $+\frac{23}{41} \dots -\frac{1}{19}$ d) $-0,02 \dots -0,0\overline{2}$ e) $(+0,12345678)^2 \dots +0,12345678$

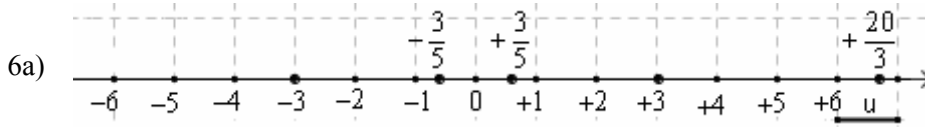
RISPOSTE

1) $-35 + 12 - 25 + 18 = -30$. Si trova a 30 metri sotto la superficie. 2) $+7 - 5 - 5 - 5 = -8$. 8°C sotto zero.

3) $-10 + 5 + 5 + 5 - 20 = -15$. Sta perdendo $15 \cdot 20 = 300$ euro.

4) $+2500 - 1800 - 3600 - 10800 + 800 = -12900$.

5) $+\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + \frac{30}{3} = +\frac{47}{6}$. La distanza dal punto di partenza è data da $\frac{47}{6} - \frac{1}{2} = \frac{44}{6} = \frac{22}{3}$.



7) a) 12 b) -90
c) 0 d) -70

8) Può diventare "=" quando a, b sono concordi (entrambi positivi o entrambi negativi), oppure quando almeno uno dei due numeri a, b è 0

9) 15 10) a) -14 b) -4 c) -2 d) 15 e) 12 f) -10 g) 0 h) -1 i) -258 l) $17\frac{3}{4}$ m) -217 n) $110\frac{1}{2}$
o) -0,75 p) -11,62 q) 0,09 r) 0,6 s) -0,5 t) -0,41 u) $47/90 = 0,52$ v) $-23/45 = -0,51$

11) a) $-\frac{31}{20}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{93}{70}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{6}$ g) $\frac{6}{5}$ h) $\frac{1}{12}$

12) a) -4 b) 21 c) -6 d) -67 e) 13 f) -113 g) 0,8 h) 9,45

i) $\frac{1}{20}$ l) $\frac{7}{3}$ m) $\frac{1}{4}$ n) $\frac{3}{4}$ o) $-\frac{107}{779}$ p) $-\frac{1}{30}$ q) $-\frac{31}{15}$ r) $\frac{29}{3}$

13) a) 1 b) 0 c) 39 d) -3 e) 19 f) -33 g) $\frac{7}{18}$ h) $\frac{11}{3}$ i) -6,8 l) $\frac{13}{4}$ m) $-\frac{101}{30}$ n) -2

14)

-8	+	-5	=	-13
-		-		-
2	+	4	=	6
=		=		=
-10	+	-9	=	-19

-13	-	-9	=	-4
+		-		+
-8	+	-3	=	-11
=		=		=
-21	-	-6	=	-15

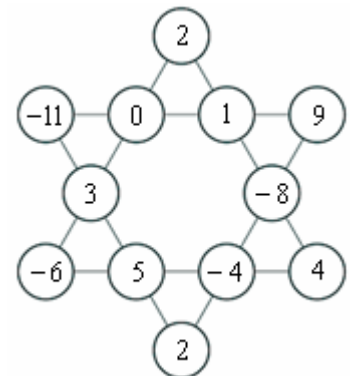
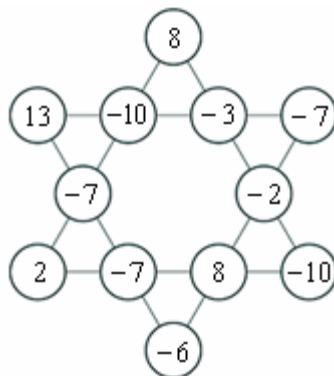
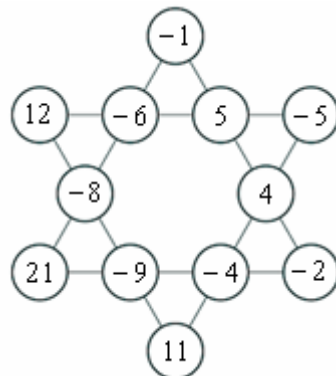
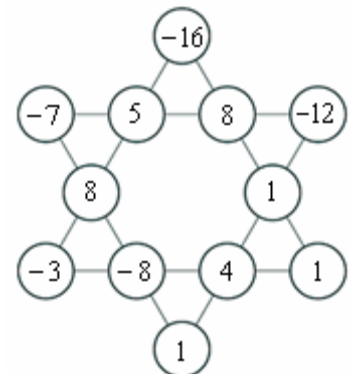
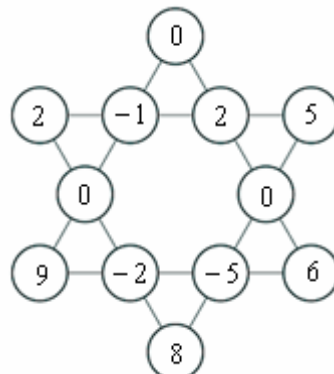
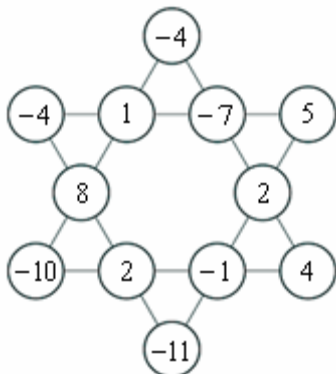
-2	+	3	=	1
+		-		+
-4	-	1	=	-5
=		=		=
-6	+	2	=	-4

-5	+	6	=	1
+		-		+
-5	-	0	=	-5
=		=		=
-10	+	6	=	-4

-3	+	-13	=	-16
-		-		-
-10	+	-6	=	-16
=		=		=
7	+	-7	=	0

-9	+	4	=	-5
-		-		-
-9	+	-6	=	-15
=		=		=
0	+	10	=	10

15)



16) a) 21 b) -90 c) -5 d) 100 e) $\frac{3}{5}$ f) $-\frac{1}{15}$ g) -2 h) -2 i) 1 l) 0,06 m) 0 n) $\frac{1}{10}$

17) a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) -9 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{15}{16}$ f) 0 g) $-\frac{1}{9}$ h) -10 i) $\frac{15}{14}$ l) 7 m) $-\frac{11}{5}$

18) a) + b) : c) - d) · e) + f) : g) - h) · i) + o) - l) · m) - n) : o) ·

19) $s = -12, p = +20 \rightarrow -2, -10$ $s = -1, p = -20 \rightarrow -5, +4$ $s = +3, p = -18 \rightarrow +6, -3$
 $s = 0, p = -25 \rightarrow +5, -5$ $s = +30, p = -64 \rightarrow +32, -2$ $s = -13, p = +12 \rightarrow -12, -1$
 $s = 12, p = 27 \rightarrow 3, 9$ $s = -14, p = 40 \rightarrow -4, -10$ $s = -10, p = -96 \rightarrow -16, +6$
 $s = -70, p = 1000 \rightarrow -50, -20$ $s = -1, p = -552 \rightarrow -24, +23$ $s = 1, p = -2 \rightarrow +2, -1$

20)

a	-6	-6	+6	+6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-5	-3	0	-15	-3	+2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{6}$
b	-2	+2	-2	+2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-5	0	-3	+10	-4	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{4}$
a + b	-8	-4	+4	+8	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	-10	-3	-3	-5	-7	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{12}$	$-\frac{19}{12}$

a	-6	-6	+6	+6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-5	-3	0	-5	-4	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{5}$
b	-2	+2	-2	+2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-5	0	-3	-6	+5	-1	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$
a - b	-4	-8	+8	+4	$-\frac{5}{6}$	$+\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	-3	+3	+1	-9	$+\frac{4}{3}$	-2	$+\frac{7}{20}$

a	-6	-6	+6	+6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	+7	-8	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$
b	-2	+2	-2	+2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	indet.	0	imp.	-3	-2	-6	$-\frac{1}{6}$	+2
a · b	+12	-12	-12	+12	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$	0	0	1	-21	+16	-4	$+\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{3}$

a	-6	-6	+6	+6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	3	-10	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
b	-2	+2	-2	+2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	+2	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	3
a : b	+3	-3	-3	+3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$	imp.	indet.	0	6	-5	+8	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

21) $(+400 - 100 - 500 - 300 - 500) : 5 = -1000 : 5 = -200$. Vale a dire, ognuno dei 5 amici sta perdendo 200 euro.

22) a) $-\frac{1}{1000}$ b) $\frac{36}{121}$ c) $\frac{16}{25}$ d) $\frac{27}{125}$ e) $\frac{169}{144}$ f) $\left(-\frac{16}{24}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$ g) 256

23) a) $\left(-\frac{1}{10}\right)^7 = -\frac{1}{10000000}$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$ d) $(+0,2)^3 = 0,008$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$ g) $\left(+\frac{3}{10}\right)^4 = \frac{81}{10000}$

h) Nonostante le basi siano diverse, si può fare così: $(+5)^{12} : (-5)^9 = 5^{12} : (-5^9) = -(5^{12} : 5^9) = -5^3 = -125$

i) $(-10)^4 \cdot 10^3 \cdot (-10)^5 = 10^4 \cdot 10^3 \cdot (-10^5) = -10^{12} = -1\,000\,000\,000\,000$ l) 1 m) $(-0,006)^3 = -0,000000216$

24) a) V b) V c) F (è uguale all'opposto del quadrato di quel numero relativo)

25) $x = -7$ 26) Che x è strettamente compreso fra -1 e 0 27) $[(-5)^3 - (-5)^2 + (-5)] \cdot (-5) = +775$

28) Gli interi relativi n tali che $|n| < 5$ sono 9: -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4;
quelli tali che $|n| \leq 5$ sono 11, perché bisogna aggiungere il -5 e il +5.

29) a) V b) F (se il n° sta fra 0 e 1, il suo quadrato è inferiore rispetto al n° iniziale: ad es., $0,3^2 = 0,09 < 0,3$)

c) V d) V e) V f) V g) F (se x è compreso fra -1 e 0, ossia $-1 < x < 0$, allora $x^3 > x$)

30) a) < b) > c) > d) > e) < : se $0 < x < 1$ ("x compreso fra 0 e 1") si ha $x^2 < x$. Ad esempio, $(1/2)^2 = 1/4 < 1/2$

ESPRESSIONI VARIE CON NUMERI RELATIVI(risultati alla pagina seguente; [clicca sulla freccia](#) per gli **svolgimenti**, e per alcune **osservazioni utili** ➡)

- 1) $-11+15-7$ 2) $-6-7+22$
 3) $12-30-5+2$ 4) $-2-4-8-16+3+5+7+16$
 5) $+11-25+33-44+27$ 6) $-10-9+8-7+6+5+4$
 7) $-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ 8) $\frac{4}{3}-\frac{11}{2}+3$
 9) $-\frac{3}{5}+\frac{7}{2}-2-\frac{1}{4}$ 10) $\frac{25}{6}-4,\bar{5}$
 11) $-\frac{23}{24}+4,5-\frac{5}{16}$ 12) $-7+(-5+3-14)-(1-16+4)$



**SUG -
GERI -
MENTI
DA
AMICO!!!**

♥ DOPO ogni passaggio, rileggi sempre!

♥ PRIMA di ogni passaggio, domandati:
 “A questo punto, cosa devo fare?
 Cosa mi conviene fare?”

- 13) $-(-5+13)-(6-11)+(7-15)+12$ 14) $-(-13)-(-10+24)+(7-11)+5$
 15) $(-13-21+18)+(-11+21-14)-(+11-25+1)$ 16) $+15-(-7-3+6)+(2-20)$
 17) $-(-5+8-9)-(-7+3)+(-5-6+1)$ 18) $+(-18-8+7)+(-3-5)-(-7+4)$
 19) $-\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-1\right)$ 20) $-\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-1\right)$
 21) $\left(-1+\frac{7}{5}\right)+\left(-2+\frac{9}{10}\right)-\left(+4-\frac{7}{2}\right)$ 22) $\frac{5}{4}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)$
 23) $\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-2+\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{3}$ 24) $-\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\right)$
 25) $\frac{1}{6}-\left[3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{1}{3}\right)\right]$ 26) $-\left[4-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]+\left[\frac{13}{4}-\left(2-\frac{3}{2}\right)\right]+\frac{5}{6}$
 27) $\left[-\left(3+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{8}{3}+2\right)\right]-\left[-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right]-0,75$ 28) $-0,5\bar{3}-\left[\left(0,2-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}-0,3\right)\right]$
 29) $-4,5-\{3,6-[-(-4,2+2,8)-(-3+0,7)]\}$ 30) $4-[0,01-(-3,5-0,05)]-(0,03+2,09)$
 31) $-8\cdot(-7)+(-6)\cdot(+5)+(+11)\cdot(-9)+(+4)\cdot(+13)$ 32) $-5\cdot 4-3\cdot(-2)+2\cdot(-4)+(-3)\cdot(-5)+8$
 33) $(-5-4)(-10+4)+5\cdot(-11)-(+3)(-2)$ 34) $(+7-11-4)\cdot(-17+2+11)-(-13+5)$
 35) $\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)+\frac{13}{5}$ 36) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$
 37) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)\cdot 240$ 38) $\left(-2+\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot(-12)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-3\right)+\frac{1}{4}$
 39) $\left[1+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]\cdot\frac{16}{9}-1$ 40) $\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}+2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$
 41) $-2\cdot\left\{\left[-\frac{1}{8}-\left(1-\frac{5}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)-\frac{11}{24}\right\}$ 42) $\left(-\frac{1}{2}+0,\bar{3}+0,1\bar{6}\right)\cdot\left(0,3-\frac{1}{2}\right)$
 43) $\left[-(-0,\bar{2})+4\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)\right]\cdot(-6)+\frac{1}{3}$ 44) $(-5-9+2):(-11+8)+(-7+9+6)\cdot(-7+5)$
 45) $2:\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)+(-4-6):(-3+1)$ 46) $\left(\frac{11}{13}-\frac{13}{11}\right):\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)+25$
 47) $\left(-2+\frac{3}{4}\right):\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{2}{3}-3\right)$ 48) $\frac{8}{3}+\left[-\left(-\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\right]:(-0,75)$

$$\begin{array}{ll}
49) \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} - \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} & 50) \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}-1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \\
51) -\frac{2}{15} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + \frac{-1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} & 52) \frac{-\frac{13}{72}}{-\frac{7}{9}-\frac{9}{7}} - 3 \cdot \frac{1+\frac{13}{16}}{5} \\
53) \frac{1}{2} : 2 + \frac{\frac{1}{3}}{4 : \frac{1}{4} + \frac{5}{1} - 43} + \frac{41}{36} & 54) (-5)^3 + (-3)^2 + (+2)^5 + (+3)^4 \\
55) (-3)^5 + (-4)^4 + (+5)^3 + (+6)^2 + (-7)^1 + (-8)^0 & 56) \frac{(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5}{(-6)^2 - [(+2)^3 + (+2)^2 + (+2)^1 + (+2)^0]} \\
57) \frac{(-4)^2 + (-3)^2}{[3 + (-2)^3]^2} & 58) \frac{-7^2 + (-5)^2 + (-2)^4}{(-2)^3} \rightarrow \begin{array}{l} \text{OCCHIO!} \\ (-7)^2 = +49, \\ \text{MA } -7^2 = -49 \end{array} \\
59) \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{9}\right)^2 \right] \cdot (-3)^4 & 60) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \right] : \frac{3}{-2^4} + 1 \\
61) \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3} \cdot (-31) - \frac{1}{2} & 62) \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^8 : \left(-\frac{2}{5}\right)^6}{4} : \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) + 0,6 \\
63) \frac{(30^8)^2}{(-15) \cdot (-15)^5 \cdot (-15)^{10}} : [(2^2)^3]^2 & 64) \frac{1}{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \right] \cdot [(-2)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2]} + 2 \\
65) \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(-\frac{3}{7}\right)^7 + \frac{40}{-7^2} & 66) \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \\
67) (5^{-2} + 5^{-1}) : (5^1 + 5^2) \cdot 5^3 & 68) \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} + \left(+\frac{3}{10}\right)^{-2} + \frac{1}{72} \\
69) \left(+\frac{2}{3}\right)^{-3} + (-2)^{-2} : 2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 & 70) -3^{-4} + (-9)^{-2} \\
71) \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} - (-2)^{-4} - 2^{-1} & 72) \frac{(-3)^{-2} + (-2)^{-3}}{4^{-2}} - \frac{3^2 - 2}{2^3 + 1} \\
73) \frac{10^{-1} + 10^3}{-10^{-2} - 10^2} & 74) \frac{10^{-1} \cdot 10^3}{10^{-2} \cdot 10^2} \\
75) \frac{1}{12} - \left(-\frac{12}{11}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{12}{11}\right)^{-4} \cdot \left[\left(-\frac{12}{11}\right)^2\right]^4 & 76) 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \cdot \frac{3}{4} - 1 \\
77) \frac{4^{-2} \cdot 4^{-4} \cdot 4^{-4}}{8^{-1} \cdot 8^3 \cdot (8^4)^{-3}} & 78) \left(+\frac{7}{6}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{9}{14}\right)^{-5} \cdot \left(+\frac{1}{12}\right)^{-5} : [(2^3)^3]^2 \\
79) [(2^{-1} + 3^{-1}) \cdot 5^{-1}]^{-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} & 80) \frac{-3^8 \cdot (-3)^4}{-2^3 - 1^4} : 27^3
\end{array}$$

RISULTATI

1) -3	2) 9	3) -21	4) 1	5) 2	6) -3	7) $-\frac{1}{12}$	8) $-\frac{7}{6}$
9) $\frac{13}{20}$	10) $-\frac{7}{18}$	11) $\frac{155}{48}$	12) -12	13) 1	14) 0	15) -7	16) 1
17) 0	18) -24	19) $-\frac{5}{12}$	20) $-\frac{13}{12}$	21) $-\frac{6}{5}$	22) 1	23) -2	24) 1
25) $-\frac{15}{4}$	26) 0	27) -5	28) $\frac{23}{30}$	29) -4,4	30) -1,68	31) -21	32) 1
33) 5	34) 40	35) 3	36) $\frac{1}{40}$	37) 1	38) 0	39) 0	40) 1
41) 1	42) 0	43) 1	44) -12	45) -1	46) 1	47) -1	48) 1
49) $-\frac{3}{2}$	50) 0	51) -2	52) -1	53) 1	54) -3	55) 168	56) -1
57) 1	58) 1	59) 1	60) 0	61) 1	62) 1	63) 16	64) 0
65) -1	66) 1	67) 1	68) $-9/2$	69) 4	70) 0	71) 1	72) -1
73) -10	74) 100	75) 1	76) 3	77) 1024	78) -4	79) 1	80) 3

NUMERI INDICATI CON LETTERE; ALTRE ESPRESSIONI NUMERICHE

In Matematica ci si serve molto frequentemente di lettere per indicare dei numeri.
Il numero rappresentato da una lettera può essere, a seconda di casi, *variabile*, *costante* o *incognito*.
Vedi a proposito pag. 100.

**A) Calcola il valore delle
ESPRESSIONI LETTERALI
sotto elencate,
per i valori delle lettere scritti accanto.**

NOTA ♥ Una scrittura del tipo $[...]_{a=...}$

significa che si vuole calcolare il valore
che l'espressione entro le quadre assume,
quando alla lettera si dà il valore specificato.

Esempio svolto (vedi la NOTA):

Calcolare $\frac{(a^2 - a)^2}{a - 1}$ per $a = -\frac{1}{2}$

Queste quadre servono per "inscatolare"
l'espressione, la quale andrà poi calcolata
sostituendo al posto della lettera il valore
scritto in basso a destra della parentesi chiusa.

$$\left[\frac{(a^2 - a)^2}{a - 1} \right]_{a = -\frac{1}{2}} = \left[\frac{\left(\left(-\frac{1}{2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right)^2}{-\frac{1}{2} - 1} \right] = \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)^2}{-\frac{1-2}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^2}{-\frac{3}{2}} = \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{16}_8} \cdot \left(-\frac{\cancel{2}}{3} \right) = \boxed{-\frac{3}{8}}$$

1) $a(a+2) - 3a$ a) $a = -7$ b) $a = 0$ c) $a = +2$	2) $w(5w-3)$ a) $w = -3/10$ b) $w = 3/5$	3) $\frac{(t-1)(t-2)}{(t-3)(t-4)}$ a) $t = 0$ b) $t = 1$ c) $t = -1$
4) $\frac{4x(x+2y)}{(x-y)^2}$ a) $x = -2, y = 2$ b) $x = -1/4, y = -1/2$ c) $x = -1, y = 1/2$	5) $\frac{\frac{a-b}{b-a}}{a+b}$ a) $a = -1, b = 2$ b) $a = 2, b = -4$ c) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$ d) $a = 2, b = \frac{1}{3}$ e) $a = -\frac{1}{5}, b = 1$	
6) $\frac{m^4 - m^3}{-m^2 + 2}$ a) $m = 2$ b) $m = -2$	7) $(x+1)^2 - (x-1)^2 - 4x$ a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = -3$ e) $x = 1/3$ f) $x = -4/5$	

**B) Le uguaglianze sotto elencate sono delle EQUAZIONI,
ossia di fronte ad esse ci domandiamo:
esistono dei valori della lettera che verificano l'uguaglianza?
E in caso affermativo, quali sono? (pag. 149).
Accanto a ciascuna sono proposti dei valori per la lettera;
di essi, alcuni sono soluzione, altri no.
Sostituisci, per riconoscere le soluzioni.**

Esempio svolto

Quali, fra i numeri
 $-1, -2, -3,$
sono soluzioni dell'equazione
 $1 - x^2 = 4(x+1)$?

Con $x = -1$: $1 - (-1)^2 = 4(-1+1)$; $1 - 1 = 4 \cdot 0$; $0 = 0$ OK, è soluzione

Con $x = -2$: $1 - (-2)^2 = 4(-2+1)$; $1 - 4 = 4 \cdot (-1)$; $-3 = -4$ NO

Con $x = -3$: $1 - (-3)^2 = 4(-3+1)$; $1 - 9 = 4 \cdot (-2)$; $-8 = -8$ OK, è soluzione

8) $x(x-2) = 6 - x$ 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3	9) $(x+4)^2 - x^2 = 2(x+1)$ -3, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{7}{3}$, -2
10) $-\frac{1}{2}\left(5 + \frac{3}{x}\right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 2$ 1, -1, $-\frac{1}{4}$, 0	11) $\frac{x+2}{x^2+5x-24} - \frac{1}{x^2-5x+6} = 0$ 0, -3, +3, 4
12) $\frac{5}{8}a - \frac{9a-1}{16} = 0$ 1, -1, 2, -2	13) $y(9y^3 + 12y^2 + 2) = 11y^2$ 0, -1, -2, $\frac{1}{3}$

14) Prova a risolvere per tentativi le equazioncine che seguono

(ciascuna delle quali ha una sola soluzione, tranne la c) che ne ha due).

Si tratta di provare a trovare "a mente" quel numero che sostituito al posto di x rende vera l'uguaglianza.

a) $\frac{10}{x} = -5$ b) $\frac{1}{4}x - 3 = 0$ c) $x^2 = x + 30$ d) $24(x+7) = 0$ e) $\sqrt{x} + 1 = 9$

C) Si può dimostrare che le uguaglianze sotto elencate sono delle IDENTITÀ' (vedi pag. 149 in fondo); vale a dire, valgono per qualsiasi valore "ammissibile" delle lettere coinvolte. Un valore non è "ammissibile" se dà luogo a un'operazione "non eseguibile" (es. la divisione per 0). Verifica la validità di ciascuna identità, per i valori delle lettere specificati accanto.

Esempio svolto: verifica la validità dell'identità $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a^2-b^2} = -\frac{1}{ab(a+b)}$ nel caso $a=3, b=-6$

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{-6}}{3^2-(-6)^2} = -\frac{1}{3 \cdot (-6) \cdot (3-6)} \quad \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{9-36} = -\frac{1}{-18 \cdot (-3)} \quad \frac{\frac{3}{6}}{-27} = -\frac{1}{54} \quad \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{1}{54} \quad -\frac{1}{54} = -\frac{1}{54} \quad \boxed{\text{OK!!!}}$$

15) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = a-b$ $a=4, b=5$ $a=-1, b=1/2$ $a=-2/3, b=-2$	16) $\frac{x-y}{\frac{1}{y-1}-\frac{1}{x-1}} = (x-1)(y-1)$ $x=3, y=-2$ $x=2, y=-1/2$ $x=1, y=3$ (?) $\Rightarrow$
17) $\frac{k+1}{k-1} - \frac{k-1}{k+1} = \frac{4k}{k^2-1}$ $k=0; k=2;$ $k=3; k=-1/2$	18) $\frac{1}{m-1} + \frac{m}{1-m^2} = \frac{1}{m^2-1}$ $m=2; m=-2; m=0;$ $m=3/5; m=-1/4$
19) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$ $a=2, b=4, c=6$ $a=0, b=-3, c=5$ $a=1, b=1/2, c=1/3$ $a=-1/2, b=-1/3, c=-1/4$	

D) Altre espressioni numeriche

$$\begin{aligned}
 &20) -\frac{2}{3} : \left(-1 - \frac{2}{3}\right) - \left[-\left(-\frac{7}{5}\right)\right] \quad 21) \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5}\right) \left(\frac{1}{14} - \frac{2}{7}\right) - \left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{5}\right) \quad 22) \frac{1}{3} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{10}\right) : \left(-1 + \frac{1}{4}\right) \\
 &23) \left(-\frac{13}{60} + \frac{7}{20}\right) : \left(\frac{3}{10} - \frac{4}{15}\right) \quad 24) \left[-1 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right] \cdot \left(-3 - \frac{9}{2}\right) \quad 25) \left[\left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{26} - \frac{1}{18}\right] : \left(1 - \frac{7}{12}\right) \\
 &26) \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + \frac{1}{3}\right] : \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \quad 27) \left[\frac{3}{4} \cdot \left(-1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}\right] \cdot \frac{3}{2} + 1 \quad 28) \left\{\left[-9 : (-15) - \frac{7}{5}\right] \cdot \frac{1}{2}\right\} : \left(-\frac{1}{5}\right) \\
 &29) 6 - 1 : \left\{\left[\left(-\frac{3}{4} - 1\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) - \frac{3}{2}\right] \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{12}\right\} \quad 30) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{2^3}{2^3-1} : (-24) - \frac{2 \cdot 5^2 + 1}{7} : (-7) \\
 &31) 3 \cdot \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{12}\right) \left(\frac{-5^2+1}{5}\right)\right] \quad 32) -\frac{3}{7} \cdot \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{(-2)^2}\right] \cdot (-2^2) \quad 33) +\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{7}{5}\right) - \left(\frac{-1}{12} - 6^{-1} - 2^{-2}\right) \\
 &34) \left\{(-2)^3 \cdot \left[-(-2)^{-1} - 0,75\right] - 2^2 - 1^2\right\} \cdot (6^{-1} - 2^{-1}) \quad 35) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - (0,2)^{-1}\right] \cdot \left(-0,5 - \frac{1}{5}\right) - 10^{-1} \\
 &36) \frac{\frac{-1-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} + \frac{-1-2^{-1}+2^{-2}}{1-2^{-1}-2^{-2}}}{-(-2)^3} \quad 37) \left(\frac{-0,15-\frac{4}{5}}{-0,35+\frac{3}{10}} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{6}\right) \quad 38) \frac{-\left(\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{3}{10}-\frac{1}{5}} + \frac{2}{3^{-2}}
 \end{aligned}$$

RISPOSTE

- 1) a) 56 b) 0 c) 2 2) a) 27/20 b) 0 3) a) 1/6 b) 0 c) 3/10 4) a) -1 b) 20 c) 0
 5) a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 6 6) a) -4 b) -12 7) a, b, c, d, e, f): 0
 8) $x=3, x=-2$ 9) $x=-7/3$ 10) $x=-1/4$ 11) $x=-3, x=4$ 12) $a=-1$ 13) $y=0, y=-2, y=1/3$
 14) a) $x=-2$ b) $x=12$ c) $x=6$ oppure $x=-5$ d) $x=-7$ e) $x=64$
 16) Qui il valore 1 non è ammissibile per x ! Infatti, ponendo $x=1$, si otterrebbe un denominatore uguale a 0, e la divisione per 0 è una "operazione non eseguibile" (illegal operation).
 20) -1 21) -1/10 22) 3 23) 4 24) 8 25) -1/3 26) -1 27) 0 28) 2 29) 0
 30) 1 31) -2 32) -1 33) 0 34) 1 35) 2 36) -1 37) -2 38) 0

10. NUMERI E OPERAZIONI: TUTTO QUELLO CHE DEVI SAPERE IN 50 DOMANDE

I due capitoli iniziali, quelli sui numeri e sulle operazioni con le loro proprietà, sono di importanza colossale. Devono essere acquisiti al meglio, perché da essi dipende tutta la matematica successiva. Ecco una serie di domande alle quali occorre saper rispondere se si vuol procedere su basi sicure.

- 1) Si ha una “corrispondenza biunivoca” fra due insiemi A e B quando ad OGNI elemento di A si può far corrispondere UNO E UN SOLO elemento di B, e ... *Cosa manca? Cosa va messo al posto dei puntini?*
- 2) Si dice “numero intero” quell’entità astratta, quel “quid”, che è comune a tutti gli insiemi, che possono essere messi in ... con un insieme dato (purché questo non sia ...)
- 3) La “somma” di numeri interi ha a che fare con l’operazione insiemistica di ... , il cui simbolo è ...
- 4) La sottrazione è definita come l’operazione inversa dell’addizione: in che senso? E la divisione?
- 5) E’ giusto dire che i multipli di 7 sono: 14, 21, 28, 35, ecc. ? Quanti divisori ha il 7?
- 6) Alcuni fra i Criteri di Divisibilità presuppongono di effettuare somme di cifre. Quali?
- 7) Si dice “primo” un intero divisibile solo per sé stesso e per 1. *Cosa manca, in questa definizione?*
- 8) 0 rientra tra i numeri pari? E tra i numeri primi? Esistono numeri primi pari?
- 9) 1 rientra tra i numeri dispari? E tra i numeri primi? La negazione di “primo” è ...
- 10) Due interi sono detti “primi fra loro” se ... In tal caso, il loro M.C.D. è ... e il loro m.c.m. è ...
- 11) Trova il più piccolo intero superiore a 300 che non sia primo, ma sia primo con 210
- 12) Per determinare il M.C.D. fra due o più interi dopo averli scomposti in fattori primi, quali fattori si prendono? Stessa domanda per il m.c.m.
- 13) Per riconoscere che un intero n è primo, non è necessario verificare che non è divisibile per nessun numero primo $< n$. Basta infatti constatare che non ha divisori primi $\leq \dots$
- 14) L’intero di cinque cifre $79y48$ è divisibile per 11. Quanto vale la cifra y ?
- 15) La proprietà che consente di semplificare una frazione prende il nome di ...
- 16) $0^0 = \dots$ $7^0 = \dots$ $0^7 = \dots$ $0^1 = \dots$ $1^0 = \dots$ $1^1 = \dots$
- 17) La somma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ ha un valore che si avvicina, prendendo tantissimi addendi, a ...
- 18) E’ giusto dire che in un periodico misto l’antiperiodo è “tutto ciò che sta a sinistra del periodo”?
- 19) Enuncia la regola per trasformare in frazione a) un periodico semplice b) un periodico misto
- 20) I possibili resti di una divisione intera per 19 sono: ...
- 21) Una frazione, ridotta ai minimi termini, che abbia per denominatore 192, se venisse trasformata, con la divisione, in numero con la virgola, che tipo di decimale produrrebbe? Qual è la regola generale?
- 22) “Ratio” in Latino, nel suo senso matematico, e anche in Inglese, è sinonimo di ...
- 23) Cosa vuol dire, per un numero, essere “irrazionale”?
Scrivi un esempio di numero con la virgola, irrazionale.
- 24) L’insieme di tutti i numeri, razionali + irrazionali, viene detto “insieme dei numeri ...”
- 25) Trasforma in frazione il numero periodico $0,06\overline{7}$ col metodo dell’equazione. Fai la verifica, dividendo.
- 26) Spiega a parole cosa dice la proprietà distributiva generalizzata; inventa un esempio.
- 27) Spiega a parole cosa dice la proprietà invariantiva della sottrazione; inventa un esempio.
- 28) Spiega a parole cosa dice la proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma; inventa un esempio.
- 29) “Per moltiplicare, o dividere, un prodotto per un numero, basta ...”
- 30) Nella “divisione intera” intervengono 4 interi a, b, c, r (dividendo, divisore, quoziente, resto). Fra di essi vale l’uguaglianza $c \cdot \dots + \dots = \dots$ e inoltre deve sussistere la disuguaglianza ...
Fai un esempio di situazione reale in cui non ha senso la divisione “ordinaria”, ma ci vuole quella “intera”.
- 31) Cosa dice la “legge di annullamento del prodotto”?
- 32) Perché l’operazione $0:0$ è considerata “indeterminata”?
Quale altra operazione “indeterminata” conosci? Spiega la ragione anche in questo caso.

- 33) a) $\frac{0}{13} = \dots$ b) $\frac{0}{0} = \dots$ c) $\frac{13}{13} = \dots$ d) $\frac{13}{0} = \dots$ e) In che senso " $\frac{1}{0} = \infty$ " ?
- 34) Qual è l'elemento neutro del prodotto? E della somma?
Quale l'elemento assorbente del prodotto? La somma ha un elemento "assorbente"?
- 35) Descrivi a parole le proprietà delle potenze simboleggiate dalle uguaglianze seguenti:
I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ II) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ III) $a^n : b^n = (a:b)^n$ IV) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- 36) Quali proprietà delle operazioni sono state applicate nelle seguenti catene? Descrivile a parole.
a) $(3+4)(3+6):3 = (9+18+12+24):3 = 3+6+4+8 = 3+8+6+4 = 11+10 = 21$ b) $15^4 : 5^4 = 3^4 = 81$
c) $\frac{(3^8 : 3^2)^2}{36} = \frac{(3^6)^2}{36} = \frac{3^{12}}{36} = \frac{3^{10}}{4}$ d) $\frac{(8 \cdot 10)^6}{2^5 \cdot 4^5} = \frac{8^6 \cdot 10^6}{8^5} = 8 \cdot 10^6 = 8000000$ e) $(23 \cdot 25 \cdot 3) \cdot 4 = 23 \cdot 100 \cdot 3$
- 37) Su di una *number line* rappresenta con la massima precisione,
prendendo per unità di misura un segmento di 4 quadretti, i numeri: $+\frac{15}{4}$; $-\frac{21}{8}$; $-2,3$; $-2,\bar{3}$; $+\frac{2}{3}$
- 38) Quando due numeri relativi sono discordi,
la loro somma algebrica ha per segno ... e per valore assoluto ...
- 39) La regola "– moltiplicato – dà +" può essere giustificata facendo vedere che è l'unica regola compatibile con una ben determinata proprietà delle operazioni: quale?
- 40) Il reciproco di un numero relativo è definito come quel numero relativo che ...
- 41) Tutti i numeri relativi hanno il proprio reciproco?
- 42) Quali sono i due simboli alternativi coi quali si può indicare il *reciproco* di un numero non nullo x ?
E con che simbolo si indica invece l'*opposto* di un numero relativo x ?
- 43) Può il quadrato di un numero a essere minore del numero di partenza?
- 44) Che significato ha il prefisso "Kilo" ordinariamente e, invece, in (determinati) contesti informatici?
E "Mega"? E "Giga"? E "Tera"?
- 45) Il moltiplicatore a della potenza di 10 in un numero espresso in notazione scientifica,
che requisito deve possedere?
Scrivi in notazione scientifica i tre numeri seguenti: 432,1 0,000001234 21000000000
- 46) Svolgi la seguente espressione, e portane il risultato in notazione scientifica: $(3,2 \cdot 10^{-13}) : (5 \cdot 10^{-4})^2$
- 47) La luce viaggia a circa $3 \cdot 10^5$ km/s. Quanti secondi ci mette a percorrere un metro?
Scrivi la risposta in notazione scientifica.
- 48) a) $\left[2 \cdot \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} \right]_{x = -\frac{1}{2}}$ b) $\left[-a^2 + \frac{a^{-2}}{4} - 0,75 \right]_{a = \frac{1}{2}}$ c) $\left[\frac{(-x)^2 - x^2}{x} - x^4 \right]_{x = 3}$
- 49) Svolgi le seguenti espressioni, descrivendo le proprietà delle potenze applicate:
a) $\frac{5^3 \cdot 5^{-4} \cdot 5^{-5}}{5^{-11}} \cdot 2^5 : 10^5$ b) $\frac{\left[\left(\frac{1}{3} \right)^{-5} \cdot 18^{-5} \right]^2}{3^{-10}} \cdot 2^{11}$ c) $\frac{1}{\left[7^{20} : 7^2 \cdot (7^3)^{-3} \cdot 7 \right] \cdot 14^{-10}}$
- 50) E' data l'equazione $2(x+1)(x-1) = -3x$.
Considera i numeri di seguito elencati,
e metti un cerchietto o un rettangolino intorno a quelli che sono soluzioni dell'equazione.
 $0 \quad +1 \quad -1 \quad +2 \quad -2 \quad +\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

ALCUNE RISPOSTE

- 1) "viceversa" 5) No, cominciano dal 7 7) Occorre specificare che il numero dev'essere >1
11) 319 13) $\leq \sqrt{n}$ 14) $y = 9$ 20) 0, 1, 2, ..., 18 22) "rapporto, quoziente" 30) $c \cdot b + r = a$, $r < b$
43) Sì, se è a compreso fra 0 e 1 ($0 < a < 1$) 45) $1 \leq a < 10$; $4,321 \cdot 10^2$; $1,234 \cdot 10^{-6}$; $2,1 \cdot 10^{10}$
46) $1,28 \cdot 10^{-6}$ 47) $3,333... \cdot 10^{-9}$ secondi 48) a) 1 b) 0 c) -81 49) a) 1 b) 2 c) 1024 50) -2, +1/2

11. DUE RIGHE DI STORIA (GRAZIE a Stefano Barbero dell'Università di Torino!)

La presenza dei numeri relativi nella storia dell'uomo si può far risalire alle civiltà antiche in cui si svilupparono i commerci e le attività agricole.

L'aumentare degli scambi di merci fece comparire il concetto di debito o spesa, che si contrapponeva a quello di guadagno o ricavo. Occorreva in qualche modo segnalare e distinguere nei conteggi i numeri associati a cose che si dovevano dare o erano andate perse da quelli concernenti cose che si avevano o venivano acquisite.

Le prime testimonianze scritte di questa distinzione tra numeri si possono ritrovare già in testi cuneiformi babilonesi risalenti all'epoca intorno al 2000 a. C.: piccole raccolte di problemi di matematica di autore ignoto, in cui compaiono quantità indicanti debiti commerciali. Sempre in tavolette babilonesi di autore sconosciuto, risalenti al III secolo a. C., si usano numeri finalizzati a rappresentare debiti o mancanze, accanto a quantità relative a tempi e misurazioni astronomiche, e persino alcune regole di calcolo coinvolgenti i numeri negativi.

L'idea che numeri di questo genere, indicanti qualcosa che ci viene tolto o che non si possiede, potessero essere accettati come soluzioni di problemi o manipolati con regole ben precise compatibili con quelle degli altri numeri "normali", dovette comunque affermarsi a fatica nel corso dei secoli.

Altre testimonianze dell'uso di numeri negativi si ritrovano nel testo *Arithmetica* del matematico greco Diofanto (circa 250 d. C.) il quale fa cenno a due categorie di numeri distinti da lui chiamati *numeri additivi* e *numeri sottrattivi* ed enuncia, forse per primo, la regola che descrive il prodotto fra due negativi: "meno per meno fa più".

Pure i matematici ed i contabili cinesi e indiani fecero ricorso a numeri dotati di segno.

In Cina già a partire dal III secolo a.C. si era sviluppato un sistema di calcolo algebrico, il *cheng fu shu*, o "operazioni positive e negative", in cui i numeri venivano rappresentati mediante bacchette di colore diverso: rosse a indicare i positivi (*cheng*) e nere per i negativi (*fu*).

E altrettanto in India ritroviamo la concezione di credito e debito, con l'uso di numeri negativi per esprimere quest'ultimo.

Il matematico Brahmagupta (circa 628 d. C.) pare si trovasse a risolvere un problema di contabilità per il proprio sovrano quando ebbe l'intuizione, per agevolare i propri calcoli, di rappresentare su di una sbarretta i numeri indicanti i debiti ed i crediti rispettivamente a sinistra e a destra di un punto rappresentante lo zero (introdotto, quest'ultimo, proprio dai matematici indiani).

Egli aveva compreso le regole algebriche fondamentali con cui operare mediante numeri relativi, e rappresentava i negativi anteponendo loro un punto.

Bhaskara, un altro matematico indiano (circa 600 d. C.), iniziò a riflettere intorno a questioni più delicate sulla natura dei numeri relativi.

Egli osservò per primo che, dato un numero positivo, esistono due numeri, uno positivo e l'altro negativo, il cui quadrato uguagli il numero di partenza, ma che ciò non avviene invece se il numero assegnato è negativo: elevando, infatti, un numero al quadrato, non si può mai ottenere risultato negativo.

Egli dava inoltre come indicazione generale di scartare, in quanto prive di senso, eventuali soluzioni negative di problemi.



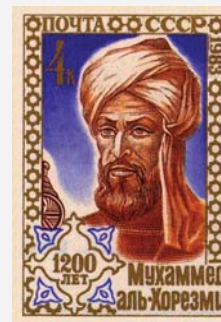
*Una tavoletta cuneiforme
con i primi esempi di problemi
di matematica
che facevano
incidentalmente uso
anche di numeri negativi*



*L'Arithmetica di Diofanto
in una traduzione latina
del 1621*

Questa diffidenza per i numeri relativi si tramandò, insieme al loro uso, ai matematici arabi, come Al-Khuwarizmi (circa 825 d. C.), che con i loro trattati fusero le conoscenze del mondo greco con quelle delle culture orientali, tramandandole ai matematici europei del medioevo.

Famoso fra questi fu Leonardo Pisano detto Fibonacci (circa 1170 - circa 1250) che con i suoi trattati introdusse la notazione numerica arabo-indiana in Occidente e con essa anche i numeri che indicavano debiti e crediti, facendone uso nei calcoli ma scartando ancora le soluzioni negative dei problemi.



In realtà i numeri negativi sembravano portare con sé un'aura sinistra di *non-numeri* o di numeri "strani", tanto che nei secoli XV-XVII venivano comunemente chiamati *numeri absurdi* dai matematici europei. Girolamo Cardano (1501-1576?) e Cartesio (1596-1650) usarono in modo rilevante i numeri relativi nei loro trattati rispettivamente sulle equazioni di terzo grado e sui fondamenti della geometria analitica, ma non ritenevano corrette e significative soluzioni negative di equazioni.

Il primo matematico moderno a concepire numeri relativi come soluzioni di equazioni fu l'italiano Rafael Bombelli (1526-1572) che mostrò come i numeri negativi potessero avere un significato anche nella vita di ogni giorno se si dà loro la giusta interpretazione. Con un semplice esempio ("se io fossi con 15 scudi e fossi in debito di 20 una volta che avessi dato i 15 resterei con un debito di 5 cioè di *meno* 5 scudi") illustrò in modo semplice quel che intendeva per interpretazione corretta.

Egli introdusse una notazione che si mantenne e si diffuse, utilizzando per indicare i numeri negativi la lettera corsiva *m* che abbreviava la parola *minus*, atta ad esprimere la loro origine come quantità legate ad una perdita o a un debito. Questa lettera corsiva col tempo si tramutò nel semplice trattino che adottiamo ai giorni nostri, e che è finito col combaciare con il segno dell'operazione di sottrazione.



L'immagine del frontespizio del libro di Bombelli (a sinistra) ...

... e (a destra) quella di una pagina dove per la prima volta egli dà un'interpretazione interessante delle soluzioni negative dei problemi e dove introduce le notazioni *p* ed *m* per indicare i numeri in credito e debito.

Del sommare più, e meno.

Più con più si aggiunge insieme, e fa più. Meno con meno si aggiunge insieme, e fa meno. Più con meno si caua la minor quantità dalla maggiore, e quello che resta, è della natura della maggiore (come. Se si sommarà più 10 con più 6,) fa più 16, & è, come à dire; lo mi trono 10 scudi in vna mano, e 6 nell'altra, che insieme faranno 16 meno 10, con m. 20 fa meno 30, & è (come se io mi trouassi debitore di vno scudi 20, e di vn'altro 10.) Io hauerei in tutto debito scudi 30, & à sommar più 16, con m. 8, è come, se io haueffi scudi 16, e ne haueffi debito 8, che pagato il debito mi restarebbono scudi 8, E p. 15 con m. 20 fa m. 5. perche se io mi trouassi scudi 15, e ne fossi debitore 20, pagati li 15 restarei debitore 5, e si sono posti questi essemplj tanto facili per chiarezza di vn principiante, e questo basta quanto al sommare.

Altri matematici iniziarono a comprendere quante possibili applicazioni ed interpretazioni potevano avere i numeri relativi all'interno della Matematica e della nascente Fisica.

Possiamo ricordare Simon Stevin (1548-1620) che accettò come soluzioni di equazioni i numeri negativi e iniziò ad impiegarli in Fisica. Insieme a Bombelli immaginò anche che i numeri relativi avessero una loro interpretazione come lunghezze rappresentabili su una retta con un'origine, e che questo modo di vederli potesse aiutare i matematici a comprendere meglio il loro significato.

Contraddizioni e dispute sulla loro definizione rigorosa, sul loro uso e sul loro ruolo e legame con gli altri insiemi numerici, si risolveranno solo nell'Ottocento e agli inizi del Novecento.

Gradualmente sempre più i numeri relativi svelarono le loro potenzialità, ed entrarono a far parte della Matematica a pieno diritto grazie ai trattati di Eulero (1707-1783) e Gauss (1777-1855).

Fu persino rimessa in discussione la questione di Baskhara sull'esistenza di numeri con quadrato negativo ... ma questa è un'altra (affascinante) storia!