CENNI DI LOGICA (PARTE 1)

1. PROPOSIZIONI E CONNETTIVI LOGICI

“Proposizione” = “affermazione”, “frase per la quale abbia senso chiedersi se sia vera o falsa”.

Esempi:
1. L’uomo è disceso la prima volta sulla Luna nel 1969 (Vera).
2. Il numero 413 è primo (Falsa).

Nella lingua parlata o scritta si utilizzano diverse
costruzioni linguistiche per mettere in relazione tra loro le proposizioni. Le principali sono

- **e**
- **o, oppure**
- **non**
- **se … allora …**
- **se … allora … e viceversa**

Esempi:

3. Il gatto è un mammifero **E** la balena è un pesce.
4. La Juventus ha vinto il campionato del 1985/86 **O** il campionato del 1986/87.
5. Il numero 413 **NON** è primo.
6. **SE** Dante Alighieri è morto prima del 1300,
   ALLORA la Divina Commedia è stata scritta prima del 1300.
7. **SE** il mio anno di nascita è un numero divisibile sia per 2 che per 3,
   ALLORA il mio anno di nascita è divisibile per 6, **E VICEVERSA**.

In Logica tali costruzioni linguistiche vengono schematizzate tramite i “connettivi logici”.
A partire da due proposizioni p, q, i connettivi consentono di creare le **proposizioni “composte”**:

$p \wedge q$	**p ET q (congiunzione)**
$p \vee q$	**p VEL q (disgiunzione)**
$\overline{p}$, $\neg p$, $\sim p$	**NON p (negazione)** *La negazione può essere indicata in tre modi alternativi*
$p \rightarrow q$	**p IMPLICA q; SE p, ALLORA q (implicazione)**
$p \leftrightarrow q$	**p BIIMPLICA q; SE p, ALLORA q E VICEVERSA (biimplicazione, doppia implicazione)**

La corretta interpretazione dei tre connettivi ET, VEL, NON
è descritta dalle rispettive TAVOLE DI VERITA’ qui sotto riportate:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

ET ($\wedge$) è anche detto “prodotto logico”,
e a volte lo si trova indicato con lo stesso simbolo
che si usa per la moltiplicazione:
“$\cdot$” (eventualmente sottinteso).

VEL ($\vee$) è anche detto “somma logica”,
e può essere indicato con notazione additiva: “$+$”

Riassumendo:

- **il connettivo $\wedge$ (ET) lega due proposizioni p, q producendo una proposizione composta $p \wedge q$ che è considerata**
  - **VERA soltanto quando sono vere ENTRAMBE le proposizioni componenti p, q**
  - **altrimenti è considerata FALSA;**
- **il connettivo $\vee$ (VEL) lega due proposizioni p, q producendo una proposizione composta $p \vee q$ che è considerata**
  - **VERA purché sia vera ALMENO UNA delle proposizioni componenti p, q**
  - **mentre è considerata FALSA soltanto quando p, q sono entrambe false;**
- **il connettivo NON viene applicato ad una singola proposizione, e produce una nuova proposizione il cui valore di verità è opposto rispetto a quello della proposizione iniziale.**

Esempio: nel caso sia $p = $"Roma è la capitale d'Italia" (Vera); $q =$ "$2+2=5$" (Falsa)
avremo: $p \wedge q$ FALSA, $p \vee q$ VERA, $\overline{p}$ FALSA, $\overline{q}$ VERA

♥ **La tavola di verità per il connettivo $\vee$ stabilisce che la comunità dei matematici assegna ad esso il significato di "o" inteso in senso INCLUSIVO, proprio come il VEL latino, e *NON* di un "o" ESCLUSIVO (in Latino, AUT).**

- Ad esempio, la proposizione
  "*Le darò un bacio o una carezza*"
  (che evidentemente non esclude la possibilità di entrambe le cose!)
  può essere pensata come la DISGIUNZIONE INCLUSIVA delle due proposizioni
  $b =$ "*le darò un bacio*"; $c =$ "*le darò una carezza*"
  e si tradurrà quindi in linguaggio logico con $b \vee c$.

- Invece se consideriamo la proposizione
  "*Alla fine dell'anno scolastico o resterò promosso o andrò a fare il manovale*"
  e indichiamo con p, m rispettivamente le due proposizioni
  $p =$ "*resterò promosso*"; $m =$ "*andrò a fare il manovale*"
  una traduzione col VEL non sarebbe accurata, in quanto l'affermazione evidentemente significa che si verificherà UNA E UNA SOLA delle due circostanze INCOMPATIBILI p, m.
  Avremmo quindi bisogno, per una traduzione fedele, di un connettivo di "disgiunzione esclusiva", che in effetti in Logica esiste, seppure sia poco usato, e può essere espresso, ad esempio, col simbolo XOR (dall'inglese "eXclusive OR").
  … Ma possiamo anche fare a meno di un nuovo connettivo, e tradurre così: $\boxed{\left(p \wedge \overline{m}\right) \vee \left(\overline{p} \wedge m\right)}$

2. PROPOSIZIONI LOGICAMENTE EQUIVALENTI

Siano p, q due proposizioni. Consideriamo ora le proposizioni composte

1) $\overline{p \wedge q}$
2) $\overline{p} \vee \overline{q}$

Bene, io dico che esse *hanno certamente lo stesso "valore di verità"*:
o sono entrambe vere, oppure sono entrambe false.
Infatti:

- se è vera la 1), che è la negazione della proposizione $p \wedge q$, allora significa che è falsa la $p \wedge q$, quindi che è falsa almeno una fra le due proposizioni p, q.
  Ma allora almeno una fra $\overline{p}, \overline{q}$ è vera, quindi è vera la 2).
- E, viceversa: se è vera la 2), allora è vera almeno una fra le due proposizioni $\overline{p}, \overline{q}$;
  quindi, è falsa almeno una fra le due proposizioni p, q;
  perciò, è certamente falsa la congiunzione $p \wedge q$; per cui la sua negazione $\overline{p \wedge q}$, ossia la 1), è vera.

Due proposizioni composte, costituite dalle stesse proposizioni componenti
(collegate, però, in modo diverso dai connettivi logici),
si dicono "logicamente equivalenti" se assumono sempre lo stesso valore di verità, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti.

E' molto interessante scoprire coppie di proposizioni logicamente equivalenti.
Per verificare se due proposizioni sono logicamente equivalenti,
possiamo servirci delle "tavole di verità" dei vari connettivi logici.

Ad esempio, andiamo a verificare l'equivalenza logica $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ con l'uso delle tavole
(il simbolo "$=$" va qui interpretato e letto come "logicamente equivalente a"):

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	**F**	V	V	F	F	**F**
V	F	F	**V**	V	F	F	V	**V**
F	V	F	**V**	F	V	V	F	**V**
F	F	F	**V**	F	F	V	V	**V**

ALCUNE EQUIVALENZE LOGICHE NOTEVOLI

(il simbolo “ = ” va interpretato e letto come “logicamente equivalente a”)

$\overline{\overline{p}} = p$ Legge della doppia negazione, o “legge di complementarietà”: “**due negazioni affermano**”

$p \wedge q = q \wedge p\,; \quad p \vee q = q \vee p$ Proprietà **commutativa** della congiunzione e della disgiunzione

$p \wedge p = p\,; \quad p \vee p = p$ Proprietà di **idempotenza** della congiunzione e della disgiunzione

$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)\,; \quad (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ Proprietà **associativa** di congiunzione e disgiunzione

$\boxed{\begin{array}{l} \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \\ \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q} \end{array}}$ **LEGGI DI DE MORGAN (Importantissime !!! Confrontale con le analoghe per gli INSIEMI** di pag. 89)

$p \wedge (p \vee q) = p\,; \quad p \vee (p \wedge q) = p$ Leggi di **assorbimento**

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Proprietà **distributiva** della congiunzione rispetto alla disgiunzione …
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ … e proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione

Osserviamo che $\wedge$ viene anche detto “prodotto logico” per via di certe sue affinità con il prodotto fra numeri, $\vee$ viene anche detto “somma logica” perché presenta alcune somiglianze con la somma fra numeri (per cogliere queste analogie, immagina di sostituire nelle rispettive tavole di verità “V” con “1” e “F” con “0”).

Se però proviamo a giocare con le due formule precedenti, trasformando il simbolo $\wedge$ in $\bullet$, il simbolo $\vee$ in $+$, e pensando di avere tre numeri a, b, c anziché tre proposizioni p, q, r, otterremo le due relazioni

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $\cancel{a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)}$, *la prima giusta*, ma *la seconda sbagliata*.

Insomma: in Logica valgono ENTRAMBE le proprietà distributive, sia quella della congiunzione rispetto alla disgiunzione, sia quella della disgiunzione rispetto alla congiunzione, mentre in Algebra vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma ma NON quella della somma rispetto al prodotto.

Esercizio 1. Serviti della tabella seguente per verificare la seconda legge di De Morgan $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Esercizio 2. Verifica, con la tabella, la proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Esercizio 3. Verifica la validità di alcune, a tua scelta, fra le equivalenze logiche riportate in questa pagina.

3. … E L’IMPLICAZIONE?

Ci siamo occupati, fin qui, di CONGIUNZIONE (et), DISGIUNZIONE (vel) e NEGAZIONE (non).
Per quanto riguarda l’implicazione e la biimplicazione, il discorso si prospetta molto più difficile:
è infatti assai problematico decidere se per questi connettivi logici, ben più complessi dei precedenti, abbia ancora senso fissare delle “tavole di verità”.
Ne riparleremo più avanti, nella Parte 2 (pag. 350 e seguenti) di questi Cenni di Logica.

4. SIMBOLI LOGICI DI USO COMUNE

Il “QUANTIFICATORE UNIVERSALE” $\forall$ (per ogni, per qualsiasi, qualunque sia)	Il “QUANTIFICATORE ESISTENZIALE” $\exists$ (esiste) $\nexists$ non esiste; $\exists!$ esiste uno e un solo	Il simbolo “TALE CHE” / oppure | o :

ESERCIZI (gentilissima concessione del prof. Raffaele Mascella dell'Università di Teramo)

1) "[…] dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste un'enunciazione vera oppure falsa. Tale enunciazione non sussiste certo in tutti: la preghiera, ad esempio, è un discorso, ma non risulta né vera né falsa. Prescindiamo dunque dagli altri discorsi, dal momento che l'indagine al riguardo è più pertinente alla retorica o alla poetica. Il discorso dichiarativo spetta invece alla presente considerazione" (Aristotele, *De interpretatione*)

Quale termine abbiamo noi utilizzato, al posto dell'aristotelico "discorsi dichiarativi"?

2) Quali fra le seguenti frasi sono da considerarsi delle "proposizioni"?
- (a) "La porta è chiusa"
- (b) "Forse la porta è chiusa"
- (c) "Probabilmente Albert Einstein descrisse la teoria della relatività ristretta nel 1905"
- (d) "Nel 1905 Albert Einstein descrisse la teoria della relatività ristretta"
- (e) "La soluzione dell'equazione $3x + 15 = 24$ è $x = 3$"
- (f) "Quanti anni hai?"
- (g) "Il 21 luglio del 336 a.C. Aristotele aveva una rana sotto la tunica"
- (h) "La capitale d'Italia è Milano"
- (i) "Fatti mandare dalla mamma a prendere il latte!"

3) "[…] nella lingua italiana, così come in tutti i linguaggi naturali, queste particelle logiche sono polivalenti e ambigue, si presentano in tante versioni equivalenti e hanno diversi sensi.
Ad esempio la congiunzione «e» tra due enunciati può essere espressa in molteplici varianti («Marco è bravo e intelligente», «Marco è bravo, ma anche intelligente», «Marco è sia bravo, sia intelligente») ma quando è presente può avere anche significati diversi dall'affermazione che gli enunciati sono congiunti («si sposarono e vissero felici e contenti», che ha senso «e poi» ad indicare una consequenzialità), così come la disgiunzione «o» che può avere
- un senso debole o inclusivo
  (se indica l'uno, o l'altro, o anche tutti e due: «se è sereno o fa caldo vado al mare»)
- oppure un senso forte o esclusivo
  (se indica l'uno, o l'altro, ma non tutti e due: «oggi vado al mare o resto a casa»).

Gli esempi di usi e significati alquanto differenziati non terminano certo qui, ma credo che il senso sia stato compreso: nelle lingue naturali abbiamo molte possibilità di esprimere uno stesso concetto, avvalendoci dei significati multiformi delle parole, delle molteplici strutture grammaticali, dei contesti in cui vengono usate, dell'enfasi attribuita attraverso la punteggiatura o con l'oratoria.
In Logica è opportuno invece ricondurre tutte queste molteplicità espressive a quelle "di base", cioè raggruppandole in base al significato che hanno, e considerando la forma linguisticamente più semplice per la loro denotazione.
Le particelle logiche aventi stesso significato sono così riportate ad un'unica rappresentazione, sia per simbolo che per significato" (R. Mascella)

Ciò premesso,

I) dire in quali delle seguenti proposizioni la congiunzione "e" si può esprimere tramite il connettivo $\wedge$:
- (a) "Carlo e Marco sono insegnanti"
- (b) "Carlo e Marco stanno venendo alla festa"
- (c) "Carlo ha una maglia bianca e blu"
- (d) "Carlo è andato al bar e ha preso un caffè"
- (e) "Carlo e Marco pesano ciascuno 80 Kg"
- (f) "Carlo e Marco pesano insieme 160 Kg"

II) Dire in quali delle seguenti proposizioni la "o" è inclusiva:
- (a) "Nelle fermate a richiesta l'autobus si ferma se qualche persona deve scendere o salire"
- (b) "Nel menu turistico è compreso il dolce o la frutta"
- (c) "Paolo sposerà Marina o Monica"
- (d) "Per vincere quel concorso bisogna essere molto bravi o raccomandati"
- (e) "L'unanimità si raggiunge quando tutti sono favorevoli o tutti sono contrari"
- (f) "Puoi farmi avere notizie tramite Claudia o tramite Elisa"

4) "Sono ammesse al concorso le persone che sono laureate e che hanno meno di trent'anni o hanno figli".
Aldo non è laureato, ha ventisei anni e un figlio.
Paolo è laureato, ha quarant'anni e due figli.
Vincenzo è laureato, ha trentadue anni e non ha figli.
Chi può partecipare al concorso?

5) Aldo, Bruno e Carlo sono tre studenti che hanno sostenuto un esame.
Ponendo:
A = “Aldo ha superato l’esame”, B = “Bruno ha superato l’esame”, C = “Carlo ha superato l’esame”, determinare le proposizioni composte che traducono, attraverso i connettivi logici, i seguenti enunciati:

(a) “Solo Carlo ha superato l’esame”
(b) “Solo Aldo non ha superato l’esame”
(c) “Solo uno tra Aldo, Bruno e Carlo ha superato l’esame”
(d) “Almeno uno tra Aldo, Bruno e Carlo ha superato l’esame”
(e) “Almeno due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”
(f) “Al più due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”
(g) “Esattamente due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”

6) Aldo, Bruno e Carlo sono gli unici tre membri di una commissione che vota una proposta.
Ponendo: A = “Aldo vota a favore”; B = “Bruno vota a favore ”; C = “Carlo vota a favore”, determinare le proposizioni composte che traducono i seguenti enunciati:

(a) “La votazione è stata unanime”
(b) “La proposta, in seguito alla votazione, è passata”
(c) “La proposta ha ricevuto un numero dispari di voti a favore”
(d) “La proposta è stata respinta, ma non all’unanimità”
(e) “La proposta è stata respinta; Bruno ha votato contro”

7) Posto: A = “Carlo è ligure” e B = “Diego è piemontese”,
scrivere le proposizioni che traducono, attraverso i connettivi logici, i seguenti enunciati:

(a) “Carlo non è ligure”
(b) “Carlo è ligure e Diego è piemontese”
(c) “Carlo è ligure sebbene Diego sia piemontese”
(d) “Non è vero che Carlo sia ligure e allo stesso tempo Diego piemontese”
(e) “O Carlo è ligure e Diego è piemontese, o né Carlo è ligure, né Diego è piemontese”

8) *Da un Test di Ingresso alla Facoltà di Architettura.*
Nel diario del giovane Telesforo è scritto:

Nonno Ubaldo dice che quando era giovane ha traversato l'oceano Atlantico a nuoto
e che riusciva a battere in velocità le balene.
Secondo me questa è una bugia.

Si dica cosa si può correttamente dedurre dalla convinzione di Telesforo.

(a) Nonno Ubaldo non ha traversato l'Atlantico a nuoto
ma riusciva comunque a battere in velocità le balene
(b) A nonno Ubaldo non piacciono le balene
(c) Nonno Ubaldo non ha traversato l'Atlantico a nuoto e non riusciva a battere in velocità le balene
(d) Nonno Ubaldo ha traversato l'Atlantico a nuoto ma non riusciva a battere in velocità le balene
(e) Se nonno Ubaldo riusciva a battere in velocità le balene allora non ha traversato l'Atlantico a nuoto

9) Dire quali delle seguenti coppie di forme proposizionali sono logicamente equivalenti:

(a) $p\,,\ (p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$ (b) $\overline{p \wedge \overline{q}}\,,\ \overline{p} \vee q$ (c) $p \vee q\,,\ (\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$

RISPOSTE

1) Abbiamo usato il termine “proposizioni”

2) (a), (d), (e), (g), (h), espressioni verbali di fronte alle quali ha significato chiedersi: “E’ vero o è falso?”

3) I) (a), (b), (e) II) (d), (f) 4) Aldo e Vincenzo no, Paolo sì

5) (a) $\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$ (b) $\overline{A} \wedge B \wedge C$ (c) $(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)$ (d) $A \vee B \vee C$
(e) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$ oppure $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
(f) $\overline{A \wedge B \wedge C}$ (g) $(A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$

6) (a) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$ (b) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$
(c) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)$
(d) $(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)$ (e) $(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$

7) (a) $\overline{A}$ (b) $A \wedge B$ (c) $A \wedge B$ (d) $\overline{A \wedge B}$ (e) $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ 8) (e) 9) (a), (b)