

SISTEMI (SECONDA PARTE)

1. SISTEMI IMPOSSIBILI E INDETERMINATI

Osserva bene il seguente sistema:
$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 6x + 3y = 14 \end{cases}$$

Che ne dici? Non ti sembra che abbia qualcosa di “strano”? ...

Se rifletti attentamente, scoprirai che le due equazioni che lo compongono sono **incompatibili**, sono in contraddizione l'una con l'altra, e non possono quindi essere verificate “contemporaneamente” (= da una stessa coppia x, y). Infatti, $6x + 3y$ è il triplo di $2x + y$, mentre 14 NON è il triplo di 10.

Se una data coppia (x, y) è tale che per essa risulti $2x + y = 10$, allora per la stessa coppia (x, y) varrà l'uguaglianza $6x + 3y = 3(2x + y) = 3 \cdot 10 = 30$ e quindi NON potrà valere la $6x + 3y = 14$.

Insomma, se una data coppia (x, y) verifica la prima equazione del sistema, allora non potrà mai verificare la seconda.

Non esiste dunque nessuna coppia (x, y) che soddisfi simultaneamente sia l'una che l'altra equazione del sistema.

Quest'ultimo è IMPOSSIBILE (= privo di soluzioni).

L'impossibilità del sistema in esame è legata al fatto che, mentre i coefficienti di x e di y nella seconda equazione sono ciascuno il triplo del coefficiente corrispondente nella prima equazione (6 è il triplo di 2, e 3 è il triplo di 1), invece il termine noto 14 NON è il triplo di 10.

Generalizzando, si riconosce facilmente che un sistema della forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

risulta **IMPOSSIBILE** (= privo di soluzioni) ogniqualvolta accade che

$$(1) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

cioè i coefficienti delle incognite sono proporzionali fra loro, ma non coi termini noti del sistema.

Invece si può vedere che il sistema seguente:
$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 6x + 3y = 30 \end{cases}$$

è INDETERMINATO, vale a dire: è verificato da INFINITE coppie (x, y) . Infatti, la 2ª equazione non è altro che la 1ª moltiplicata per 3, quindi è sostanzialmente una ripetizione della 1ª. Ma allora è come se avessimo soltanto l'equazione $2x + y = 10$, e **una sola equazione (salvo casi eccezionali) non è sufficiente a determinare in modo unico i valori di due incognite.**

La “nostra” equazione $2x + y = 10$ è verificata, ad esempio, dalla coppia $x = 3, y = 4$;

ma è verificata pure dalle coppie $x = -1, y = 12$; $x = 1/2, y = 9$; $x = 8, y = -6$; ecc. ecc. ecc.

Noi possiamo divertirci a costruire tante coppie (x, y) , soluzioni della $2x + y = 10$, quante ne desideriamo.

A tale scopo ci basterà riscrivere la $2x + y = 10$ sotto la forma $y = 10 - 2x$:

comprenderemo così che la $2x + y = 10$ è verificata da tutte le coppie costruibili

assegnando a x un valore a piacere, poi calcolando y mediante la formula $y = 10 - 2x$.

Ad esempio, ponendo $x = 2$, si ottiene $y = 10 - 2x = 10 - 4 = 6$:

ecco che la coppia $(2, 6)$ è soluzione della nostra equazione.

Ponendo invece $x = -1$, otteniamo $y = 10 - 2x = 10 + 2 = 12$:

bene, la coppia $(-1, 12)$ è un'altra soluzione della nostra equazione.

Il sistema proposto
$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 6x + 3y = 30 \end{cases}$$
,

che equivale alla sola equazione $2x + y = 10$

(perché l'altra, come già osservato, è una “ripetizione” di questa)

ha dunque infinite soluzioni, riassumibili con la scrittura
$$\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = 10 - 2x \end{cases}$$
.

Notiamo bene che **le soluzioni sono infinite, ma non qualsiasi:**

infatti, per scrivere una coppia-soluzione, è vero che noi possiamo fissare x a nostro piacere, ma poi non potremo abbinare al valore di x scelto un valore di y arbitrario,

bensì dovremo calcolare y proprio mediante la formula specifica $y = 10 - 2x$.

Generalizzando quanto detto, comprendiamo che un sistema della forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

è certamente **INDETERMINATO** (= dotato di infinite soluzioni) nel caso si abbia

(2) $\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$ (coefficienti delle incognite proporzionali fra loro E coi termini noti).

Attenzione però: le condizioni (1), (2)

non sono le uniche circostanze sotto le quali un sistema può risultare impossibile o indeterminato.

Consideriamo infatti ad esempio il caso seguente:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + y = 4 \\ 0 \cdot x + 2y = 8 \end{cases}$$

E' evidente che il sistema in esame è indeterminato:

si osserva che è verificato da tutte le infinite coppie (x, y) con x qualsiasi, $y = 4$, tuttavia i suoi coefficienti NON soddisfano alla condizione (2): infatti lo zero a denominatore non ha significato.

Ancora: se prendiamo il sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 3(x - 2y) + 2(x + y + 2) = 5x - 4(y - 3) \end{cases}$$

e svolgiamo i calcoli nella seconda equazione, troveremo $\cancel{3x} - \cancel{6y} + \cancel{2x} + 2y + 4 = \cancel{5x} - \cancel{4y} + 12$ e vedremo così che tale equazione è IMPOSSIBILE, cioè non è verificata da nessuna coppia (x, y) . Pertanto non può esistere, a maggior ragione, nessuna coppia (x, y) che verifichi sia l'una che l'altra equazione del sistema proposto: questo è dunque IMPOSSIBILE.

Se invece avessimo una situazione come la seguente:

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2(x + y + 1) = 3x - (x - 2y - 2) \end{cases}$$

ci troveremmo di fronte ad una seconda equazione indeterminata, ossia verificata da *qualsiasi* coppia (x, y) .

Ma un'equazione indeterminata è come se non ci fosse, perché non pone alcun vincolo ad x e y . Rimane solo la prima equazione, e, come abbiamo già visto, una sola equazione in due incognite non individua queste in modo univoco, ma lascia aperte infinite possibilità.

Il nostro sistema è verificato dalle infinite coppie (x, y) con $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = \frac{x-4}{3} \end{cases}$ ed è perciò INDETERMINATO.

Senza pretendere affatto di esaurire l'argomento

(la teoria dei sistemi "lineari" ossia di 1° grado, che è coronata dal grande Teorema di Rouché-Capelli di cui ci occuperemo in un capitolo del Volume 2, non è semplicissima), ci limitiamo qui solo a un paio di indicazioni generali:

- ❑ Un sistema di 1° grado a n equazioni ed n incognite è "determinato", cioè ha regolarmente una e una sola soluzione (NOTA), se e solo se il determinante (pag. 201) dei coefficienti delle incognite, quello che nella regola di Cramer (pag. 202) è indicato con D , è diverso da zero. Quando invece tale determinante è uguale a zero, allora si ha un caso "speciale", che potrà essere di impossibilità o di indeterminazione (bisognerà valutare di volta in volta).

NOTA: l'aggettivo "determinato/a", riferito a un sistema o a una singola equazione, significa: "dotato/a di un numero finito e non nullo di soluzioni".

Quando il sistema, o l'equazione, è di 1° grado, nel caso ciò avvenga la soluzione è *unica*.

- ❑ Per scoprire se un sistema di 1° grado a n equazioni ed n incognite è determinato, indeterminato o impossibile si può dunque calcolarne il determinante D . Oppure, in alternativa, si può procedere, coi metodi di sostituzione o di riduzione, fino a giungere ad una equazione in una sola incognita: si tratta poi di risolvere questa e di trarre le conclusioni opportune.

Gli ESERCIZI su questo paragrafo si trovano a pag. 410.

2. SISTEMI DI 1° GRADO IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZIONI DIFFERISCE DAL NUMERO DELLE INCOGNITE

A) PIU' EQUAZIONI CHE INCOGNITE

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

nel quale le incognite sono 2, ma le equazioni sono 3 (quindi: una in più, rispetto alle incognite).

Se ci limitiamo a considerare solamente le prime due equazioni, queste formeranno un “sotto-sistema” del sistema dato:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

Risolvendo ora, con un metodo qualsiasi, tale sotto-sistema, si trova che esso ammette come unica soluzione la coppia

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Questa coppia $x = 4, y = 1$ è dunque la sola che verifichi contemporaneamente tanto la 1^a quanto la 2^a equazione del sistema iniziale.

Tuttavia, possiamo constatare che tale coppia NON rende verificata la 3^a equazione del sistema, ossia la $3x - 2y = 7$.

E allora, in definitiva, siamo costretti a concludere che non esiste alcuna coppia (x, y) che “vada bene” per tutte e tre le equazioni del sistema assegnato.

Questo è perciò IMPOSSIBILE (si dice anche: “INCOMPATIBILE”).

Se l'ultima equazione, anziché essere $3x - 2y = 7$, fosse stata, poniamo, $3x - 2y = 10$, allora la coppia $x = 4, y = 1$ avrebbe verificato, oltre alle prime due equazioni, anche l'ultima, quindi il sistema sarebbe stato possibile (si dice preferibilmente: “COMPATIBILE”), con soluzione, appunto, data da:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

L'esempio fatto mostra che, IN GENERALE,

da un sistema in cui ci siano più equazioni che incognite dobbiamo *aspettarci* impossibilità.

Infatti, se da un sistema siffatto andiamo ad “estrarre” un “sotto-sistema” nel quale le equazioni siano tante quante le incognite, tale “sotto-sistema”

avrà, generalmente, una e una sola soluzione;

però tale soluzione, per essere soluzione pure del sistema “complessivo”,

dovrebbe a questo punto verificare anche tutte le equazioni rimanenti,

e questo, evidentemente, avviene solo in via eccezionale:

di norma, non avviene.

Insomma:

Se il numero delle equazioni è maggiore del numero delle incognite, queste ultime hanno troppi vincoli da rispettare e, IN LINEA DI MASSIMA, “non ce la faranno” a soddisfarli tutti. Salvo casi eccezionali, il sistema sarà impossibile.

NOTA

Questo discorso, fatto pensando ai sistemi “lineari” (= di 1° grado), si estende comunque, sempre come indicazione di carattere generale, ai sistemi di equazioni di qualsiasi tipologia

♥ Nel volume 2 studieremo il bel Teorema di Rouché-Capelli, che darà ordine e rigore a ciò che in queste pagine presentiamo come indicazioni “valide in linea di massima”.

B) PIU' INCOGNITE CHE EQUAZIONI

E se invece avessimo più incognite che equazioni?

Consideriamo l'esempio seguente:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 20 \\ x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

Isoliamo y dalla seconda equazione, e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} y = 6 - x + 2z \\ 3x + 2(6 - x + 2z) - z = 20; \quad 3x + 12 - 2x + 4z - z = 20; \quad x + 3z = 8 \end{cases}$$

Ora isoliamo x dall'ultima equazione ottenuta, e sostituiamo nell'altra:

$$\begin{cases} x = 8 - 3z \\ y = 6 - (8 - 3z) + 2z; \quad y = 6 - 8 + 3z + 2z; \quad y = 5z - 2 \end{cases}$$

Pertanto sono soluzioni del nostro sistema tutte e sole le terne (x, y, z) costruibili assegnando a z un valore ad arbitrio, poi calcolando i valori di x e di y mediante le uguaglianze $x = 8 - 3z$; $y = 5z - 2$.

Ad es., scegliendo per z il valore 1, avremo $x = 8 - 3 = 5$, $y = 5 - 2 = 3$.

Bene, la terna $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$ è soluzione del nostro sistema.

Ponendo invece $z = 0$, avremo $x = 8$, $y = -2$

e la terna $(8, -2, 0)$ è un'altra soluzione del sistema in esame.

Possiamo indicare le infinite soluzioni del sistema dato con la scrittura

$$\begin{cases} x = 8 - 3z \\ y = 5z - 2 \\ z \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

E quindi il sistema proposto, per il fatto di avere infinite soluzioni, è **INDETERMINATO**.

Vediamo quest'altro esempio:

$$\begin{cases} x + y + u + v + z = 1 \\ 5x + 4y - 3u + 2v + z = 2 \\ x - u - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = u + z \\ (u + z) + y + u + v + z = 1 \\ 5(u + z) + 4y - 3u + 2v + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = u + z \\ y + 2u + v + 2z = 1 \\ 4y + 2u + 2v + 6z = 2; \quad 2y + u + v + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = u + z \\ y = 1 - 2u - v - 2z \\ 2(1 - 2u - v - 2z) + u + v + 3z = 1; \quad -3u - v - z = -1; \quad 3u + v + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = u + z \\ y = 1 - 2u - v - 2z \\ v = 1 - 3u - z \end{cases} \quad \begin{cases} x = u + z \\ y = 1 - 2u - (1 - 3u - z) - 2z \\ v = 1 - 3u - z \end{cases} \quad \begin{cases} x = u + z \\ y = u - z \\ v = 1 - 3u - z \end{cases}$$

Le soluzioni sono perciò tutte e sole le cinquine (x, y, u, v, z) nelle quali:

$$\begin{cases} x = u + z \\ y = u - z \\ u \text{ qualsiasi} \\ v = 1 - 3u - z \\ z \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

Nel sistema dato, che aveva 3 equazioni e 5 incognite, abbiamo espresso 3 delle incognite in funzione delle 2 incognite rimanenti.

Generalizzando:

Quando un sistema ha più incognite che equazioni (diciamo, per fissare le idee: n incognite e k equazioni, con $n > k$), allora esso sarà (IN LINEA DI MASSIMA) “indeterminato con $n - k$ gradi di libertà”, nel senso che k fra le incognite potranno essere espresse in funzione delle $n - k$ incognite rimanenti (alle quali si potranno assegnare valori arbitrari).

NOTA - Questo discorso, fatto pensando ai sistemi “lineari” (= di 1° grado), si estende comunque, sempre come indicazione di carattere generale, ai sistemi di equazioni di qualsiasi tipologia

Nel volume 2 studieremo il bel Teorema di Rouché-Capelli, che darà ordine e rigore a ciò che in queste pagine abbiamo presentato come indicazioni “valide in linea di massima”.

3. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UN SISTEMA LINEARE IN DUE INCOGNITE

La si può effettuare isolando la y in entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

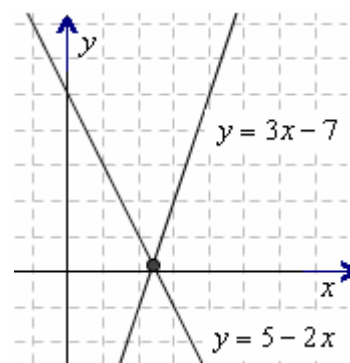
$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ y = 3x - 7 \end{cases}$$

Poi si tracciano, in uno stesso riferimento cartesiano, i grafici delle due funzioni così ottenute:

$$y = 5 - 2x, \quad y = 3x - 7$$

(nel nostro esempio, poiché le funzioni sono di 1° grado, si tratterà di due rette)

... per cercare infine la coppia (x, y) che appartiene ad **entrambi** i grafici.



In pratica, dunque, si va a prendere il **PUNTO DI INTERSEZIONE** fra i due grafici tracciati.

La x e la y di quel punto costituiranno la coppia $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ soluzione del sistema.

Nel nostro caso, graficamente non siamo in grado di stabilire quale sia il valore *esatto* di questa coppia (x, y) ; possiamo solo osservare che è $2 < x < 3$ e $0 < y < 1$ (con y molto più vicina a 0 che a 1).

In effetti, **di norma, queste risoluzioni grafiche ci permettono di approssimare la soluzione, piuttosto che di determinarla perfettamente.**

♥ L'interpretazione grafica può essere un'utile occasione per ribadire che (salvo rare eccezioni) una singola equazione in due incognite è verificata da INFINITE coppie (x, y) .

Consideriamo, ad esempio, la retta "in discesa", che "rappresenta" l'equazione $2x + y = 5$ ($y = 5 - 2x$).

Se nell'equazione $y = 5 - 2x$ noi poniamo, ad esempio, $x = 1$, otteniamo $y = 5 - 2 \cdot 1 = 3$;

bene, ciò significa che la coppia $x = 1, y = 3$ (brevemente: la coppia $(1, 3)$) è soluzione dell'equazione $y = 5 - 2x$ quindi anche della sua equivalente $2x + y = 5$ (controlliamo: $2 \cdot 1 + 3 = 5$ OK).

Dando poi a x altri valori possiamo determinare *altre* coppie (x, y) che rendono vera l'equazione $y = 5 - 2x$:

$$(0, 5); (2, 1); (3, -1); (10, -15); (-1, 7); \left(\frac{1}{2}, 4\right); (3, 7; -2, 4); \dots$$

Tali infinite coppie (x, y) sono per l'appunto le coordinate degli infiniti punti che compongono la retta in discesa; mentre le coordinate (x, y) degli infiniti punti della retta in salita sono quelle coppie (x, y) che "vanno bene" per l'equazione $y = 3x - 7$ (o per la sua equivalente $3x - y = 7$).

Le coordinate del punto in cui le due rette si intersecano sono dunque quei valori $x = \dots, y = \dots$ per i quali sono verificate **SIMULTANEAMENTE ENTRAMBE** le equazioni in gioco.

❑ E se le due rette fossero parallele? Vorrebbe dire che quel sistema è **IMPOSSIBILE** (1).

❑ Se poi quelle due rette coincidessero, saremmo di fronte a un sistema **INDETERMINATO**, avente per soluzioni tutte le infinite coppie (x, y) che verificano una a piacere fra le equazioni in gioco (2).

(1) Il sistema

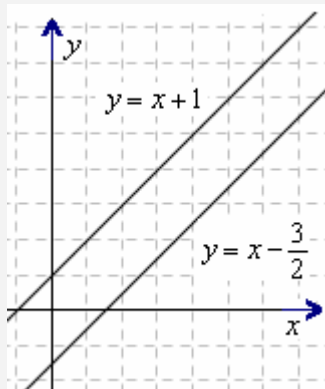
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

ed è

IMPOSSIBILE
(rette parallele).



Osserviamo che è verificata la *condizione sufficiente di impossibilità*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}: \text{ è infatti } \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{3}$$

(2) Il sistema

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2y = 2x + 2 \quad (y = x + 1) \end{cases}$$

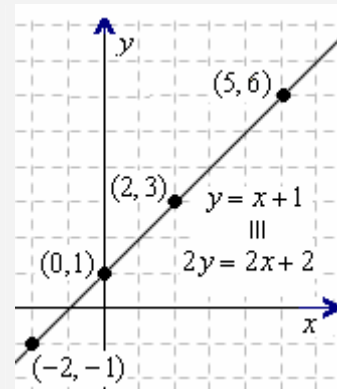
ed è **INDETERMINATO**
(rette coincidenti).

Qui è verificata la *condizione sufficiente di indeterminazione*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Le soluzioni del sistema sono tutte le coppie (x, y) che corrispondono ai punti di una qualsiasi delle due rette:

$$(-2, -1); (0, 1); (2, 3); (5, 6); (2, 45; 3, 45); \dots$$

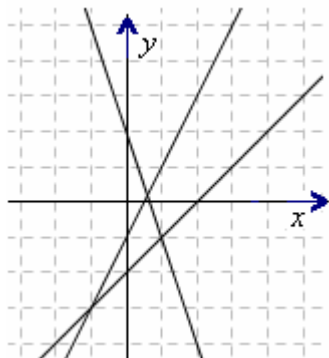


Supponiamo ora che il sistema abbia 2 incognite, ma 3 equazioni: ad esempio

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 2 - 3x \\ y = x - 2 \\ y = 2x - 1 \end{array} \right.$$

Già abbiamo visto che, **di norma, sistemi di questo tipo sono impossibili;**
ma che potrebbero però, eccezionalmente, avere soluzione o addirittura risultare indeterminati.

In effetti, qui le rette in gioco sono 3:

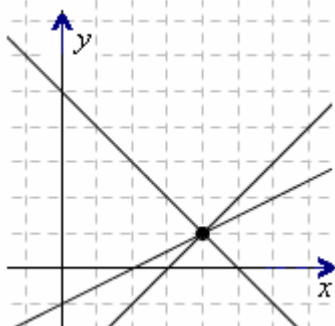


nel nostro caso, le tre rette NON passano tutte per uno stesso punto, situazione che è poi la più “ordinaria” per 3 rette su un piano, quindi non esiste una coppia (x, y) che soddisfi simultaneamente tutte e tre le equazioni considerate.

Invece il sistema che segue:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 5 - x \\ y = x - 3 \\ y = \frac{x-2}{2} = \frac{1}{2}x - 1 \end{array} \right.$$

è, eccezionalmente, determinato, in quanto le tre rette passano tutte per uno stesso punto, le cui coordinate $x = 4$, $y = 1$ costituiscono la soluzione del sistema.



ESERCIZI

Risolvi, sia graficamente che algebricamente, i sistemi che seguono:

- 1) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ 5x - y = 1/5 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ x - 2y + 5 = 0 \\ 2x + 0,5y = 3,5 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 0,25x + 0,25y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 0,125x - 0,125y = 0,25 \\ 0,5x = 1 + 0,5y \\ y + 2 = x \end{cases}$

RISPOSTE

- 1) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ 2) indet.: $\begin{cases} x = x \\ y = 4 - 3x \end{cases}$ 3) imposs. 4) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1/2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1/5 \end{cases}$ 6) imposs.
- 7) imposs. 8) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ 10) imposs. 11) indet.: $\begin{cases} x = x \\ y = x - 2 \end{cases}$

4. SISTEMI LETTERALI

Esempio:

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Per **SOSTITUZIONE**:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} ax = a^2 + b^2 + by; & x = \frac{a^2 + b^2 + by}{a} & (a \neq 0) & \text{NOTA 1} \\ b \cdot \frac{a^2 + b^2 + by}{a} + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \frac{a^2 + b^2 + by}{a} \\ \frac{a^2b + b^3 + b^2y + a^2y}{\cancel{a}} = \frac{a^3 + ab^2}{\cancel{a}} \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \frac{a^2 + b^2 + by}{a} \\ b^2y + a^2y = a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \end{cases} \\ &\begin{cases} " \\ (a^2 + b^2)y = a(a^2 + b^2) - b(a^2 + b^2) \end{cases} \\ &\begin{cases} " \\ (a^2 + b^2)y = (a^2 + b^2)(a - b); & y = a - b & \text{(NOTA 2)} \end{cases} \\ &\begin{cases} y = a - b \\ x = \frac{a^2 + b^2 + b(a - b)}{a} = \frac{a^2 + \cancel{b^2} + ab - \cancel{b^2}}{a} = \frac{\cancel{a}(a + b)}{\cancel{a}} = a + b \end{cases} \\ &\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases} \end{aligned}$$

NOTA 1

Questo passaggio, finalizzato a isolare x , è effettuabile solo nel caso $a \neq 0$; il caso particolare $a = 0$ andrà valutato a parte (lo riprenderemo alla fine dell'esercizio)

NOTA 2

La semplificazione dell'equazione è effettuabile solo nel caso $a^2 + b^2 \neq 0$; d'altra parte, potrebbe risultare $a^2 + b^2 = 0$ soltanto se fosse $a = b = 0$, e noi in questo momento ci siamo posti nel caso $a \neq 0$, quindi la quantità $a^2 + b^2$ per la quale abbiamo semplificato è certamente diversa da 0. Non è pertanto necessario porre alcuna condizione per la semplificazione.

Per **RIDUZIONE**:

$$\begin{aligned} &a \cdot \begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0: \text{vedi NOTA 3}) \\ &b \cdot \begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \\ &\begin{cases} a^2x - aby = a^3 + ab^2 \\ b^2x + aby = a^2b + b^3 \end{cases} \\ &(1) + (2) \begin{cases} a^2x + b^2x = a^3 + ab^2 + a^2b + b^3; & (\cancel{a^2 + b^2})x = (\cancel{a^2 + b^2})(a + b) \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = a + b \\ b(a + b) + ay = a^2 + b^2; & ab + \cancel{b^2} + ay = a^2 + \cancel{b^2}; & \cancel{a}y = a^2 - \cancel{a}b \end{cases} \\ &\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases} \end{aligned}$$

NOTA 3

Con l'obiettivo di mandar via la y , moltiplichiamo la prima equazione per a e la seconda per b . A tale scopo, dobbiamo supporre $a \neq 0$ e $b \neq 0$, quindi in coda all'esercizio dovremo andare a valutare cosa succede nei due casi particolari $(a = 0, b = 0)$ che stiamo provvisoriamente lasciando da parte.

Con **CRAMER**:

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & -b \\ a^2 + b^2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a(a^2 + b^2) + b(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{\cancel{(a^2 + b^2)}(a + b)}{\cancel{a^2 + b^2}} = a + b \quad (a^2 + b^2 \neq 0) \quad \text{NOTA 4}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & a^2 + b^2 \\ b & a^2 + b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a(a^2 + b^2) - b(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{\cancel{(a^2 + b^2)}(a - b)}{\cancel{a^2 + b^2}} = a - b \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

NOTA 4

L'applicazione nel metodo di Cramer comporta l'introduzione di denominatori, quindi vale a condizione che i denominatori stessi siano diversi da 0.

Il caso opposto $a^2 + b^2 = 0$ (che si verifica esclusivamente con $a = b = 0$) andrà valutato a parte.

LA DISCUSSIONE DEL SISTEMA

Come abbiamo visto, **la risoluzione, con qualunque metodo venga effettuata, può comportare l'individuazione di casi particolari, che vengono "provvisoriamente messi da parte", per valutarli poi alla fine.**

Ad esempio,

- risolvendo con SOSTITUZIONE, abbiamo "accantonato" il caso $a = 0$;
- con RIDUZIONE, abbiamo lasciato da parte i casi $a = 0$ e $b = 0$;
- col metodo di CRAMER, abbiamo accantonato il caso $a^2 + b^2 = 0$ ($a = b = 0$)

♥ **Questi casi particolari vanno ripresi in coda all'esercizio, per capire "cosa diventa" il sistema in ciascun caso, e per stabilire se si tratta, eventualmente, di un caso di impossibilità o di indeterminazione per il sistema.**

- Ad esempio, se abbiamo risolto con SOSTITUZIONE, il caso accantonato è $a = 0$.

Bene! Con $a = 0$ il sistema $\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$ diventa

$$\begin{cases} -by = b^2 \\ bx = b^2 \end{cases} \text{ e ora possiamo dire che:}$$

- se $b \neq 0$ è lecito semplificare entrambe le equazioni ottenendo $\begin{cases} x = b \\ y = -b \end{cases}$
- se invece è anche $b = 0$ il sistema è **COMPLETAMENTE INDETERMINATO** (qualsiasi coppia (x, y) ne è soluzione).

Osserviamo che, con $a = 0$ e $b \neq 0$, la soluzione ottenuta $\begin{cases} x = b \\ y = -b \end{cases}$ non è altro che

$$\text{la "normalissima" soluzione } \begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases},$$

nel caso particolare $a = 0$!!!

E allora l'unico caso "anomalo" per questo sistema è in definitiva il caso $a = b = 0$, nel quale il nostro sistema risulta, come abbiamo visto, completamente indeterminato.

- Analogamente, se si è risolto con RIDUZIONE, occorre riprendere i due casi accantonati ecc. Stessa cosa se la risoluzione è stata effettuata con CRAMER: va ripreso il caso accantonato. E' ovvio che la conclusione della discussione dovrà essere sempre la medesima, comunque si proceda.

Ecco qui di seguito **un altro esempio**.

Si tratta di un sistema che si presta molto bene ad essere risolto per RIDUZIONE.

$$\begin{cases} (a^2 + 9)(x + y - 1) = 6a(x - y) \\ (a - 3)(x - y - 1) = 6y \end{cases}$$

Portiamo innanzitutto in “forma normale”:

$$\begin{cases} (a^2 + 9)(x + y - 1) = 6a(x - y) \\ (a - 3)(x - y - 1) = 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2x + a^2y - a^2 + 9x + 9y - 9 = 6ax - 6ay \\ ax - ay - a - 3x + 3y + 3 = 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2x - 6ax + 9x + a^2y + 6ay + 9y = a^2 + 9 \\ ax - 3x - ay - 3y = a - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2 - 6a + 9)x + (a^2 + 6a + 9)y = a^2 + 9 \\ (a - 3)x - (a + 3)y = a - 3 \end{cases}$$

$\begin{cases} (a - 3)^2 x + (a + 3)^2 y = a^2 + 9 \\ (a - 3)x - (a + 3)y = a - 3 \end{cases}$	FORMA NORMALE
--	---------------

Risolviamo per **RIDUZIONE**, moltiplicando la seconda equazione per $(a + 3)$

Con $a \neq -3$ (NOTA): $(a + 3) \cdot \begin{cases} (a - 3)^2 x + (a + 3)^2 y = a^2 + 9 \\ (a - 3)x - (a + 3)y = a - 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} (a - 3)^2 x + (a + 3)^2 y = a^2 + 9 \\ (a^2 - 9)x - (a + 3)^2 y = a^2 - 9 \end{cases}$$

NOTA

La moltiplicazione per $(a + 3)$ è effettuabile soltanto supponendo $a \neq -3$, altrimenti l'equazione verrebbe moltiplicata per 0 e quindi “distrutta”. Il caso particolare $a = -3$ andrà valutato separatamente.

$$\begin{aligned} (1) + (2) & \begin{cases} (a - 3)^2 x + (a^2 - 9)x = a^2 \cancel{+ 9} + a^2 \cancel{- 9} \\ (a - 3)x - (a + 3)y = a - 3 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} a^2x - 6ax \cancel{+ 9x} + a^2x \cancel{- 9x} = 2a^2 \\ (a - 3)x - (a + 3)y = a - 3 \end{cases} \\ & \begin{cases} 2a^2x - 6ax = 2a^2; \quad a^2x - 3ax = a^2; \quad ax - 3x = a \quad (a \neq 0); \\ (a - 3)x - (a + 3)y = a - 3 \end{cases} \\ & \begin{cases} (a - 3)x = a; \quad x = \frac{a}{a - 3} \quad (a \neq 3); \\ \cancel{(a - 3)} \cdot \frac{a}{\cancel{a - 3}} - (a + 3)y = a - 3 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = \frac{a}{a - 3} \\ \cancel{a} - (a + 3)y = \cancel{a} - 3; \quad (a + 3)y = 3; \quad y = \frac{3}{a + 3} \quad (a \neq -3) \end{cases} \end{aligned}$$

Cerchiamo ora di capire (DISCUSSIONE)

cosa accade nei casi particolari, che abbiamo provvisoriamente lasciato da parte.

DISCUSSIONE

Il sistema in forma normale era

$$\begin{cases} (a-3)^2 x + (a+3)^2 y = a^2 + 9 \\ (a-3)x - (a+3)y = a-3 \end{cases}$$

Vediamo cosa diventa, rispettivamente, nei tre casi: $a = -3$; $a = 3$; $a = 0$

- Con $a = -3$ il sistema diventa

$$\begin{cases} (-3-3)^2 x + (-3+3)^2 y = (-3)^2 + 9 \\ (-3-3)x - (-3+3)y = -3-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x = 18; & x = 1/2 \\ -6x = -6; & x = 1 \end{cases}$$

Le due equazioni sono, evidentemente, incompatibili; il sistema, con $a = -3$, è IMPOSSIBILE.

- Con $a = 3$ il sistema diventa

$$\begin{cases} (3-3)^2 x + (3+3)^2 y = 3^2 + 9 \\ (3-3)x - (3+3)y = 3-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36y = 18; & y = 1/2 \\ -6y = 0; & y = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni sono, evidentemente, incompatibili; il sistema, con $a = 3$, è IMPOSSIBILE.

- Con $a = 0$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} 9x + 9y = 9; & x + y = 1 \\ -3x - 3y = -3; & x + y = 1 \end{cases}$$

Le due equazioni coincidono; il sistema, con $a = 0$, è INDETERMINATO

e ha come soluzioni le infinite coppie: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = 1 - x \end{cases}$

Risolvendo per **SOSTITUZIONE** avremmo avuto passaggi più pesanti:

$$\begin{cases} (a-3)x = (a+3)y + a-3; & x = \frac{(a+3)y + a-3}{a-3} \quad (a \neq 3) \\ (a-3)^2 \cdot \frac{(a+3)y + a-3}{a-3} + (a+3)^2 y = a^2 + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{(a+3)y + a-3}{a-3} \\ (a-3)((a+3)y + a-3) + (a+3)^2 y = a^2 + 9 \end{cases}; \quad \begin{cases} " \\ a^2 y - 9y + a^2 - 6a + 9 + a^2 y + 6ay + 9y = a^2 + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} " \\ 2a^2 y + 6ay = 6a; & a^2 y + 3ay = 3a; & ay + 3y = 3 \quad (a \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{(a+3)y + a-3}{a-3} \\ (a+3)y = 3; & y = \frac{3}{a+3} \quad (a \neq -3) \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\cancel{a+3} \cdot \frac{3}{\cancel{a+3}} + a-3}{a-3} = \frac{\cancel{3} + a - \cancel{3}}{a-3} = \frac{a}{a-3} \\ y = \frac{3}{a+3} \end{cases}$$

... e a questo punto avremmo dovuto, come prima, procedere con la valutazione dei casi particolari trovati, e provvisoriamente accantonati ($a = -3$, $a = 3$, $a = 0$).

5. ESERCIZI

ESERCIZI SUI SISTEMI DI 1° GRADO IMPOSSIBILI E INDETERMINATI

Per ciascuno dei seguenti sistemi, stabilisci se è determinato, impossibile, o indeterminato.

In caso di indeterminazione, stabilisci anche quali sono le soluzioni. ⇒ Correzione

- 1) $\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+2y=46 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y=21 \\ x+y=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x-8y=12 \\ 10x-20y=30 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x+y)=y+2x+3 \\ x-3y=y-(12-x) \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{5}y=1 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{20}y=\frac{1}{4} \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x+y=2-(x-y) \\ x-y=6-(x+y) \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x+3y=3(y-x) \\ 2x-y=-(y-x) \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x+2y+3z=5 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$
- 13) $\begin{cases} x+6y=8 \\ 2y=1 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2(2x+y)=3y-(y-4x) \\ x+y=9 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3(x+y+2)=3x+8+3y \\ 4x-y=2 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 2(x-y)-1=x+y-(3y-x+1) \\ 2(x+y)=x+3y+1-(y-x) \end{cases}$

Negli esercizi seguenti, è richiesto di determinare il valore del parametro in modo che il sistema non sia determinato, e di stabilire se, per quel valore, si ha impossibilità o indeterminazione.

- 17) $\begin{cases} 6x+ay=10 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} kx+(k-1)y=5 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} bx-y=-2 \\ (b-4)x+y=b \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 3x+my=6 \\ 2x+(m+3)y=4 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ hx+hz=5 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

ESERCIZI (SISTEMI IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZ. E' $\neq$ DA QUELLO DELLE INCOGNITE)

Per ciascuno dei seguenti sistemi, stabilisci se è determinato, impossibile, o indeterminato.

In caso di indeterminazione, stabilisci anche quali sono le soluzioni.

- 22) $\Rightarrow \begin{cases} 3x-y=12 \\ 2x+y=13 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} a-2b=3 \\ 7a+b=36 \\ 11a-6b=49 \end{cases}$ 24) $\Rightarrow \begin{cases} x+y+z+t+w=0 \\ x-y-z-t+w=2 \\ x+y-z-t-w=4 \end{cases}$ 25) $\begin{cases} a-b-2c=9 \\ 2a+b=0 \\ c=b-a \\ a+b+c+4=0 \end{cases}$
- 26) $\begin{cases} a=2b \\ c=3d \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} p+q=9 \\ 3p-2q=17 \\ 2p=7q \\ p-q=5 \\ 4p+3q=10 \\ 2p-5q=4 \end{cases}$ 29) $\Rightarrow \begin{cases} w-4x=0 \\ t-y=1 \\ w-t=1 \\ x+y+t+w=10 \\ x-2y+3w=9 \\ 3x+2t=9 \\ w-y=2 \end{cases}$ 30) Dato il sistema:
- $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ 4x+y+2z=3 \end{cases}$
- è richiesto di esprimere
- I) x e y in funzione di z
 II) y e z in funzione di x
 III) x e z in funzione di y

RISPOSTE

- 1) imp. 2) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=7-x \end{cases}$ opp. $\begin{cases} x=7-y \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 3) indet.: $\begin{cases} x=2y+3 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ opp. $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{x-3}{2} \end{cases}$ 4) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=3 \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} x=1/3 \\ y=-1/3 \end{cases}$ 6) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{15-10x}{3} \end{cases}$ 7) imp. 8) indet.: $\begin{cases} x=1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 9) indet.: $\begin{cases} x=0 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$
- 11) indet.: $\begin{cases} x=z-3 \\ y=7-3z \\ z \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 12) imp. 13) $\begin{cases} x=5 \\ y=1/2 \end{cases}$ 14) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=9-x \end{cases}$ 15) imposs. 16) imposs.
- 17) $a=-8$; ind. 18) $k=-2$; imp. 19) $b=2$; ind. 20) $m=-9$; ind. 21) ind. con $h=2$, imp. con $h \neq 2$
- 22) imposs. 23) $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$ 24) indet.: x qualsiasi, $y=2-x$, $z=x-t-3$, t qualsiasi, $w=1-x$ 25) $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$
- 26) indet.: $a=-\frac{8}{3}d$; $b=-\frac{4}{3}d$; $c=3d$; d qualsiasi oppure ... 27) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=7-x \\ z=1 \end{cases}$ oppure: $\begin{cases} x=7-y \\ y \text{ qualsiasi} \\ z=1 \end{cases}$
- 28) impossibile 29) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ t=3 \\ w=4 \end{cases}$ 30) I) $\begin{cases} x=\frac{3-z}{9} \\ y=\frac{15-14z}{9} \end{cases}$ II) $\begin{cases} y=14x-3 \\ z=3-9x \end{cases}$ III) $\begin{cases} x=\frac{y+3}{14} \\ z=\frac{15-9y}{14} \end{cases}$

ESERCIZI SUI SISTEMI LETTERALI

Clicca sulla freccia, se presente, per la correzione

- 1) $\Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5a \\ 2x + 3y = 12a \end{cases}$ 2) $\Rightarrow \begin{cases} x + y = 2a \\ x - y = 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 3k + 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = k \\ x + 2y = k + 1 \end{cases}$
- 5) $\Rightarrow \begin{cases} mx - y = m^2 \\ 2x + my = (m+1)^2 + 1 \end{cases}$ 6) $\Rightarrow \begin{cases} x + ay = 2a \\ x - y = a - 1 \end{cases}$ 7) $\Rightarrow \begin{cases} (2a-1)x - (a+1)y = 2(2a-1)(a-1) \\ (a-1)x + (a+1)y = a(5a-3) \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} 2(b+1)x - (b-1)^2 y = 0 \\ 4x + (b-1)y = 3b-1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} (m-1)x - my = 2m^2 \\ mx = 4y + [2m - (m-2)]^2 \end{cases}$ 10) $\Rightarrow \begin{cases} \frac{kx}{2} = 1 - \frac{x-y}{2} \\ (k-1)(x-3) + 2y = 0 \end{cases}$
- 11) $\begin{cases} (a+1)(x-y) = 2(1-ay) \\ (a^2+1)(x-y) = 2[1-a(x+y)] \end{cases}$ 12) $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{y+2} = \frac{1}{x-a} \\ x-y = \frac{2a}{a-1} \end{cases}$ 13) $\begin{cases} m\frac{y}{x} - \frac{1}{x} = m-1 \\ x+m(y-1) = m^2+1 \end{cases}$
- 14) $\begin{cases} ax + by = 2ab \\ ax - by = 0 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} (2a-1)x = 2y-1 \\ a\frac{x-2}{y} + 1 = 0 \end{cases}$ 16) $\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3a + 1 \\ x - y + z = a + 1 \\ x + 2z = 2(a+1) \end{cases}$ 17) $\begin{cases} mx + y + mz = m + 1 \\ y - x = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$
- 18) $\begin{cases} px + qy = 2 \\ x + y = \frac{p+q}{pq} \end{cases}$ 19) $\Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ x - y - z + t = 0 \\ x + 2y + z + 3t = 10 \\ ax + y + 4t = 2(a+3) \end{cases}$ 20) $\begin{cases} a^2x + a^2y + z = 3a \\ ax - ay + z = a \\ x - y + az = a^2 \end{cases}$

SOLUZIONI (ED EVENTUALE DISCUSSIONE)

- 1) $\begin{cases} x = 3a \\ y = 2a \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = a + 1 \\ y = a - 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = k + 1 \\ y = k - 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = k - 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = m + 1 \\ y = m \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x = a \\ y = 1 \end{cases}$ Se $a = -1$, il sistema è **INDETERMINATO**, con le soluzioni $\begin{cases} x = y - 2 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$
- 7) Se $a \neq \frac{2}{3} \wedge a \neq -1$, $\begin{cases} x = 3a - 1 \\ y = 2a - 1 \end{cases}$ Se $a = \frac{2}{3}$, il sistema è **INDET.**, con le soluzioni $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = \frac{3x+2}{15} \end{cases}$
 Se $a = -1$, il sistema è **INDET.**, con le soluzioni $\begin{cases} x = -4 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$
- 8) Se $b \neq 1 \wedge b \neq \frac{1}{3}$, $\begin{cases} x = \frac{b-1}{2} \\ y = \frac{b+1}{b-1} \end{cases}$ Se $b = 1$, il sistema è **IMPOSSIBILE**;
 se $b = 1/3$, il sistema è **INDETERMINATO**,
 e in questo caso le sue soluz. sono le infinite coppie: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = 6x \end{cases}$
- 9) Se $m \neq 2$, $\begin{cases} x = m \\ y = -(m+1) \end{cases}$ Se $m = 2$, il sistema è **INDETERMINATO**, con le soluzioni $\begin{cases} x = 2y + 8 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$
- 10) Se $k \neq -\frac{1}{3}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = k - 1 \end{cases}$ Se $k = -\frac{1}{3}$, il sistema è **INDETERMINATO**, con le soluzioni $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$
- 11) Se $a \neq \pm 1 \wedge a \neq 0$, $\begin{cases} x = \frac{1}{a+1} \\ y = \frac{1}{a-1} \end{cases}$ Se $a = 1 \vee a = -1$, il sistema è **IMPOSSIBILE**
 Se $a = 0$, il sistema è **INDETERMINATO**,
 con le soluzioni $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = x - 2 \end{cases}$

Il valore 1 è "inammissibile" per a .

Se $a = 2$, il sistema risulta *INDETERMINATO*,

$$12) \text{ Se } a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -1, \begin{cases} x = \frac{a^2 + 1}{a - 1} \\ y = a - 1 \end{cases} \quad \text{con le soluzioni } \begin{cases} x \text{ qualsiasi, purché diverso da } 2; \\ y = x - 4 \end{cases}$$

Se $a = -1$, il sistema è *IMPOSSIBILE*,

perché la soluzione che si trova non è accettabile.

Se $m = 0$, il sistema è *INDET.*, con le soluzioni $\begin{cases} x = 1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$

$$13) \text{ Se } m \neq 0 \wedge m \neq -1, \begin{cases} x = m + 1 \\ y = m \end{cases} \quad \text{Se } m = -1, \text{ il sistema è } \textit{IMPOSSIBILE},$$

perché la soluzione che si trova non è accettabile.

Se $a = 0 \wedge b \neq 0$, il sistema è *INDETERMINATO*: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = 0 \end{cases}$

$$14) \text{ Se } a \neq 0 \wedge b \neq 0, \begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases} \quad \text{Se } a \neq 0 \wedge b = 0, \text{ il sistema è } \textit{INDETERMINATO}: \begin{cases} x = 0 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

Se $a = b = 0$, il sistema è *COMPLETAMENTE INDET.*: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$

Se $a = 1/4$, il sistema è *INDETERMINATO*,

$$15) \text{ Se } a \neq \frac{1}{4} \wedge a \neq 0, \begin{cases} x = 1 \\ y = a \end{cases} \quad \text{con le soluzioni } \begin{cases} x = 2 - 4y \\ y \text{ qualsiasi purché diverso da } 0 \end{cases}$$

Se $a = 0$, il sistema è *IMPOSSIBILE*,

perché la soluzione che si trova non è accettabile.

$$16) \begin{cases} x = 2a \\ y = a \\ z = 1 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x = m \\ y = m + 1 \\ z = -m \end{cases}$$

$$18) p \neq 0, q \neq 0. \text{ Se } p \neq q, \begin{cases} x = 1/p \\ y = 1/q \end{cases} \quad \text{Se } p = q, \text{ il sistema è } \textit{INDET.}, \text{ con le soluz. } \begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = \frac{2 - px}{p} \end{cases} \quad \text{o } \begin{cases} x = \frac{2 - py}{p} \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$$19) \text{ Se } a \neq 2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{Con } a = 2, \text{ il sistema è } \textit{INDET.}, \text{ con le soluz. } \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 - 2t \\ z = 2t - 1 \\ t \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$$20) \text{ Se } a \neq 0, a \neq \pm 1: \begin{cases} x = 1/a \\ y = 1/a \\ z = a \end{cases}$$

$$\text{Con } a = 0 \text{ il sistema diventa: } \begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{ed è perciò } \textit{INDET.}, \text{ con le soluzioni } \begin{cases} x = y \\ y \text{ qualsiasi} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Con } a = 1 \text{ il sistema diventa: } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad \text{che equivale a } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Sommando, si ha } \begin{cases} 2x + 2z = 4; & x + z = 2 \\ y = 3 - (x + z) = 3 - 2 = 1 \end{cases} \quad \text{e il sistema è } \textit{INDET.}: \begin{cases} x = \text{qualsiasi} \\ y = 1 \\ z = 2 - x \end{cases}$$

$$\text{Con } a = -1 \text{ il sistema diventa: } \begin{cases} x + y + z = -3 \\ -x + y + z = -1 & (x - y - z = 1) \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad \text{che equivale a } \begin{cases} x + y + z = -3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Sommando, si ha } \begin{cases} 2x = -2; & x = -1 \\ -1 - y - z = 1; & y + z = -2 \end{cases} \quad \text{e il sistema è } \textit{INDET.}: \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 - z \\ z = \text{qualsiasi} \end{cases}$$

PROBLEMI CHE CONDUCONO AD UN SISTEMA LETTERALE**Clicca sulla freccia, se presente, per la correzione**

- 1a) ➡ Un liquido A contiene il 2% di alcool
Un altro liquido B contiene il 6% di alcool.
Si vogliono miscelare x litri del liquido A e y litri del liquido B in modo da ottenere 60 litri di liquido, che contenga il 3,2% di alcool. Quanto devono valere x e y ?
- 1b) Risolvi lo stesso problema precedente, supponendo che A contenga il 15% di alcool, B il 5% e si desideri miscelare in modo da ottenere 100 litri di liquido al 12% di alcool.
- 1c) Generalizziamo. Un liquido A contiene una certa percentuale nota di alcool, percentuale che indichiamo con p_1 (quindi, il liquido A contiene il $p_1\%$ di alcool).
Un altro liquido B contiene il $p_2\%$ di alcool.
Si vogliono miscelare x litri del liquido A e y litri del liquido B in modo da ottenere k litri di liquido, che contenga il $p\%$ di alcool. Quanto devono valere x e y ?
- 2a) Un treno merci parte dalla stazione di Milano Centrale diretto a Taranto, e procede a 35 km/h. 1 ora dopo un altro treno parte da Milano Centrale in direzione Taranto, su di un binario parallelo al precedente, viaggiando a 40 km/h.
A quale distanza da Milano i due treni si incontreranno, e dopo quante ore dalla partenza del secondo treno?
(Poni due incognite: s = distanza cercata, t = numero di ore impiegate per percorrere questa distanza, dal treno che parte per secondo)
- 2b) Risolvi il precedente problema supponendo questa volta che:
il primo treno viaggi a 30 km/h; il secondo treno parta 2 ore dopo e viaggi a 45 km/h.
- 2c) ➡ Generalizzazione.
Un treno parte da una stazione procedendo alla velocità di v_1 km/h.
Un secondo treno parte dalla medesima stazione con un ritardo di r ore rispetto al primo treno, su di un binario parallelo, nella stessa direzione, viaggiando alla velocità di v_2 km/h (con $v_2 > v_1$).
A quale distanza dalla stazione i due treni si incontreranno, e dopo quante ore dalla partenza del secondo treno?
- 3a) Un ricco signore ha depositato una cifra complessiva di 100000 euro, per un anno, parte in una banca A (all'interesse del 3% annuo) e parte in una banca B (all'interesse del 2% annuo). Sapendo che l'interesse complessivo riscosso dopo un anno è stato di 2180 euro, stabilire quale cifra era stata depositata nella banca A e quale cifra era stata depositata nella banca B.
- 3b) Risolvere il problema precedente nel caso generale: sia
- s la cifra complessiva iniziale,
 - $a\%$ l'interesse annuo concesso dalla banca A,
 - $b\%$ l'interesse annuo concesso dalla banca B,
 - i l'interesse totale maturato.
- Si vogliono conoscere le cifre x e y depositate rispettivamente in A e in B.
- 4) Nel triangolo ABC:
la media fra le misure dei due lati AB e AC è p ; la media fra AB e BC è q ; la media fra AC e BC è r .
Trovare le misure dei tre lati AB, AC, BC.

SOLUZIONI

1a) $x = 42$ litri, $y = 18$ litri 1b) $x = 70$ litri, $y = 30$ litri

1c) $x = \frac{(p-p_2) \cdot k}{p_1-p_2}$ litri, $y = \frac{(p_1-p) \cdot k}{p_1-p_2}$ litri. Il problema è imposs. se $p_1 = p_2 \neq p$, indet. se $p_1 = p_2 = p$.

2a) $s = 280$ km, $t = 7$ h 2b) $s = 180$ km, $t = 4$ h 2c) $s = \frac{v_1 v_2 r}{v_2 - v_1}$ km, $t = \frac{v_1 r}{v_2 - v_1}$ ore.

In 2c), il testo specifica che dev'essere $v_2 > v_1$; effettivamente, con $v_1 = v_2$ il problema sarebbe: indet. se $r = 0$ oppure $v_1 = v_2 = 0$, altrimenti impossibile. Infine, cosa diremo se si suppone $v_1 > v_2$?

3a) 18000 euro in A e 82000 in B. 3b) $x = \frac{100i - bs}{a - b}$; $y = \frac{as - 100i}{a - b}$ ($a \neq b$). E se $a = b$, cosa si può dire?

4) $AB = p + q - r$; $AC = p - q + r$; $BC = q + r - p$