INSIEMI

1. CHE COS'E' UN "INSIEME"

Con la parola "insieme" indichiamo un gruppo, una collezione, una totalità di oggetti.
Gli oggetti che costituiscono un insieme vengono chiamati i suoi "elementi".

Non necessariamente si deve trattare di oggetti concreti:
gli elementi di un insieme possono essere anche entità astratte, o persone.

A ben guardare, tuttavia,

quanto abbiamo appena scritto non può pretendere di essere
una vera e propria "definizione" del termine "insieme".
In effetti**, è corretto parlare di "definizione" soltanto quando un determinato concetto**
viene descritto per mezzo di concetti più semplici, già precedentemente acquisiti,
mentre noi non abbiamo fatto altro che citare dei *sinonimi* ("gruppo", "collezione", "totalità").

In realtà,

il concetto di "insieme" è talmente semplice da NON poter essere definito
a partire da concetti ancora più semplici (è già "al massimo livello di semplicità" …):
si dice che è un concetto "primitivo" della matematica.

Quando inizieremo lo studio della Geometria, incontreremo altri concetti "primitivi":
punto, retta, piano, movimento rigido.

Un insieme si dice:
- **"finito", se i suoi elementi si possono contare esaurendo l'operazione del contare;**
- **"infinito", in caso contrario.**

Così scrivendo, abbiamo dato l'impressione che il discorso si possa "liquidare" molto semplicemente, ma …
… a ben guardare, in tutta onestà, in questo modo la questione *NON* è posta nei termini corretti.

La riflessione, estremamente interessante, sugli insiemi finiti e infiniti,
verrà ripresa al termine del capitolo (pag. 90).

Esempi:
- ❑ *Gli allievi che alla data attuale risultano iscritti all'Università di Oxford possono essere pensati come gli elementi di un insieme. Questo insieme è, ovviamente, **finito**.*
- ❑ *Gli atomi di ferro della Tour Eiffel di Parigi costituiscono, nella loro totalità, un insieme. Questo insieme è formato da un numero gigantesco, ma pur sempre **finito**, di elementi.*
- ❑ *I multipli di 5 (ossia i numeri 5, 10, 15, 20, …) costituiscono un insieme **infinito**.*
- ❑ *Una retta è un insieme **infinito** di punti.*

- **Gli insiemi si indicano di solito con le lettere maiuscole dell'alfabeto: A, B, C, ... , I, ...** ;
- **i loro elementi, di solito, con le lettere minuscole**: **a, b, c, ... , x, y, ...**

Tuttavia, non sono rare le *eccezioni* a questa consuetudine. Tanto per fare un esempio,
in Geometria i punti vengono indicati di norma con lettere maiuscole e le rette con minuscole;
quando dunque si ha a che fare con una retta r pensata come insieme dei suoi punti A, B, … , P, … ,
accade di avere l'insieme contrassegnato in minuscolo e l'elemento in maiuscolo.

Per indicare che un oggetto a è elemento dell'insieme I si scrive: $a \in I$
(leggi: "a appartiene all'insieme I", oppure: "a è un elemento di I", oppure: "a è contenuto in I").

Esempio. Se indichiamo con C l'insieme delle città capitali di una nazione, potremo scrivere:
Londra $\in C$; Pisa $\notin C$ ($\notin$, negazione del simbolo di appartenenza, si legge "non appartiene a").

Non necessariamente gli elementi di un insieme devono essere "della medesima specie".
E' in effetti del tutto lecito considerare insiemi bizzarri formati da oggetti, concreti od astratti, dei tipi più svariati (che so … l'insieme J avente per elementi: la Luna, il presidente degli Stati Uniti e il numero 1,25).

Comunque, in Matematica hanno particolare rilievo:
- gli insiemi i cui elementi sono *punti geometrici* (questi insiemi sono anche detti "**figure**")
- e quelli i cui elementi sono *numeri* (gli "**insiemi numerici**", di cui si occupa il paragrafo successivo).

2. INSIEMI NUMERICI RILEVANTI

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri "naturali" = $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Quindi i numeri "**naturali**" sono gli **interi assoluti** (= *senza segno*).

$\mathbb{N}^*$ = insieme dei numeri naturali privato dello zero = $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

In generale, l'asterisco accanto al simbolo di un insieme numerico
è usato per escludere lo "0" dall'insieme stesso.

$\mathbb{Z}$ = insieme degli interi relativi = $\{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali

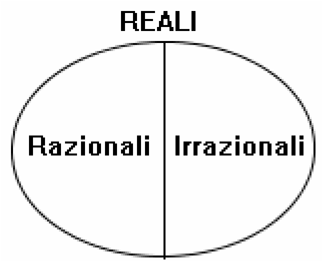
Ricordiamo che
un numero si dice "razionale" se è esprimibile sotto forma di "frazione", intesa come "quoziente fra due interi, il secondo dei quali (è ovvio!) $\neq 0$ ".

Dicendo "numeri razionali", senza specificare altro, si intende "razionali *relativi*".
Se si desidera indicare l'insieme dei razionali *assoluti* (= senza segno),
al posto del simbolo $\mathbb{Q}$ si impiega il simbolo $\mathbb{Q}_a$.

Il software da noi utilizzato per scrivere le formule (MathType) usa una **grafica** un po' barocca per indicare alcuni insiemi numerici.
Per gli insiemi dei numeri razionali e reali possiamo semplicemente scrivere una Q e una R poi aggiungere un trattino:
$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

I simboli
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
vengono dal tedesco:
Zahlen = numeri
Quotient = quoziente

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri "reali", ossia di tutti i numeri, sia razionali che irrazionali



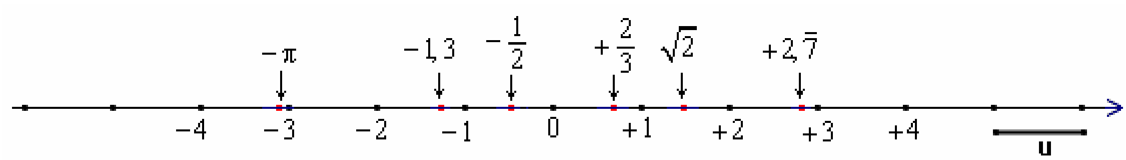
Quando si parla di "numeri reali", ci si riferisce di norma ai "reali *relativi*".
L'insieme dei reali *assoluti* (= senza segno) può essere indicato con $\mathbb{R}_a$.

- Sono **razionali** tutti **i decimali finiti** e tutti **i decimali periodici**.
- Invece gli **illimitati *non* periodici** sono **irrazionali**.
  Si dimostra che sono irrazionali il numero $\sqrt{2}$ e, più in generale,
  le radici quadrate degli interi che non sono "quadrati perfetti":
  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ ...$
  Anche il numero π è irrazionale
  (come dimostrò per primo il francese Lambert nel XVIII secolo).

  L'insieme dei numeri irrazionali si indica prevalentemente con un simbolo che utilizza l'operazione di "differenza insiemistica": $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

L'insieme $\mathbb{R}$ è "rappresentabile sopra una retta", nel senso che, presa una "number line"
(= retta dotata di origine, orientamento e unità di misura),
♪ ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto (detto "*immagine*" di quel numero)
♫ e viceversa, ad ogni punto corrisponde uno e un solo numero reale (detto "*ascissa*" di quel punto).

In ogni intervallino, anche piccolissimo, della "number line", troviamo sempre infiniti punti con ascissa razionale ed infiniti altri punti con ascissa irrazionale ⇨.



P = insieme dei numeri primi = $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...\}$. Alcuni scrivono $\mathbb{P}$.

E = insieme dei numeri pari = $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$. In Inglese: pari = *Even*

La comunità matematica è concorde nel classificare anche lo "zero" (0) fra i numeri PARI.
Si intendono come "pari" quei numeri *naturali* che si possono scrivere sotto la forma $2 \cdot n$, essendo *n* ancora un numero *naturale*.
Poiché 0 evidentemente gode di questa proprietà ($0 = 2 \cdot 0$), ecco che 0 è pari.
Vedi anche pagina 3 a questo proposito.

O = insieme dei numeri dispari = $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$. In Inglese: dispari = *Odd*

Le categorie di "parità" e "disparità" si estendono, in senso più "largo", anche agli interi *relativi*:
fra questi, son detti *pari* quelli che si possono scrivere nella forma $2 \cdot x$, essendo *x* ancora un intero relativo.
Sono perciò classificati pari i numeri $0, +2, -2, +4, -4, +6, -6, \ ...$ e dispari gli altri interi relativi.

3. DEFINIZIONE PER ELENCAZIONE O PER PROPRIETA' CARATTERISTICA

Se si vuole definire un insieme, in modo che tutti sappiano esattamente e senza possibilità di equivoco da quali elementi questo insieme è costituito, si può scegliere uno dei seguenti due modi:

I. **si elencano tutti gli elementi** dell'insieme
(se l'insieme è infinito, si useranno i puntini di sospensione, come negli esempi riportati al paragrafo precedente riguardanti gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, P, E, O)

II. oppure **si enuncia una proprietà che caratterizzi gli elementi dell'insieme**, cioè una proprietà in base alla quale si possa dire con certezza se un dato oggetto appartiene o no all'insieme. Es.:
- A = { 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91 } oppure: A = { multipli di 13 minori di 100 }
- E = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... } oppure: E = { numeri pari }

ESERCIZI (risposte a pag. 97)

1) I seguenti insiemi sono definiti mediante una proprietà caratteristica dei loro elementi.
Definiscili invece **elencando** gli elementi stessi.
A = insieme dei numeri primi compresi fra 30 e 60
B = insieme dei multipli di 6
C = insieme delle vocali contenute nella parola "albero"
D = insieme dei numeri naturali minori di 100 tali che la somma delle loro cifre dia 7

2) I seguenti insiemi sono definiti semplicemente elencando i loro elementi.
Definiscili invece mediante una **proprietà caratteristica** dei loro elementi.

$\mathrm{E}=\{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80,\ 90,\ 100\}$ $\qquad$ $\mathrm{F}=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ ...\right\}$

$\mathrm{G}=\{1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ ...\}$ $\qquad$ $\mathrm{H}=\{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ ...\}$

$\mathrm{I}=\{123,\ 234,\ 345,\ 456,\ 567,\ 678,\ 789\}$ $\qquad$ $\mathrm{L}=\{11,\ 33,\ 55,\ 77,\ 99,\ 121,\ 143,\ ...\}$

3) Una scrittura come la seguente: $\mathrm{A}=\{2n+1,\ n\in\mathbb{N}\}$ si legge:
"A è l'insieme dei numeri della forma $2n+1$, con n che appartiene all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali".
Per elencare gli elementi dell'insieme A dobbiamo far variare n nell'insieme $\mathbb{N}$, facendogli assumere dunque i valori 0, 1, 2, 3, … , e per ogni valore dato a n calcolare il valore dell'espressioncina $2n+1$.

n	0	1	2	3	4	…
$2n+1$	1	3	5	7	9	…

In definitiva, avremo:
$\mathrm{A}=\{2n+1,\ n\in\mathbb{N}\}=\{1,3,5,7,9,...\}$

♥ In matematica, vengono sovente utilizzati i simboli:
- $\boldsymbol{2n+1}$ per indicare il generico numero **dispari**,
- $\boldsymbol{2n}$ per indicare il generico numero **pari.**

Qui si sottintende che sia $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$; per indicare il generico numero **dispari**, a volte si usa $\boldsymbol{2n-1}$, con $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*$
Fra l'altro, i numeri *interi* si associano preferibilmente a lettere *centrali* dell'alfabeto, come *n, m, i, k* ...

Altri esempi: $\mathrm{B}=\{k^2,\ k\in\mathbb{N}\}=\{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,...\}$ $\qquad$ $\mathrm{C}=\left\{\frac{x+1}{x},\ x\in\mathbb{N}^*\right\}=\left\{2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},...\right\}$

Completa tu: $\mathrm{D}=\{n^3,\ \ n\in\mathbb{N}^*\}=...$ $\qquad$ $\mathrm{E}=\{3n,\ \ n\in\mathbb{N}^*\}=...$ $\qquad$ $\mathrm{F}=\{\sqrt{x},\ \ x\in\mathbb{N}\}=...$

4) Nel quesito precedente si chiedeva di passare da una definizione in simboli ad una per elencazione.
Fai ora il viceversa, per gli insiemi che seguono (l'insieme in cui varia la lettera dovrà essere $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^*$):

$\mathrm{G}=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ ...\}$ $\qquad$ $\mathrm{H}=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ ...\right\}$ $\qquad$ $\mathrm{I}=\left\{0,\ \frac{4}{5},\ \frac{24}{25},\ \frac{124}{125},\ \frac{624}{625},\ ...\right\}$

5) Qual è (= che tipo di figura geometrica costituisce) l'insieme dei punti del piano la cui distanza da un punto K fissato sul piano è: a) uguale a 5 cm? b) minore o uguale di 5 cm?

6) Qual è l'insieme dei punti dello SPAZIO la cui distanza da un punto fissato K è:
a) uguale a 5 cm? b) minore o uguale di 5 cm?

7) Qual è l'insieme dei punti del piano la cui distanza da un punto K fissato sul piano è non superiore a 10 cm e non inferiore a 6 cm?

8) Qual è l'insieme dei punti dello spazio che distano 7 cm da una retta fissata? E da un piano fissato?

9) Per qual motivo "l'insieme delle diciottenni carine nate a Venezia" non è accettabile, come definizione?

4. INSIEMI UNITARI, INSIEME VUOTO

Si dice "insieme unitario" ogni insieme costituito da un solo elemento.
Ad esempio, l'insieme dei punti comuni a due rette che si tagliano è un insieme unitario.

Si dice "insieme vuoto" un insieme privo di elementi.
E' vuoto l'insieme delle commesse di un negozio, se il proprietario le ha licenziate tutte per la crisi.
L'insieme dei numeri comuni all'insieme dei numeri pari e all'insieme dei numeri dispari è vuoto.

L'insieme vuoto si indica con uno qualsiasi dei seguenti due simboli: $\varnothing$, $\{\ \}$. Il primo è più usato.

Di solito, anziché parlare di "UN insieme vuoto", si dice "L' insieme vuoto". Secondo te, perché? ⇨

ESERCIZI. Dire quali fra i seguenti insiemi sono unitari, quali vuoti, quali né unitari né vuoti.
1) A = insieme dei punti comuni a due circonferenze complanari e concentriche
2) B = insieme dei punti comuni a una circonferenza e a una sua corda
3) C = insieme dei punti di un segmento, che lo dividono in due parti uguali
4) D = insieme dei punti di un segmento, che lo dividono in due parti, delle quali una è doppia dell'altra
5) E = insieme dei numeri primi pari
6) F = insieme dei punti comuni a due rette parallele

5. SOTTOINSIEMI

Si dice che un insieme B è sottoinsieme di un insieme A se B è "una parte" di A,
nel senso che **ogni elemento di B appartiene anche ad A.**

In tal caso si scrive: $\mathbf{B \subseteq A}$ che si legge: "**B è un sottoinsieme di A**", oppure: "**B è incluso in A**".

♥ "*Incluso*" si dice per un *insieme* rispetto ad *un altro*; il simbolo è $\subseteq$ (è sottoinsieme di, è incluso in).
"*Contenuto*" si dice per un *elemento* rispetto a un *insieme*; il simbolo è $\in$ (appartiene a, è contenuto in).

Esempi:

A = {7, 11, 19, 21, 30}
B = {11, 21, 30}
$B \subseteq A$

I = {cittadini italiani}
S = {cittadini italiani il cui cognome inizia con "S"}
$S \subseteq I$

F = {multipli di 10}
G = {multipli di 5}
$F \subseteq G$

Molto spesso un **sottoinsieme** si definisce dicendo che esso è costituito da
quegli elementi dell'insieme di partenza, che soddisfano a una certa ulteriore proprietà.
Due esempi:

P = insieme dei pesci
F = insieme dei pesci di fiume
$F \subseteq P$

A = insieme dei numeri pari
B = insieme dei numeri pari, che sono quadrati perfetti
$B \subseteq A$

Fra i sottoinsiemi di un qualsivoglia insieme A ci sono sempre l'insieme vuoto, e A stesso:

$\underset{\text{per ogni}}{\forall}\ A,\ \ \varnothing \subseteq A;\ \ A \subseteq A$

Si dice "**sottoinsieme proprio**" di un insieme A, ogni sottoinsieme di A, che non coincida con A stesso.

Se si desidera dare un forte risalto al fatto che I è un sottoinsieme di J che "non riempie tutto J", cioè non viene a coincidere con J, si può usare un simbolo specifico, detto di "inclusione stretta": $\subset$
Si scrive allora $I \subset J$
("I è incluso strettamente in J").

6. INSIEME DELLE PARTI

**L'insieme, i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A, viene detto "insieme delle parti" di A,
e indicato col simbolo P(A)** (leggi: "P di A", oppure "insieme delle parti di A").

Ribadisco: **si tratta di un insieme i cui elementi sono a loro volta degli insiemi!**

Ad esempio, se $A = \{a, b, c\}$, allora $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

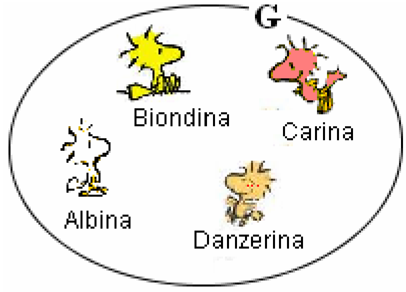
ESERCIZI
7) Di quanti elementi è costituito l'insieme delle parti di A, se A contiene 4 elementi?
8) In generale, detto n il numero di elementi di un insieme A, quanti elementi conterrà l'insieme $P(A)$?
9) La formula precedentemente trovata è valida anche per $P(\varnothing)$?

Le RISPOSTE agli esercizi di questa pagina sono a pag. 97.

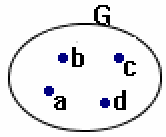
7. DIAGRAMMI DI VENN

Per rappresentare gli insiemi è spesso conveniente far uso di particolari, semplici raffigurazioni chiamate "diagrammi di Venn".

Prova ad immaginare un gruppo di galline in un recinto.
Ecco una rappresentazione di questo insieme G di galline:

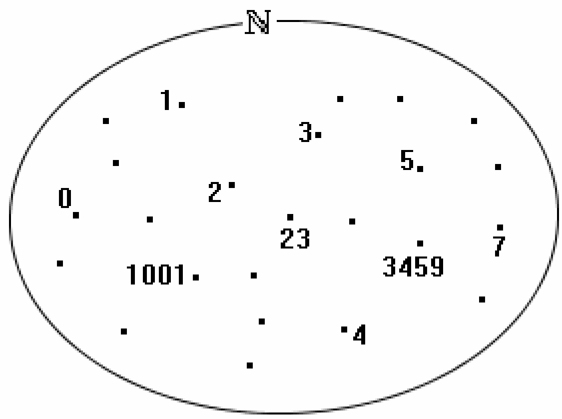


Ed ecco la rappresentazione dello stesso insieme G se il recinto venisse osservato da una mongolfiera sospesa a grande altezza.



Se ci interessa solo il fatto che le galline sono quattro, che hanno determinati nomi, e che le vogliamo pensare come elementi di uno stesso "insieme", la rappresentazione "dalla mongolfiera", che riduce le galline ad altrettanti punti all'interno del recinto, è la più comoda ed essenziale.
Questa rappresentazione costituisce appunto un "diagramma di Venn".

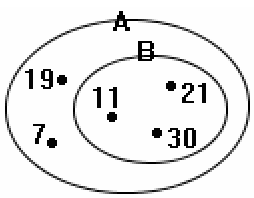
Ed ecco un possibile diagramma di Venn per l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:



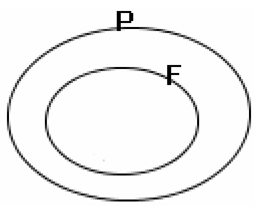
Se è richiesto di rappresentare, in uno stesso diagramma di Venn, un insieme ed un suo sottoinsieme, il sottoinsieme andrà rappresentato come un recinto *interno* al recinto che rappresenta l'insieme principale.

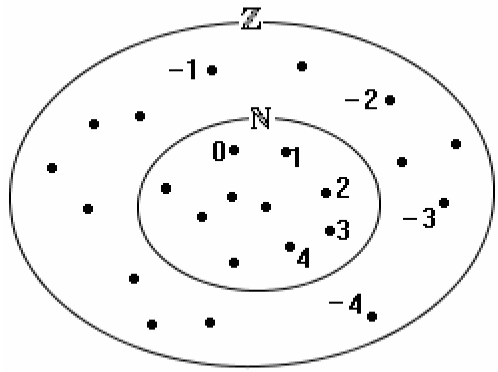
$\mathbb{N}$ = { numeri naturali }
$\mathbb{Z}$ = { interi relativi }
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
(dato che $1 = +1$, $2 = +2$ ecc.)

A = {7, 11, 19, 21, 30}
B = {11, 21, 30}
$B \subseteq A$



P = insieme dei pesci
F = insieme dei pesci di fiume
$F \subseteq P$





8. INTERSEZIONE

Dati due insiemi A e B, si dice "intersezione" fra A e B,
e si indica con il simbolo $\mathbf{A \cap B}$ (leggi: "A intersezione B"),
l'insieme i cui elementi sono gli elementi comuni ai due insiemi A e B,
cioè gli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B.

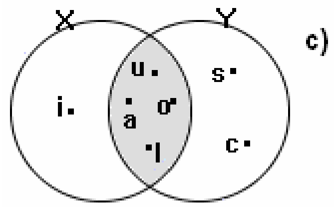
Esempi:

a) Se $A = \{10, 2, 7, 4\}$ e $B = \{8, 7, 2, 11, 22\}$, allora $A \cap B = \{2, 7\}$ (*oppure* $\{7, 2\}$ *: è la stessa cosa*) ↓

♥ L'*ordine* in cui vengono pensati o elencati gli elementi di un insieme è **irrilevante**!

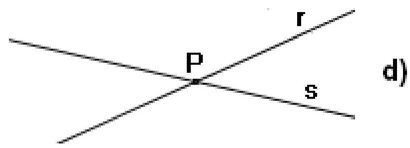
b) $A = \{\textit{naturali minori di } 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B = \{\textit{numeri pari}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...\}$
$A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

c) $X = \{\textit{lettere della parola "aiuola"}\} = \{a, i, u, o, l\}$
$Y = \{\textit{lettere della parola "scuola"}\} = \{s, c, u, o, l, a\}$
$X \cap Y = \{a, u, o, l\}$ (vedi figura)



d) Consideriamo una retta r. Essa è un insieme di punti.
Consideriamo un'altra retta s, che tagli la retta r.
Anche la retta s, naturalmente, è un insieme di punti.
L'intersezione fra questi due insiemi
(che abbiamo indicato, eccezionalmente, con lettere minuscole perché la consuetudine è di indicare le rette con lettere minuscole), è l'insieme unitario il cui elemento è il punto in cui tali rette si tagliano (si usa infatti dire "*il punto di intersezione*" fra le due rette).

$$r \cap s = \{P\}$$

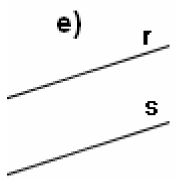


♥ In questa pagina ci sono parecchie notazioni "atipiche": ad esempio, scrivendo $P \in r$, eccezionalmente l'*elemento* è indicato in maiuscolo e l'*insieme* in minuscolo; in $\alpha \cap \beta$ due insiemi sono indicati con lettera greca …

e) Se due rette r, s sono *parallele*, la loro intersezione è l'*insieme vuoto*:

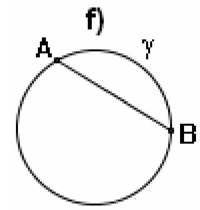
$$r \cap s = \varnothing$$

… Beh, In realtà due rette sono considerate parallele in DUE casi: se giacciono sullo stesso piano e non hanno alcun punto in comune, *oppure* se coincidono. Dunque avremmo dovuto in realtà scrivere, con maggior precisione: "Se due rette r ed s sono parallele, la loro intersezione è l'insieme vuoto, *escluso il caso della coincidenza*".

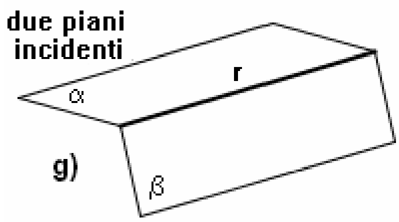


f) L'intersezione fra una circonferenza (pensata come insieme di punti) e una sua corda (pensata anch'essa come insieme di punti), è un insieme contenente due soli elementi: i due estremi della corda.

$$\gamma \cap \overline{AB} = \{A, B\}$$

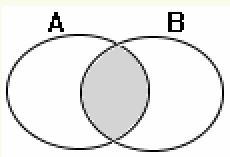


g) L'intersezione fra due *piani incidenti* (= che si tagliano) è una *retta* (quindi un insieme di infiniti punti): $\alpha \cap \beta = r$

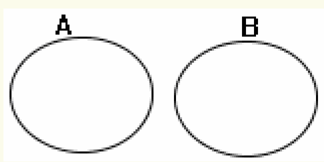


h) L'intersezione fra l'insieme degli abitanti di Milano e l'insieme degli abitanti dell'Italia è il primo fra i due insiemi considerati (= l'insieme degli abitanti di Milano).
In generale, se $\mathbf{A \subseteq B}$, allora è sempre $\mathbf{A \cap B = A}$.

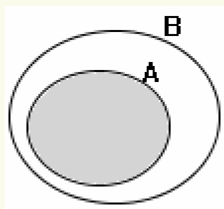
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELL'INTERSEZIONE fra due insiemi A, B



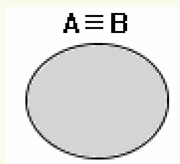
La situazione più generale. L'**intersezione** fra A e B è la **parte di territorio interna ad entrambi i recinti** A, B



A, B non hanno elementi comuni (si dice che sono "**disgiunti**"). L'**intersezione** di A e B è **vuota**: $A \cap B = \varnothing$



Uno dei due insiemi è sottoinsieme dell'altro: l'intersezione è l'insieme più piccolo
$A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$



I due insiemi coincidono: anche l'intersezione coincide con ciascuno di essi
$A \equiv B \rightarrow A \cap B = A = B$
"≡" si legge: "coincide con"

9. UNIONE

Dati due insiemi A e B, si dice "unione" fra A e B ,
e si indica con il simbolo $\mathbf{A \cup B}$ (leggi: " A unione B "),
l'insieme i cui elementi sono tutti gli elementi che appartengono o ad A, o a B,
dove la particella "o" deve essere intesa in senso "inclusivo" (come il VEL della lingua latina)
e *non* esclusivo, come sarebbe invece il latino AUT; cioè, è inclusa
anche la possibilità che l'elemento appartenga sia ad A che a B contemporaneamente.

Insomma, un elemento appartiene ad $A \cup B$ qualora appartenga ad ALMENO UNO dei due insiemi A, B;
in altre parole, appartengono ad $A \cup B$ quegli elementi che appartengono:
1) ad A ma non a B; 2) a B ma non ad A; 3) sia ad A che a B.

Schematicamente:

$\boxed{A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}}$ $A \cup B$ è l'insieme degli oggetti *x* tali che *x* appartiene ad A, VEL *x* appartiene a B

$\boxed{A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}}$ $A \cap B$ è l'insieme degli oggetti *x* tali che *x* appartiene ad A, ET *x* appartiene a B

♥ Nota bene la **somiglianza fra i simboli** $\cup$ (unione), $\vee$ ("vel" logico); $\cap$ (intersezione), $\wedge$ ("et" logico)

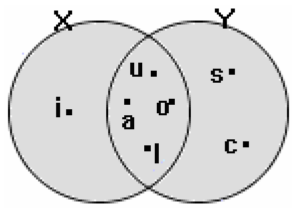
Esempi:

a) Se

$A = \{\text{numeri naturali minori di } 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \{\text{numeri pari}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...\}$

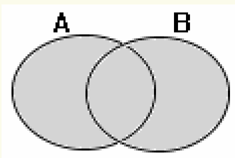
allora $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, ...\}$



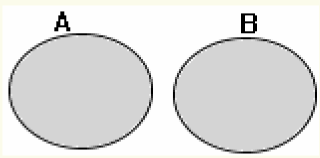
b) Se $X = \{a, i, u, o, l\}$, $Y = \{s, c, u, o, l, a\}$,
allora $X \cup Y = \{a, i, u, o, l, s, c\}$ (*vedi figura*)

c) Se $A = \{\text{abitanti di Milano}\}$ e $B = \{\text{abitanti dell'Italia}\}$, allora $A \cup B = \{\text{abitanti dell'Italia}\} = B$
In generale, se $\mathbf{A \subseteq B}$, allora $\mathbf{A \cup B = B}$.

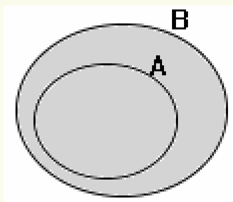
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELL'UNIONE fra due insiemi A, B



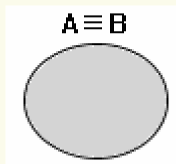
La situazione più generale. L'**unione** fra A e B è il **territorio interno ad almeno uno tra i recinti** A, B



A, B non hanno elementi comuni (si dice che A, B sono "**disgiunti**"). L'**unione** di A e B è **tutto il territorio ombreggiato**



Uno dei due insiemi è sottoinsieme dell'altro: l'unione è l'insieme più grande
Se $A \subseteq B$, *allora* $A \cup B = B$



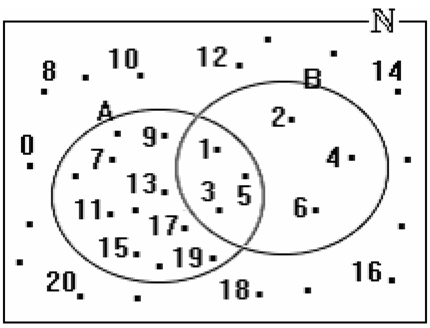
I due insiemi coincidono: anche l'unione coincide con ciascuno di essi

ESERCIZIO SVOLTO

Rappresenta, in uno stesso diagramma di Venn, gli insiemi seguenti:

$\mathbb{N} = \{\textit{numeri naturali}\}$; $A = \{\textit{numeri dispari}\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definisci poi, per elencazione, gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$.



Tanto A quanto B sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$;
il recinto $\mathbb{N}$ contiene quindi al suo interno
sia il recinto A che il recinto B.
In pratica, l'insieme $\mathbb{N}$ è il "grande insieme"
in cui gli altri due sono "immersi":
in casi come questo, si parla di "insieme universo"
o "insieme ambiente" (se ne occupa in particolare il paragrafo 12).
L'insieme che fa da "insieme universo" in un certo contesto,
viene di solito rappresentato con un rettangolo anziché un ovale.

Risposte: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ...\}$

10. ESERCIZI SU: SOTTOINSIEMI, INTERSEZIONE, UNIONE
(risposte alle pagg. 97-98)

1) $\mathrm{A}=\{numeri\ \ pari\}=\ldots$
$\mathrm{B}=\{numeri\ \ primi\}=\ldots$

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\ldots$

$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\ldots$

Spazio per il diagramma di Venn:

2) $\mathrm{I}=\{numeri\ naturali\ minori\ di\ 12\}=\ldots$
$\mathrm{L}=\{numeri\ naturali\ maggiori\ di\ 8\}=\ldots$

$\mathrm{I}\cap\mathrm{L}=\ldots$

$\mathrm{I}\cup\mathrm{L}=\ldots$

Spazio per il diagramma di Venn:

3) $\mathrm{A}=\{rettangoli\}$; $\quad \mathrm{B}=\{rombi\}$

NOTA
- Si dice "**rettangolo**" un quadrilatero coi **quattro angoli retti**;
- si dice "**rombo**" un quadrilatero coi **quattro lati uguali** fra loro.

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\ldots$
$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\ldots$

4) $\mathrm{L}=\{numeri\ naturali\ minori\ di\ 30\}=\ldots$
$\mathrm{P}=\{numeri\ \ primi\}=\ldots$
$\mathrm{Q}=\{numeri\ naturali\ terminanti\ con\ la\ cifra\ 3\}=\ldots$

$\mathrm{L}\cap\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}=\ldots$

5) Rappresenta graficamente, *in uno stesso diagramma di Venn,* i seguenti insiemi:

$\mathrm{T}=\{triangoli\}$
$\mathrm{A}=\{triangoli\ acutangoli\}$
$\mathrm{O}=\{triangoli\ ottusangoli\}$
$\mathrm{R}=\{triangoli\ rettangoli\}$
$\mathrm{I}=\{triangoli\ isosceli\}$
$\mathrm{E}=\{triangoli\ equilateri\}$

NOTA Un triangolo si dice:
- **acutangolo** se ha **tutti e tre gli angoli acuti**;
- **ottusangolo** se ha **un angolo ottuso**;
- **rettangolo** se ha **un angolo retto;**
- **isoscele se ha (almeno) due lati uguali fra loro;**
- **equilatero se ha tutti e tre i lati uguali fra loro (caso particolare, quindi, di triangolo isoscele).**

6) Sempre con riferimento agli insiemi dell'esercizio precedente:

$\mathrm{A}\cap\mathrm{O}=\ldots$ $\qquad \mathrm{A}\cup\mathrm{O}=\ldots$ $\qquad \mathrm{R}\cap\mathrm{I}=\ldots$ $\qquad \mathrm{R}\cap\mathrm{E}=\ldots$
$\mathrm{I}\cap\mathrm{E}=\ldots$ $\qquad \mathrm{I}\cup\mathrm{E}=\ldots$ $\qquad \mathrm{A}\cap\mathrm{E}=\ldots$ $\qquad \mathrm{A}\cup\mathrm{E}=\ldots$

7) Rappresenta graficamente, *in uno stesso diagramma di Venn*, i seguenti insiemi:

a) $\mathbb{N}=\{numeri\ naturali\}=\{0,1,2,3,4,5,...\}$
$\mathrm{A}=\{numeri\ \ pari\}$
$\mathrm{B}=\{numeri\ dispari\}$
$\mathrm{C}=\{multipli\ di\ 5\}$

b) $\mathrm{A}=\{numeri\ naturali\ da\ 0\ a\ 12\}$
$\mathrm{B}=\{numeri\ \ pari\ dell'insieme\ A\}$
$\mathrm{C}=\{numeri\ dispari\ dell'insieme\ A\}$
$\mathrm{D}=\{multipli\ di\ 3\ dell'insieme\ A\}$
$\mathrm{E}=\{multipli\ di\ 4\ dell'insieme\ A\}$

c) $\mathbb{N}=\{numeri\ naturali\}$ $\mathrm{A}=\{numeri\ \ pari\}$
$\mathrm{B}=\{numeri\ dispari\}$ $\mathrm{C}=\{multipli\ di\ 5\}$
$\mathrm{D}=\{multipli\ di\ 10\}$ $\mathrm{E}=\{multipli\ di\ 15\}$

d) $\mathrm{A}=\{multipli\ di\ 3\}$
$\mathrm{B}=\{multipli\ di\ 4\}$
$\mathrm{C}=\{multipli\ di\ 6\}$
$\mathrm{D}=\{multipli\ di\ 12\}$

8) Tenendo presente la differenza fra cerchio e circonferenza
(il cerchio è una superficie, la circonferenza è una linea, che fa da "contorno" al cerchio)
e quella (analoga) fra sfera e superficie sferica,
stabilisci qual è l'intersezione fra le seguenti coppie di insiemi:

a) due circonferenze complanari e concentriche, di raggio diverso
b) due cerchi complanari e concentrici, di raggio diverso
c) due superfici sferiche concentriche di raggio diverso
d) due sfere concentriche di raggio diverso
e) una sfera e un piano passante per il suo centro
f) una superficie sferica e un piano passante per il suo centro
g) una sfera e una retta passante per il suo centro
h) una superficie sferica e una retta passante per il suo centro

9) Indichiamo con A un insieme qualsiasi. Allora $\mathrm{A}\cap\varnothing=...$ $\mathrm{A}\cup\varnothing=...$

10) Se $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$ e $\mathrm{B}\subseteq\mathrm{C}$, allora $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=...$ $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=...$

11) Su di un piano π è dato un punto P.

a) Qual è l'unione di tutte le rette del piano passanti per P?
(NOTA: osserviamo che si tratta dell'unione di INFINITI insiemi)

b) Qual è l'intersezione di tali infinite rette?

12) In un collegio femminile, le attività sportive pomeridiane proposte sono pallavolo e nuoto.
Ogni ragazza deve praticare almeno una di queste attività.

a) Se l'80% delle ragazze fa pallavolo, il 50% nuoto, e 75 ragazze entrambi gli sport,
quante sono in totale le ragazze iscritte al collegio?

b) Nel caso non fosse stata scritta la frase
"Ogni ragazza deve praticare almeno una di queste attività",
quale sarebbe stata la risposta al problema?

11. DIFFERENZA DI DUE INSIEMI

Dati due insiemi A e B, si dice "differenza" fra A e B
(presi in quest'ordine: prima A e poi B), e si indica con $\mathbf{A-B}$,
l'insieme i cui elementi sono quegli elementi di A, che NON appartengono anche a B.

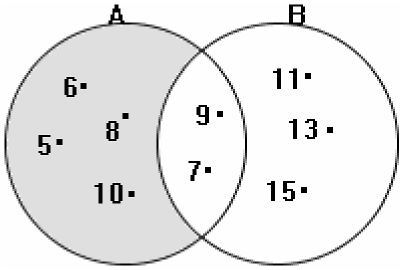
Esempi:

a) Se

$A=\{5,6,7,8,9,10\}$
$B=\{7,9,11,13,15\}$

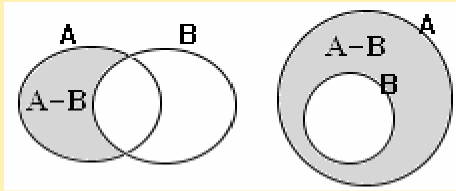
allora

$A-B=\{5,6,8,10\}$



Nei diagrammi di Venn
qui sotto riportati,
è ombreggiato l'insieme $A-B$.

In pratica, $\mathbf{A-B}$ **si ottiene**
partendo da A
e togliendo da A
gli elementi (se ce ne sono)
che appartengono anche a B



b) Se

$A=\{numeri\ \ pari\}$,
$B=\{numeri\ \ dispari\}$

allora $A-B=\{numeri\ \ pari\}$.
In generale,
se $A\cap B=\varnothing$, allora $A-B=A$

c) Se con A si indica
un insieme qualsiasi,
è:

$A-\varnothing=A;$
$A-A=\varnothing;$
$\varnothing-A=\varnothing.$

12. INSIEME "UNIVERSO" (O "INSIEME AMBIENTE"). UN'ALTRA OPERAZIONE INSIEMISTICA: LA "COMPLEMENTAZIONE"

Molto sovente capita al matematico di dover lavorare con insiemi
che sono tutti inclusi in uno stesso "grande" insieme U.

Ad esempio, se si fa della geometria piana e si è interessati
allo studio delle figure geometriche "viste" come insiemi di punti, è chiaro che
si continuerà sempre a lavorare all'interno di un certo piano π e "non si uscirà mai da tale piano",
nel senso che gli insiemi con cui si trafficherà saranno sempre e soltanto dei sottoinsiemi di π.

Ancora: studiando i numeri naturali, ci si imbatte in insiemi
(l'insieme dei numeri pari, quello dei numeri primi, quello dei multipli di 7, ecc. ecc.),
che sono tutti sottoinsiemi del "grande" insieme $\mathbb{N}$.

Si dice allora in questi casi che si lavora all'interno di un "insieme universo".
Cioè, l'insieme "vasto" che contiene tutti gli altri insiemi di cui momentaneamente
ci si vuole occupare, viene detto "**insieme universo**" (o "**insieme ambiente**").

Detto U un insieme universo, e A un suo sottoinsieme, l'insieme differenza $U-A$ viene anche detto "insieme complementare di A rispetto a U" e per indicarlo si può usare una soprallineatura:
$\mathbf{U-A=\overline{A}}$ = complementare di **A** (rispetto all'insieme $\mathbf{U}$, pensato come "insieme universo").

♥ **Si assomigliano (anzi, sono identici!) i due simboli di soprallineatura:**

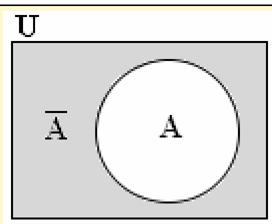
♪ quello che indica, in INSIEMISTICA, **COMPLEMENTAZIONE**
♫ e quello che indica, in LOGICA, **NEGAZIONE**.

In effetti il COMPLEMENTARE di un insieme A è l'insieme formato
da quegli elementi dell'insieme universo che NON appartengono ad A.

INSIEMI	LOGICA
$\cap$	$\wedge$
$\cup$	$\vee$
$\overline{}$	$\overline{}$

Preferibilmente, l'insieme che fa da **insieme universo** in un determinato contesto
viene rappresentato con un **rettangolo** anziché con un ovale.

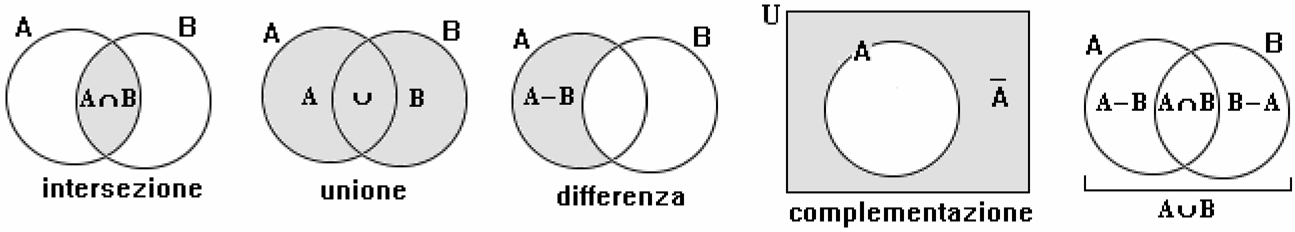
Nel diagramma di Venn qui a fianco, compaiono:
un insieme A, "immerso" nell' **insieme universo** U,
e il **complementare** di A, ombreggiato.



ESERCIZI (risposte a pag. 99)

1) Qual è il complementare dell'insieme dei numeri dispari, se come insieme ambiente si assume $\mathbb{N}$?
2) Qual è il complementare dell'insieme dei numeri dispari, se come insieme ambiente si assume $\mathbb{N}^*$?
3) $\mathbb{N}-\{0\}=?$

13. FIGURE RIASSUNTIVE



14. PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI INSIEMISTICHE

E' possibile (anzi, è un ottimo e divertente esercizio) **dimostrarle tramite i diagrammi di Venn**.
Particolarmente importanti sono le seguenti.

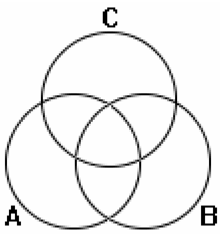
La proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione: $\boxed{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

Tratteggia A
con tratto ascendente

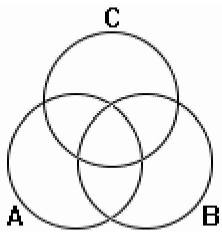
poi $B\cup C$
con tratto discendente

Il territorio tratteggiato
PER DUE VOLTE
sarà $A\cap(B\cup C)$

Evidenziamo
l'insieme
$A\cap(B\cup C)$



Evidenziamo
l'insieme
$(A\cap B)\cup(A\cap C)$



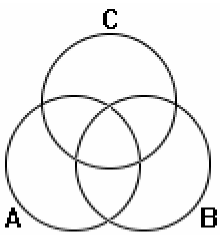
Tratteggia $A\cap B$
con tratto ascendente

poi $A\cap C$
con tratto discendente

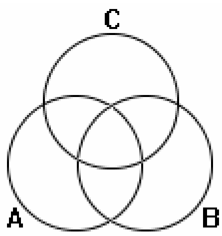
Il territorio tratteggiato
ALMENO UNA VOLTA
sarà $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

La proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione: $\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

Vai
coi →
tratteggi!
↓



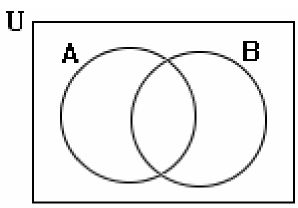
$A\cup(B\cap C)$



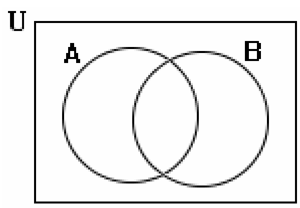
$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Le due LEGGI DI DE MORGAN:

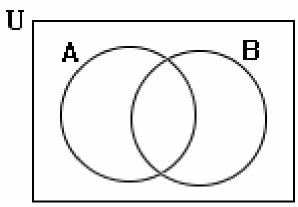
$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\end{array}}$$



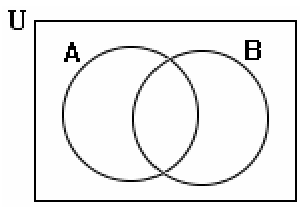
$\overline{A\cap B}$



$\overline{A}\cup\overline{B}$



$\overline{A\cup B}$



$\overline{A}\cap\overline{B}$

♥ **Le due leggi di De Morgan sono**
IMPORTANTISSIME
e possono essere confrontate con
LE ANALOGHE IN LOGICA:

$$\boxed{\overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}\qquad \overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}}$$

Distinguiamo bene, però:
nelle leggi di De Morgan per la Logica,

- *non* si hanno *insiemi* ma PROPOSIZIONI
  e *non* si hanno operazioni *insiemistiche*
  bensì operazioni LOGICHE;
  e in particolare, il simbolo di soprallineatura
  non ha il significato di "complementazione"
  bensì di "negazione";
- inoltre il simbolo "=" *non* va letto "*uguale*",
  ma "LOGICAMENTE EQUIVALENTE".

Il legame fra operazioni insiemistiche
e connettivi logici
è approfondito a pag. 358.

15. INSIEMI INFINITI

Quando abbiamo introdotto il concetto di “numero intero”, abbiamo scritto così:

“si dice «numero intero» quell’entità astratta, quel «quid», che è comune a tutti gli insiemi, i quali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un insieme dato (PURCHE’ QUESTO NON SIA INFINITO)”.

Ma **cosa vuol dire, per un insieme, “essere infinito”?**
Facciamo alcuni esempi e controesempi.

- *I multipli di 5 (ossia i numeri 5, 10, 15, 20, …) costituiscono un insieme **infinito**.*
- *Una retta è un insieme **infinito** di punti.*
- *Invece l’insieme degli abitanti della Cina **non** è infinito.
Allo stesso modo, l’insieme i cui elementi sono gli atomi di ferro della Tour Eiffel di Parigi è formato da un numero colossale, ma pur sempre finito, di elementi.*

Come possiamo, dunque, spiegare in astratto cosa si intende per “insieme infinito” ?

Un modo “ingenuo” sarebbe di scrivere che un insieme si dice:
- “finito”, se i suoi elementi si possono contare esaurendo l'operazione del contare;
- “infinito”, in caso contrario.

Il guaio è che così, a ben guardare, entreremmo in un “**circolo vizioso**”!
Infatti, se per definire cosa si intenda per “numero intero”
io devo specificare che l’insieme di riferimento “non deve essere infinito”,
allora **il concetto di “insieme infinito” *deve essere già stato acquisito*,**
nel momento in cui si va a definire il concetto di “numero intero”:
non è dunque logicamente corretto pretendere di dar la definizione di “insieme infinito”
utilizzando il procedimento del “contare”, che invece presuppone
di avere già formulato ***in precedenza*** la definizione di “numero intero”!

Possiamo uscire, brillantemente, dalla situazione di stallo
ricorrendo al semplice ma potente strumento concettuale delle “corrispondenze biunivoche”
ANCHE per dare la definizione di “insieme infinito”.

Già Galileo Galilei (1564-1642) si accorse di una curiosissima, sorprendente situazione
(“**paradosso di Galileo**”):
- **l’insieme A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …} dei naturali non nulli**
- **e l’insieme B = {2, 4, 6, 8, 10, …} dei naturali non nulli pari,
il quale è soltanto una parte di A, è solo un “pezzo” di A e non “riempie” tutto A,**

possono essere messi in corrispondenza biunivoca fra loro!

Certo: basta far corrispondere ad ogni elemento di A il suo doppio,
e inversamente ad ogni elemento di B la sua metà, e il gioco è fatto!

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
B	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...

Ad ogni “asola” dell’insieme A corrisponde uno e un solo “bottone” dell’insieme B, e viceversa:
quindi effettivamente la corrispondenza è **biunivoca**.

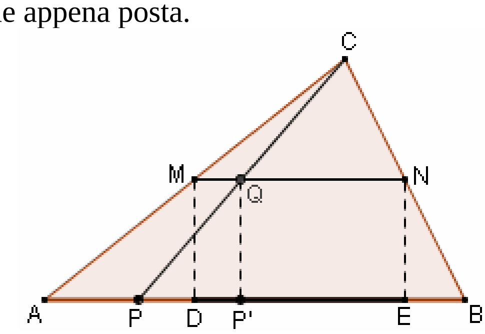
Il fatto che A e B si possano porre in corrispondenza biunivoca tra loro ci dice che in qualche modo
(tante asole, altrettanti bottoni) gli elementi di B sono “*tanti quanti* gli elementi di A”.
Eppure B è ottenibile prendendo A e *togliendogli* degli elementi! Insomma,
se partiamo da A e gli togliamo degli elementi (i numeri dispari), la “numerosità” di A non cambia!!!

**Ma è proprio questo fatto così bizzarro, l’esistenza di insiemi
i quali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con un “pezzo” di sé stessi,
che può essere sfruttato per dare una “caratterizzazione” degli insiemi infiniti,
voglio dire: per stabilire un criterio che permetta di distinguere
gli insiemi infiniti dagli altri che infiniti non sono.**

DEFINIZIONE

**Un INSIEME si dice “INFINITO”
se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua “parte propria”,
cioè con un suo sottoinsieme, che non “riempie” tutto l’insieme di partenza.**

Facciamo un altro esempio.
Sia $\overline{AB}$ un segmento, pensato come l'insieme dei suoi punti.
Faremo vedere che $\overline{AB}$ è un insieme infinito, secondo la definizione appena posta.
Possiamo procedere, ad esempio, così:
costruiamo un triangolo ABC che abbia $\overline{AB}$ come lato.
Siano M, N i punti medi dei lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$,
e sia $\overline{DE}$ il segmento avente per estremi i punti ottenuti
calando da M e da N le perpendicolari su $\overline{AB}$.
Bene!
Faremo ora vedere che l'intero segmento $\overline{AB}$
si può mettere in corrispondenza biunivoca con il segmento $\overline{DE}$,
che costituisce soltanto un "pezzo" di $\overline{AB}$. Infatti:
sia P un qualsiasi punto di $\overline{AB}$;



congiungiamo P con C, e indichiamo con Q il punto in cui tale congiungente taglia $\overline{MN}$;
caliamo da Q la perpendicolare ad $\overline{AB}$ fino ad incontrare $\overline{AB}$ in P'.
OK, diremo che al punto P (che sta sul segmento $\overline{AB}$) corrisponde il punto P' appartenente a $\overline{DE}$; e che, viceversa, al punto P' corrisponde P (se si parte da P' si può ritornare a P alzando la perpendicolare ad $\overline{AB}$ fino a incontrare $\overline{MN}$ in Q, poi congiungendo C con Q e prolungando $\overline{CQ}$ fino a raggiungere $\overline{AB}$).

Sei convinto che in questo modo resta stabilita una corrispondenza biunivoca tra $\overline{AB}$, pensato come l'insieme dei suoi punti, e $\overline{DE}$, che è soltanto una "parte propria" di $\overline{AB}$?
Controlla bene che effettivamente è così, prendendo P in varie posizioni su $\overline{AB}$ e constatando che il procedimento grafico indicato porta sempre ad "abbinare" a P uno e un solo punto P', appartenente a $\overline{DE}$; prendi poi P' in varie posizioni su $\overline{DE}$ e verifica che il procedimento grafico inverso permette di risalire ad uno e un solo punto P, appartenente ad $\overline{AB}$.

Dunque il segmento $\overline{AB}$ è un insieme infinito,
perché, come abbiamo fatto vedere, può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

Ricapitoliamo, e riordiniamo le idee.

- **Un insieme si dice "infinito" se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua "parte propria", cioè con un suo sottoinsieme, che non "riempie" tutto l'insieme di partenza.**
- **Si dice "numero intero" quell'entità astratta, quel "quid", che è comune a tutti gli insiemi, i quali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un insieme dato (purché questo non sia infinito).**

GRADI DI INFINITO SEMPRE PIU' ALTI

A questo punto è abbastanza istintivo essere indotti a pensare che, presi due qualsiasi insiemi infiniti, questi si possano *certamente* mettere in corrispondenza biunivoca fra loro, e quindi che, così come i due insiemi {Nord, Sud, Est, Ovest} e {Primavera, Estate, Autunno, Inverno}, per il fatto di poter essere posti in corrispondenza biunivoca tra loro, hanno in comune una certa entità astratta (quella che chiamiamo "il numero 4"), allo stesso modo anche due qualsiasi insiemi infiniti siano accomunati da una analoga entità astratta, il "numero infinito".

Sorpresa! Si può dimostrare che **non è così**.
Ad esempio, si può dimostrare che l'insieme i cui elementi sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …
NON PUO' IN ALCUN MODO essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme i cui elementi sono "tutti i numeri assoluti, sia interi che con la virgola (finiti, periodici, illimitati non periodici)".
Quest'ultimo insieme, l' insieme dei numeri reali assoluti (= senza segno),
è dunque "*più numeroso*" dell'insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …};
ha "*un grado di infinito maggiore*" rispetto ad esso.

Studi più approfonditi mostrerebbero che esistono insiemi i quali hanno, a loro volta, un "grado di infinito" ancora maggiore di quello dell'insieme dei numeri reali assoluti; e anzi che

dato un "grado di infinito", ne esiste sempre uno ancora maggiore,
dunque
"esistono infiniti gradi di infinito".

Di queste affascinanti tematiche fu pioniere e acuto esploratore il danese **Georg Cantor** (1845-1918).

Se interessato, puoi trovare la appassionante trattazione dei "gradi di infinito" cliccando qui ⇨
oppure andando a leggere l'apposito capitolo del Volume 2 .

16. ESERCIZI VARI SUGLI INSIEMI (risposte a pag. 95)

1) Sia $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{3, 4, 5, 6\}$. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

a) $2\in X\cap Y$ b) $2\in Y-X$ c) $4\subseteq X\cap Y$ d) $\{4\}\subseteq X\cap Y$ e) $\varnothing\in P(X)$ f) $\{2,3,4\}\supseteq\{4,3\}$

g) $\varnothing\subseteq X$ h) $\varnothing\subset X$ i) $\{1, 2, 3, 4\}\subseteq X$ l) $\{1, 2, 3, 4\}\subset X$ m) $X\subseteq X$ n) $X\subset X$

2) Quando definiamo un insieme, è essenziale che la nostra definizione sia chiara ed univoca, in modo che non ci possano essere ambiguità di interpretazione … in modo, insomma, che di fronte a un elemento, tutti possano essere concordi nello stabilire se appartiene o no a quell'insieme.
Ciò premesso, quali fra le seguenti sono definizioni corrette?
A) L'insieme dei grandi fiumi europei B) L'insieme degli studenti pigri delle scuole superiori di Roma
C) L'insieme delle persone di cittadinanza italiana D) L'insieme delle persone che pesano più di 70 kg

3) Rappresenta *in un unico* diagramma di Venn l'insieme A dei multipli di 6 e l'insieme B dei multipli di 8, all'interno dell'*insieme ambiente* $\mathbb{N}^*$.
Riconosci poi, nel diagramma, i seguenti insiemi: $A\cap B$; $A\cup B$; $A-B$; $B-A$; $\overline{A\cup B}$.
Definisci infine ciascuno di tali insiemi
a) per elencazione b) mediante una proprietà caratteristica degli elementi.

4) Definisci *per elencazione* i seguenti insiemi:

$A=\{2k,\ con\ k\in\mathbb{N}^*\}$ $B=\{2k,\ con\ k\in\mathbb{N}\}$ $C=\{2^k,\ con\ k\in\mathbb{N}\}$ $D=\{2k+1,\ con\ k\in\mathbb{N}\}$

$E=\{2n-1,\ con\ n\in\mathbb{N}^*\}$ $F=\left\{\dfrac{k+1}{k^2},\ con\ k\in\mathbb{N}^*\right\}$ $G=\{3^{n+1}-3^n,\ con\ n\in\mathbb{N}\}$ $H=\{i\cdot 2^{i+1},\ con\ i\in\mathbb{N}\}$

5) Nel quesito precedente si chiedeva di passare da una definizione in simboli ad una per elencazione.
Fai ora *il viceversa,* per gli insiemi che seguono (l'insieme in cui varia la lettera dovrà essere $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^*$):

$A=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, ...\}$ $B=\{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...\}$ $C=\{5, 15, 25, 35, 45, ...\}$

$D=\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, ...\right\}$ $E=\left\{1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \dfrac{1}{36}, ...\right\}$ $F=\{2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ 50,\ 65,\ 82,\ 101, ...\}$

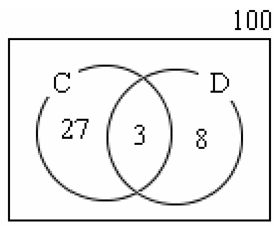
6) Stabilisci quale dev'essere, secondo logica, il numero successivo nella sequenza:
a) 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... b) 23, 19, 15, 11, 7, 3, ... c) 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, … d) 2, 4, 8, 16, 32, …
e) 1, 8, 27, 64, 125, … f) 2, 6, 18, 54, 162, … g) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … h) 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, …

7) Sia $X=\{l, m, n, o\}$, $Y=\{l, m, n, o, p, q\}$, $W=\{g, h, i, l, m\}$. Definisci *per elencazione*:

$X-W$ $X\cup W$ $X\cap W$ $X\cap Y$ $X\cup Y$ $(X-W)\cup(W-X)$ $(X\cup W)-(X\cap W)$

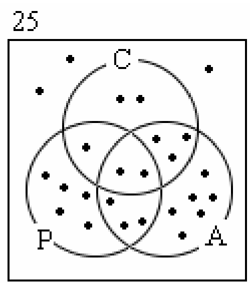
8) Un intero *n* si dice "abbondante" se la somma dei suoi divisori, comprendendo l'unità ma escludendo il numero stesso, va a superare *n*. Ad esempio, il numero 12 è "abbondante" perché i suoi divisori diversi dal numero stesso sono: 1, 2, 3, 4 e 6, e si ha $1+2+3+4+6>12$.
Definisci per elencazione l'insieme $H=\{numeri\ abbondanti\ non\ superiori\ a\ 20\}$.

9) Un barista si diverte a fare una statistica riguardo alle abitudini dei clienti che ordinano un caffè, e riassume le sue osservazioni su un campione di 100 ordinazioni nel diagramma di Venn qui a fianco riportato.



a) Quanti hanno ordinato un caffè Corretto?
b) Quanti hanno scelto il Dolcificante (anziché lo zucchero)?
c) Quanti hanno voluto un caffè Corretto, col Dolcificante?
d) Quanti un caffè col dolcificante, non corretto?

10) Osservando il diagramma di Venn, che si riferisce all'iscrizione ai 3 gruppi sportivi disponibili (Calcio, Pallavolo, Atletica) degli allievi di una classe di Liceo, rispondi alle domande che seguono.

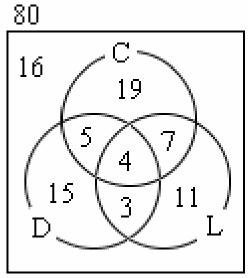


a) Quanti ragazzi praticano almeno il calcio?
b) Quanti ragazzi praticano almeno 1 sport?
c) Quanti non ne praticano nessuno?
d) Qual è la percentuale di ragazzi che praticano almeno 1 sport?
e) Quanti ragazzi praticano 1 solo sport?
f) Quanti ragazzi praticano esattamente 2 sport?
g) Quanti praticano almeno 2 sport?
h) Quanti praticano Atletica, ma non Calcio né Pallavolo?
i) Quanti praticano sia Calcio che Pallavolo, ma non Atletica?

11) A 80 adulti viene domandato se sono Coniugati, se hanno la Laurea, se sono attualmente Disoccupati.
Sentite le risposte, si compila il diagramma di Venn qui riportato.

I) Quante fra queste persone
   a) non sono sposate?
   b) hanno la laurea ma sono disoccupate?
   c) non hanno la laurea e sono disoccupate?
   d) sono disoccupate ma non sposate?
   e) hanno una laurea o un lavoro?

II) a) Fra i laureati, qual è la percentuale di disoccupati?
   b) E fra i non laureati?
   c) Fra i laureati sposati, qual è la percentuale di disoccupati?

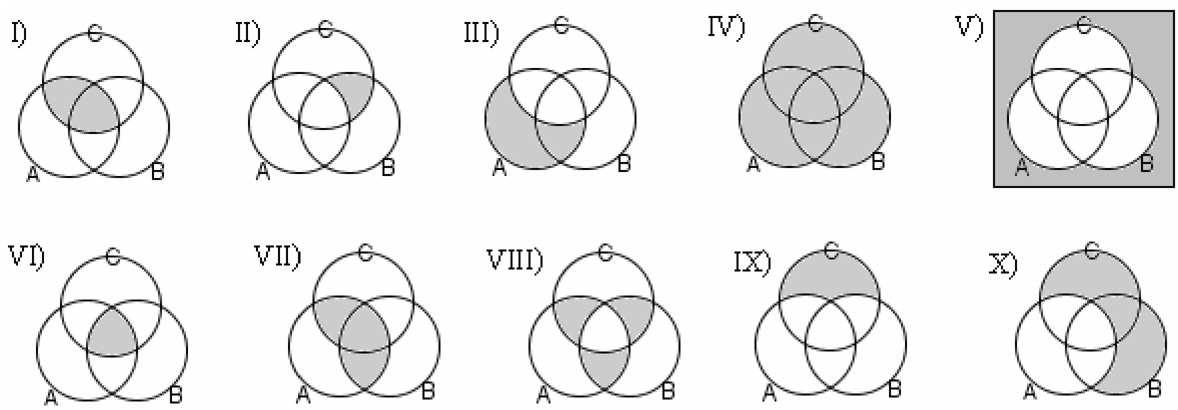


12) Riempi i puntini (A e B indicano due insiemi qualsiasi; aiutati con i diagrammi di Venn):
$(A-B)\cap(A\cap B)=...$ $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=...$ $A-(A\cap B)=...$ $(A\cup B)-B=...$

13) Sia $F\subseteq G$, $G\subseteq H$. Riempi i puntini: $(H-G)\cap F=...$ $(H-F)\cup G=...$

14) E' vero che se $X\cap Y=X$, allora $X\subseteq Y$?

15) Scrivi l'operazione insiemistica che produce come risultato l'insieme ombreggiato, in ciascuno dei casi.



16) Scrivi l'insieme il cui insieme delle parti è $\{\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}\}$

17) Quanti elementi ha un insieme, il cui insieme delle parti contiene a) 1000 elementi? b) 1024 elementi?

18) Analizza la differenza fra le scritture 0, $\{0\}$, $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

19) Cosa accomuna l'insieme degli uccelli con 10 ali e l'insieme dei triangoli equilateri ottusangoli?

20) Se un insieme A ha 8 elementi e un altro insieme B ne ha 15,
cosa si può affermare con certezza riguardo al numero di elementi di
$A\cap B$? $A\cup B$? $A-B$? $B-A$?

La rappresentazione tramite i diagrammi di Venn si rivela a volte utilissima per risolvere senza grande fatica determinati problemi. Ecco alcuni esempi.

21) Se 50 allievi di una Scuola Superiore si sono iscritti al corso pomeridiano facoltativo di Francese, 40 a quello di Spagnolo, e fra questi 18 risultano iscritti a entrambi i corsi, si domanda: quanti impareranno solo Francese, quanti solo Spagnolo, quanti almeno una delle due lingue.

22) Un'indagine su un campione di 200 famiglie rivela che 53 di queste hanno (almeno) un cane, 38 (almeno) un gatto. Soltanto 8 delle famiglie che hanno uno o più gatti ospitano anche uno o più cani. E quante di queste famiglie non posseggono né cani né gatti? Quante almeno un cane o almeno un gatto?

23) Ognuno degli 80 concorrenti a un posto di lavoro ha studiato almeno una fra le due lingue Inglese e Francese. Sapendo che 72 dichiarano di aver studiato Inglese e 32 Francese, cosa si può dire riguardo al numero di quelli che hanno studiato entrambe le lingue?

24) In una scuola superiore europea ci sono 100 studenti. 15 sono iscritti soltanto al corso di Tedesco;
fra tutti gli iscritti al corso di Tedesco 21 non imparano il Francese;
9 risultano iscritti sia a Tedesco che a Inglese, 22 sia a Francese che a Inglese.
In totale, imparano il Tedesco 30 studenti, l'Inglese 49 studenti, il Francese 55 studenti.
Si chiede: quanti alunni non imparano alcuna lingua? Quanti una sola? Quanti tutte e tre?

25) In una classe di scuola elementare la maestra parla delle malattie dei bambini.
Da un'indagine fra i 25 scolaretti, emerge che tutti, ma proprio tutti, hanno avuto o il morbillo, o la scarlattina, o la varicella; 1 bambino anzi ha avuto tutte e tre le patologie, 4 sia il morbillo che la scarlattina ma non la varicella, altri 3 sia il morbillo che la varicella ma non la scarlattina.
Se in 14 hanno avuto il morbillo, in 13 la scarlattina, e in 12 la varicella, si può dedurre, con questi dati, il numero di quelli che hanno fatto la scarlattina e la varicella ma non il morbillo?

26) I 30 studenti di una classe di Liceo discutono, in una Assemblea di Classe, sui cattivi risultati in Inglese riportati nelle pagelle quadrimestrali. In effetti, soltanto 12 fra gli studenti hanno avuto la sufficienza sia in scritto che in orale, mentre ben 15 hanno avuto l'insufficienza di scritto e 11 l'insufficienza in orale. Si domanda quanti sono risultati insufficienti sia in scritto che in orale.

27) Da www.mathocean.com:
Oshkosh did a study of the colors used in African national flags. He found that 38 flags have red, 20 have blue, 13 have both red and blue, and 8 have neither red nor blue.
How many flags a) have red but not blue? b) have blue but not red? c) were included in the study?

28) British Columbia Secondary School Mathematics Contest, 2008
Examinations in each of three subjects, Anatomy, Biology, and Chemistry, were taken by a group of 41 students. The following table shows how many students failed in each subject, as well as in the various combinations:

subject	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
# failed	12	5	8	2	6	3	1

(For instance, 5 students failed in Biology, among whom there were 3 who failed both Biology and Chemistry, and just 1 of the 3 who failed all three subjects).
The number of students who passed all three subjects is: A) 4 B) 16 C) 21 D) 24 E) 26

29) Siano r ed r' due rette (pensate ciascuna come un insieme di punti); stanno su di uno stesso piano e non sono parallele. Sia P il punto in cui tali due rette si tagliano. E' corretto scrivere che $r \cap r' = \text{P}$?

30) Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo. Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni?
A) 6 B) 9 C) 13 D) 16 E) 22 (Test di Ingresso alla Facoltà a numero chiuso di Architettura, 2008)

31) In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza.
Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:
A) $\text{N} < 14$ B) $\text{N} \geq 14$ C) $\text{N} > 14$ D) $\text{N} = 22$ E) $\text{N} > 22$ (Test di Ingresso a Medicina, 2008)

32) In una classe si è formata una squadra di nuoto e una squadra di tennis.
Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
A) Il miglior nuotatore fra i tennisti è anche il miglior tennista fra i nuotatori
B) Se il più bravo tra i nuotatori non gioca a tennis, anche il più bravo tra i tennisti non nuota
C) Il più giovane fra i nuotatori che giocano a tennis è anche il più giovane dei tennisti che nuotano
D) Se il più vecchio tra i tennisti non nuota, allora il più vecchio tra i nuotatori non gioca a tennis
E) Il peggior nuotatore tra i tennisti è il miglior tennista tra i nuotatori
(Politecnico di Torino)

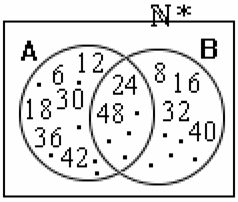
33) Kangourou 2004
Jean-Michel ha raccolto 30 funghi di due tipi: gallinacci e porcini.
Se prende a caso 12 funghi, ci sarà almeno un gallinaccio fra di essi; se ne prende a caso 20, fra questi si avrà almeno un porcino.
Quanti gallinacci ha raccolto Jean-Michel?
A) 11 B) 12 C) 19 D) 20 E) 29

34) Immaginiamo di suddividere tutte le persone che hanno vissuto o vivono tuttora su questa Terra in due insiemi: mettiamo nell'insieme A tutti quelli che, nella loro vita se sono già morti o fino a questo istante se ancora viventi, hanno stretto la mano ad altre persone un numero pari di volte, oppure nessuna volta; mettiamo nell'insieme B tutti quelli che, nella loro vita se sono già morti o fino a questo istante se ancora viventi, hanno stretto la mano ad altre persone un numero dispari di volte.
Dimostra che l'insieme B è costituito da un numero pari di persone.
(*Rielaborato da "The USSR Olympiad Problem Book" di Shklarsky, Chentzov, Yaglom, Irving*)

RISPOSTE AGLI “ESERCIZI VARI SUGLI INSIEMI”

1) a) F b) F c) F d) V e) V f) V g) V h) V i) V l) V m) V n) F

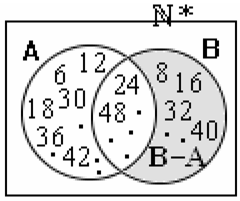
2) A) No B) No C) Sì D) Mah … Non sembra sufficientemente chiara! Specifichiamo almeno: vestiti o nudi?

3) 

$A \cap B = \{24,\ 48,\ 72,\ 96,\ \ldots\ \} = \{multipli\ di\ 24\}$

$A \cup B = \{6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 30,\ 32,\ 36,\ 40,\ \ldots\ \} =$
$= \{numeri\ che\ sono\ multipli\ o\ di\ 6\ o\ di\ 8\}$

$A - B = \{6, 12, 18, 30, 36, 42, 54\ \ldots\ \} = \{mult.\ di\ 6\ ma\ non\ di\ 8\}$



Nella figura a destra: $B - A = \{8, 16, 32, 40, 56, 64, 80\ \ldots\ \} = \{mult.\ di\ 8\ ma\ non\ di\ 6\}$

$\overline{A \cup B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, \ldots\ \} = \{num.\ nat.\ non\ nulli\ che\ non\ sono\ mult.\ né\ di\ 6\ né\ di\ 8\}$

4) $A = \{2,4,6,8,10,\ldots\}$ $B = \{0,2,4,6,8,10,\ldots\}$ $C = \{1,2,4,8,16,32,\ldots\}$ $D = \{1,3,5,7,9,11,\ldots\}$
$E = \{1,3,5,7,9,11,\ldots\} = D$ $F = \left\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, \ldots\right\}$ $G = \{2,6,18,54,162,\ldots\}$ $H = \{0,4,16,48,128,320,\ldots\}$

5) $A = \{5n, n \in \mathbb{N}^*\}$ $B = \{5n, n \in \mathbb{N}\}$ $C = \{5(2n+1), n \in \mathbb{N}\}$ $D = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ $E = \left\{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $F = \{n^2+1, n \in \mathbb{N}^*\}$

6) a) 19 b) −1 c) 28 d) 64 e) 216 f) 486 g) 34 (somma dei due precedenti) h) 8192 (prodotto dei due prec.)

7) $X - W = \{n, o\}$ $X \cup W = \{l, m, n, o, g, h, i\}$ $X \cap W = \{l, m\}$
$X \cap Y = \{l, m, n, o\} = X$ $X \cup Y = \{l, m, n, o, p, q\} = Y$
$\left.\begin{array}{l}(X - W) \cup (W - X) = \{n, o\} \cup \{g, h, i\} = \{n, o, g, h, i\} \\ (X \cup W) - (X \cap W) = \{l, m, n, o, g, h, i\} - \{l, m\} = \{n, o, g, h, i\}\end{array}\right]$ (*)

(*) In generale (dimostralo coi diagrammi di Venn!), per QUALUNQUE coppia di insiemi A, B, è SEMPRE $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

8) $H = \{12, 18, 20\}$ 9) a) 30 b) 11 c) 3 d) 8 10) a) 8 b) 22 c) 3 d) 88% e) 13 f) 7 g) 9 h) 6 i) 1

11) I) a) 45 b) 7 c) 20 d) 18 e) 60 II) a) 28% b) ≈ 36% c) ≈ 36%

12) $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$; $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$; $A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = A - B$

13) $(H - G) \cap F = \varnothing$; $(H - F) \cup G = H$

14) Sì, è vero. Se $X \cap Y = X$, vuol dire che gli elementi comuni a X e a Y sono tutti gli elementi di X, quindi che tutti gli elementi di X appartengono anche a Y. E ciò significa che X è un sottoinsieme di Y.

15) I) $A \cap C$ II) $(B \cap C) - A = (C - A) \cap B$ III) $A - C$ IV) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C) = A \cup B \cup C$
V) $\overline{A \cup B \cup C}$ VI) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = B \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$ VII) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$
VIII) $\left[(A \cap B) - C\right] \cup \left[(A \cap C) - B\right] \cup \left[(B \cap C) - A\right]$ oppure ... IX) $C - (A \cup B)$ X) $(B \cup C) - A$

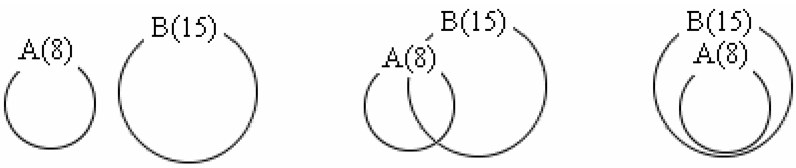
16) La risposta corretta è: “non esiste”. Infatti, verrebbe la tentazione di rispondere che l’insieme di partenza è $\{1, 3, 5\}$, sennonché ogni insieme delle parti contiene sempre anche l’insieme vuoto, che invece qui non c’è!

17) a) Impossibile: il numero 1000 non è una potenza di 2 b) 10 ($1024 = 2^{10}$)

18) 0 indica un numero, $\{0\}$ indica l’insieme unitario il cui unico elemento è il numero 0,
$\varnothing$ indica l’insieme vuoto, $\{\varnothing\}$ indica un strano insieme unitario il cui unico elemento è l’insieme vuoto

19) Si identificano, sono lo stesso insieme: l’insieme vuoto

20) Con certezza possiamo dire solo che:
$A \cap B$ può avere da 0 a 8 elementi; $A \cup B$ da 15 a 23; $A - B$ da 0 a 8; $B - A$ da 7 a 15.
Te ne puoi render conto se rifletti sul fatto che le situazioni possibili sono quelle delle figure qui sotto.



21) Solo Francese: 32; solo Spagnolo: 22;
almeno una lingua: $32 + 18 + 22 = 72$

fig. 21)

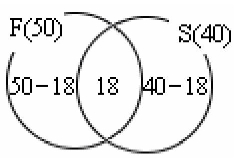
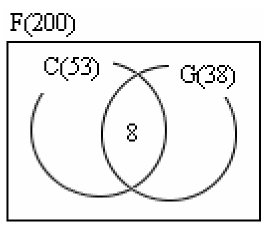
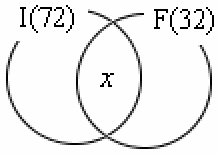


fig. 22)

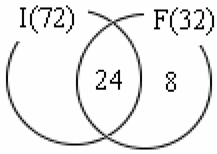


22) Né cani né gatti: 117;
almeno un cane o un gatto: 83

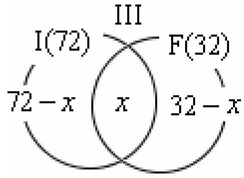
I



II



III



IV
$n(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) =$
$= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$

23) I) La situazione è quella rappresentata in figura, dove dobbiamo determinare il numero x degli elementi comuni. Osserviamo che se noi, per calcolare il numero di elementi di $\mathrm{I}\cup\mathrm{F}$, sommassimo 72 con 32, sbaglieremmo perché in questa somma 72+32 = 104 gli elementi comuni verrebbero contati 2 volte!
In effetti, il numero corretto degli elementi di $\mathrm{I}\cup\mathrm{F}$ è (come ci dice il testo) 80, per cui quei $104-80=24$ elementi in più che ci ritroviamo sono dovuti al fatto che abbiamo contato due volte, anziché una sola, gli elementi di $\mathrm{I}\cap\mathrm{F}$.
Ma allora $\mathrm{I}\cap\mathrm{F}$ ha, per l'appunto, 24 elementi.

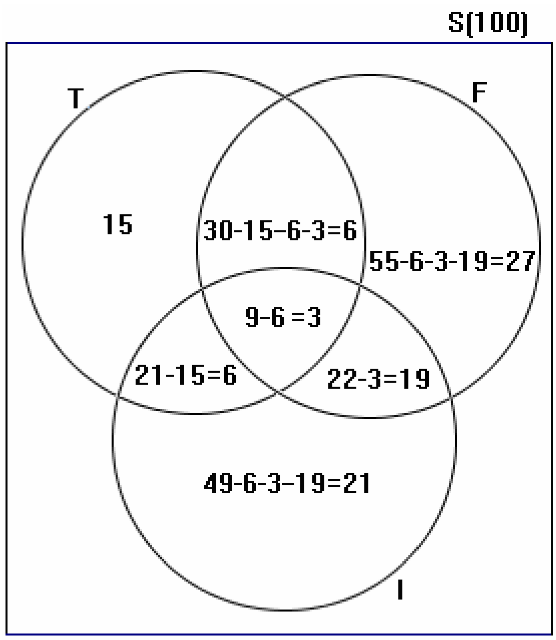
II) Oppure: in totale le persone coinvolte sono 80 … Dato che l'Inglese l'hanno studiato in 72, se ne deduce che il numero di coloro che NON l'hanno invece studiato sarà di $80-72=8$. Questi 8 avranno allora fatto Francese, considerando che ognuno degli 80 ha studiato almeno una delle due lingue. Ma in totale hanno studiato Francese 32 persone, quindi oltre a questi 8, i soli fra gli 80 che hanno fatto Francese ma non Inglese, ce ne saranno altri $32-8=24$ che avranno studiato, oltre a Francese, pure Inglese.

III) Anche con un'equazione: $72-x+x+32-x=80$ $[72+32-x=80]$ da cui $x=24$

IV) ♥ In generale (IMPORTANTE!) tramite considerazioni del tipo di quelle fatte sopra si trae che, per qualsiasi coppia di insiemi A, B aventi ciascuno un numero finito di elementi, si ha sempre $n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$
[leggi: il numero degli elementi di $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ è uguale a …]

24) Una lettura attenta del quesito porta a stabilire che i numeri degli studenti nei vari "territori" sono quelli indicati nella figura qui a fianco →
Dopodiché:

- gli studenti che non imparano nessuna lingua sono $100-(15+6+27+6+3+19+21)=100-97=3$
- gli studenti che imparano una sola lingua sono $15+27+21=63$
- gli studenti che imparano tutte e tre le lingue sono 3



25) 5 bambini hanno fatto la scarlattina e la varicella ma non il morbillo

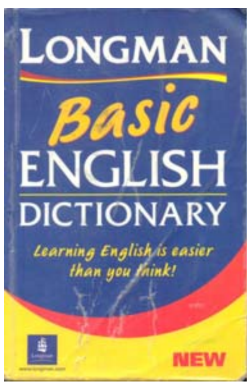
26) Sono risultati insufficienti sia in scritto che in orale in 8

27) a) 25 b) 7 c) 53 28) E

29) E' sostanzialmente corretto, ma formalmente non corretto. L'intersezione fra due insiemi è sempre ancora un insieme, non un elemento. Quindi la scrittura esatta è $r\cap r'=\{\mathrm{P}\}$: l'intersezione fra l'insieme r e l'insieme r' è l'insieme unitario, che ha come unico elemento il punto P. Tuttavia, anche la scrittura $r\cap r'=\mathrm{P}$ è accettata.

30) A 31) B 32) C 33) C 34) Ci hai pensato per bene? Davvero? Allora clicca sulla freccia per la correzione ⇨

Dal sito
http://searchsecurity.techtarget.com
(in Inglese, "insieme" si dice "set")



SYMBOL	MEANING	EXAMPLE
$\{\ \}$	is a set	$S=\{4,5\}$
$\in$	is an element of	$s\in S$
$\notin$	is not an element of	$s\notin T$
$\subseteq$	is a subset of	$S\subseteq T$
$\subset$	is a proper subset of	$S\subset T$
$\cup$	union	$S\cup T$
$\cap$	intersection	$S\cap T$
$\varnothing$	the empty set	$\{2,3,4\}\cap\{5,6,7\}=\varnothing$

RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 81

1) $A=\{31,37,41,43,47,53,59\}$ $B=\{6,12,18,24,30,36,...\}$ $C=\{a,\ e,\ o\}$ $D=\{7\,?,16,25,34,43,52,61,70\}$.
Il quesito è ambiguo in quanto non è chiaro se il 7 debba appartenere o no all'insieme. Se da una parte con una sola cifra sembra non corretto parlare di "somma delle cifre", dall'altra non ha nemmeno torto chi ritiene spontaneo che, di fronte a una sola cifra, per "somma" si debba intendere quell'unica cifra.

2) $E=\{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80,\ 90,\ 100\}=\{\text{multipli di 10 minori o uguali a 100}\}=$
$=\{\text{multipli di 10 minori di 101}\}=\{\text{multipli di 10 fino a 100 compreso}\}=\{\text{primi dieci multipli di 10}\}=...$

$F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ ...\right\}=\{\text{frazioni senza segno con numeratore uguale a 1}\}$
$G=\{1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ ...\}=\{\text{potenze di 3, a partire da quella con esponente 0}\}$
$H=\{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ ...\}=\{\text{quadrati dei numeri naturali}\}$
$I=\{\text{numeri naturali di tre cifre, le cui cifre siano numeri consecutivi in ordine crescente}\}$
$L=\{11,\ 33,\ 55,\ 77,\ 99,\ 121,\ 143,\ ...\}=\{\text{multipli dispari di 11}\}$

3) $D=\{n^3,\ \ n\in\mathbb{N}^*\}=\{1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ ...\}$ $E=\{3n,\ \ n\in\mathbb{N}^*\}=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ ...\}$
$F=\{\sqrt{x},\ \ x\in\mathbb{N}\}=\{0;\ 1;\ 1{,}4...;\ 1{,}7...;\ 2;\ 2{,}2...;\ 2{,}4...;\ 2{,}6...;\ 2{,}8...;\ 3;\ 3{,}1...;\ ...\}$

4) $G=\{5n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$ $H=\left\{\frac{1}{2^n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ $I=\left\{\frac{5^n-1}{5^n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

5) a) Una circonferenza, di centro quel punto e raggio 5 cm b) Un cerchio, di centro quel punto e raggio 5 cm
6) a) Una superficie sferica, di centro quel punto e raggio 5 cm b) Una sfera, di centro quel punto e raggio 5 cm
7) E' una corona circolare
8) E' una superficie cilindrica illimitata; è l'insieme dei punti che stanno su due piani, paralleli a quello fissato
9) Perché non è univoca: una ragazza che è considerata carina da una persona, potrebbe non esserlo per un'altra.

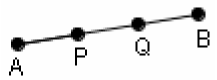
RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 82

1) Vuoto (due circonf. si dicono "concentriche" se hanno lo stesso centro); se però le due circonf., oltre ad avere lo stesso centro, avessero anche lo stesso raggio, allora TUTTI i punti di ciascuna di esse sarebbero comuni anche all'altra, e l'insieme dei punti comuni non sarebbe, in questo caso particolare, né unitario né vuoto.

2) Né unitario, né vuoto (i punti comuni sono due: gli estremi della corda).

3) Unitario (l'unico punto che gode di questa proprietà è il punto di mezzo, detto anche "punto medio", del segmento).

4) Né unitario, né vuoto (DUE punti godono di questa proprietà: vedi figura).



5) Unitario: l'unico suo elemento è il numero 2.

6) Vuoto. Tuttavia, in una definizione "estesa" di parallelismo, anche due rette coincidenti, sovrapposte, costituiscono un caso particolare di rette parallele.
In questo caso l'insieme dei punti comuni non sarebbe, evidentemente, né vuoto né unitario, perché conterrebbe tutti i punti delle due rette coincidenti considerate.

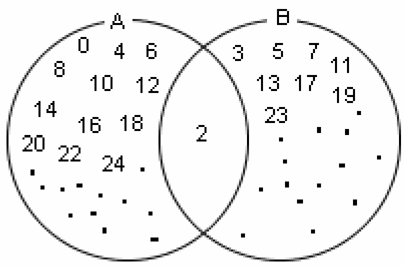
7) Di 16 elementi. Se $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ allora i sottoinsiemi di A, quindi gli elementi di $P(A)$, sono i seguenti:
$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ d\},\ \{b,\ c\},\ \{b,\ d\},\ \{c,\ d\},\ \{b,\ c,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\},\ \{a,\ b,\ d\},\ \{a,\ b,\ c\},\ A$

8) Dunque, vediamo … si può facilmente ricavare la tabella qui a fianco. Da essa sembra proprio che, se si indica con *n* il numero degli elementi di A, il numero degli elementi di P(A) sia 2^n.
In effetti, si potrebbe dimostrare che è proprio così, qualunque sia *n*.

Numero di elementi di A	Numero di elementi di P(A)
1	2
2	4
3	8
4	16

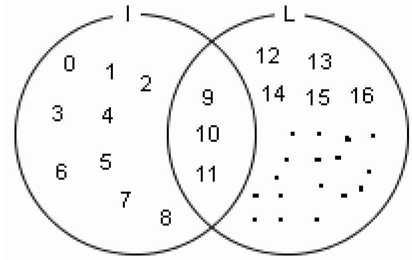
9) Sì, perché l'insieme vuoto $\varnothing$ contiene $n=0$ elementi, e l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso, quindi l'insieme $P(\varnothing)$ ha 1 solo elemento; ma è per l'appunto $2^0=1$.

RISPOSTE AGLI ESERCIZI DELLE PAGG. 86-87



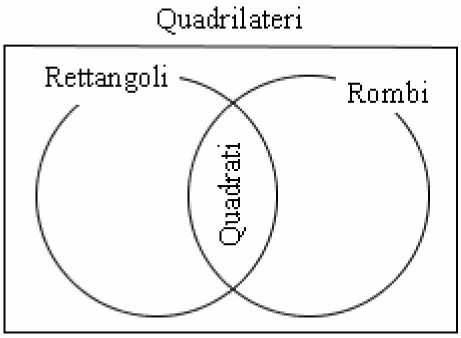
1)
$A=\{\text{numeri pari}\}=\{0,2,4,6,8,10,12,...\}$
$B=\{\text{numeri primi}\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,...\}$
$A\cap B=\{2\}$
$A\cup B=\{0,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20,22,23,...\}$

2)
$I = \{\text{numeri naturali minori di } 12\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
$L = \{\text{numeri naturali maggiori di } 8\} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...\}$
$I \cap L = \{9, 10, 11\} \qquad I \cup L = \mathbb{N}$



3) $A = \{\text{rettangoli}\} \quad B = \{\text{rombi}\} \quad A \cap B = \{\text{quadrati}\}$

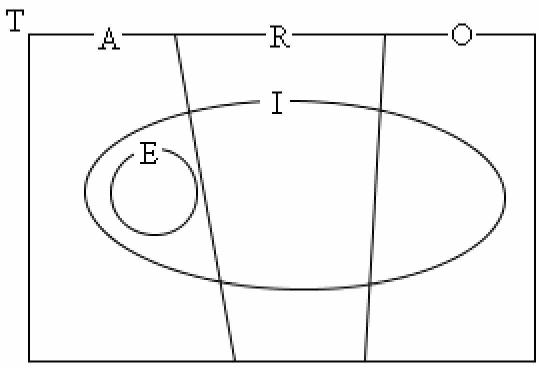
$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{l} \text{quadrilateri che sono o rettangoli, o rombi,} \\ \text{ossia per i quali è vera} \\ \text{almeno una fra queste due affermazioni:} \\ \text{il quadrilatero ha tutti i lati uguali fra loro,} \\ \text{oppure tutti gli angoli retti} \end{array} \right\}$$



Ricordiamo che se c'è un insieme nel quale tutti gli altri sono "immersi" (insieme "**universo**"), questo viene rappresentato preferibilmente con un **rettangolo** anziché un ovale

4)
$L = \{\text{num. naturali minori di } 30\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... , 25, 26, 27, 28, 29\}$
$P = \{\text{numeri primi}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...\}$
$Q = \{\text{num. naturali terminanti con la cifra } 3\} = \{3, 13, 23, 33, 43, 53, ...\}$
$L \cap P \cap Q = \{3, 13, 23\}$

5) e 6)



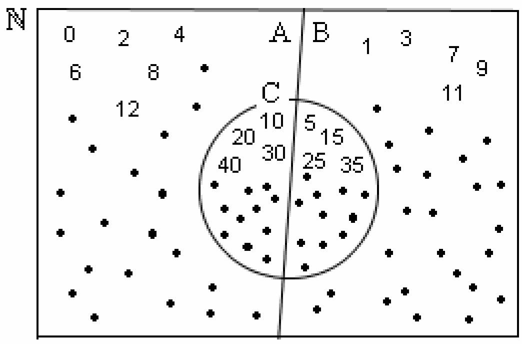
Poiché ogni triangolo equilatero è anche isoscele e acutangolo, si ha $E \subseteq I$, $E \subseteq A$.
La figura è stata tracciata tenendo conto altresì che
$A \cup R \cup O = T$, $A \cap R = \varnothing$, $A \cap O = \varnothing$, $R \cap O = \varnothing$

$A \cap O = \varnothing$
$A \cup O = \{\text{triangoli non rettangoli}\}$
$R \cap I = \{\text{triangoli rettangoli isosceli}\}$
$R \cap E = \varnothing$

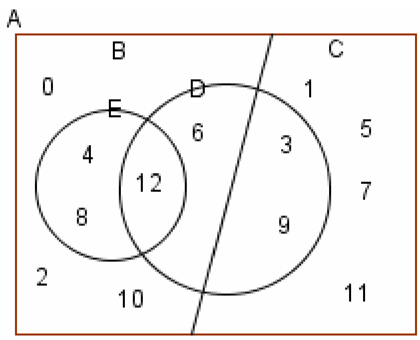
$\left.\begin{array}{l} I \cap E = E \\ I \cup E = I \\ A \cap E = E \\ A \cup E = A \end{array}\right]$ NOTA

NOTA: In generale, quando abbiamo un sottoinsieme con un suo "sovrainsieme", l'intersez. è il sottoinsieme, mentre l'unione è l'insieme più grande

7)

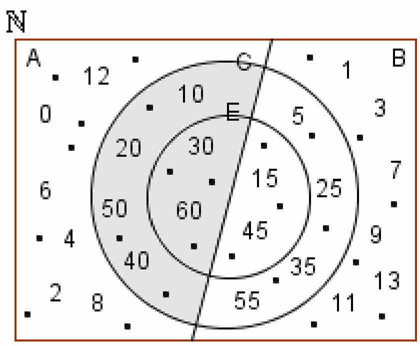


a)



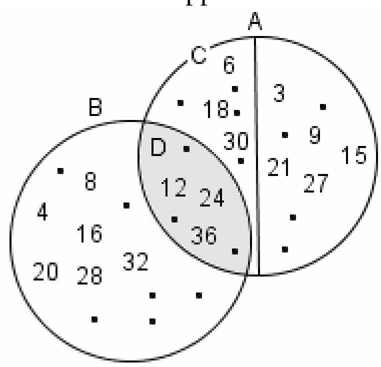
b)

c)



L'insieme ombreggiato è D

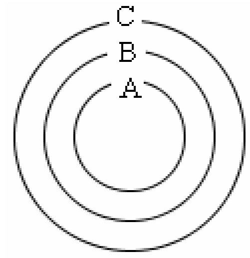
d) Può andar bene la rappresentazione seguente



o comunque qualsiasi diagramma dal quale emerga che:
$A \cap B = D; \;\; D \subseteq C \subseteq A$

8) a) l'insieme vuoto   b) il cerchio più piccolo   c) l'insieme vuoto
d) la sfera più piccola   e) un cerchio massimo della sfera
f) una circonferenza massima della sfera   g) un segmento, diametro della sfera
h) un insieme formato da due soli punti, estremità di un diametro della superficie sferica

9) $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup \varnothing = A$



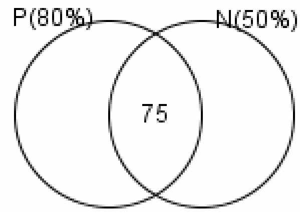
10) $A \cap B \cap C = A$; $A \cup B \cup C = C$

11) a) E' l'intero piano π

b) E' l'insieme unitario, avente come unico elemento P: $\{P\}$

12)

a) Poiché ogni ragazza deve fare almeno uno sport, vuol dire che tutto quel 20% di ragazze che non fa pallavolo, farà nuoto.
Ma poiché risultano fare nuoto ben il 50% delle ragazze, ci sarà un 30% delle ragazze le quali, oltre a fare nuoto, faranno anche pallavolo.
In definitiva, avremo che
(indicati con n_R, n_P, n_N rispettivamente il numero totale delle ragazze, il numero di quelle che fanno Pallavolo, il numero di quelle che fanno Nuoto):

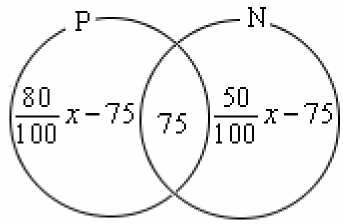


$$\frac{30}{100}n_R = 75 \quad \text{da cui} \quad n_R = 75 \cdot \frac{100}{30} = 250$$

e di conseguenza poi $n_P = \frac{80}{100} \cdot 250 = 200$; $n_N = \frac{50}{100} \cdot 250 = 125$

IN ALTERNATIVA,
si sarebbe potuto tracciare il diagramma riportato qui a destra, dove con x è indicato il numero totale delle ragazze, e risolvere con l'equazione

$$\left(\frac{80}{100}x - 75\right) + \left(\frac{50}{100}x - 75\right) + 75 = x$$



b) In quel caso, non si sarebbe potuta dare una risposta sicura, perché avremmo potuto avere molte situazioni, compresa quella che l'insieme N fosse incluso in P.
In quest'ultimo caso, il numero totale delle ragazze sarebbe stato di 150, di cui 75 iscritte a Nuoto (e tutte queste pure a Pallavolo) e 120 a Pallavolo (di cui 75 anche a Nuoto).
La risposta più accurata al problema sarebbe stata in definitiva:
"da un minimo di 150 ad un massimo di 250 ragazze".

RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 88

1) E' l'insieme dei numeri pari. Ricordiamo che anche 0 è considerato pari.

NOTA. La comunità matematica è unanime nel considerare lo "zero" (0) come un numero PARI.
Vengono considerati "pari" quei numeri *naturali* (*) che si possono scrivere sotto la forma $2 \cdot n$, essendo n ancora un numero *naturale*.
Poiché 0 evidentemente gode di questa proprietà ($0 = 2 \cdot 0$), ecco che 0 è pari.
(*) I "numeri naturali" sono gli interi senza segno, 0 compreso: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …

Questa scelta è anche conveniente per tutta una serie di motivi. Fra i tantissimi, ne citiamo uno solo, di carattere "pratico": in certi giorni, in determinate città, per limitare l'inquinamento atmosferico viene consentito di circolare solo alle vetture con "targhe dispari", in altri giorni solo alle vetture con "targhe pari". La finalità è evidentemente di far sì che in quei giorni sia in circolazione soltanto la metà circa dei veicoli abitualmente in uso. E' chiaro che considerare lo 0 "pari" è pienamente conforme alla logica e all'obiettivo, in questo contesto.

Parità" e "disparità" si possono estendere, in senso più "largo", anche agli interi *relativi*.
Vengono considerati pari quegli interi relativi che si possono scrivere nella forma $2 \cdot x$, essendo x ancora un intero relativo: quindi, in quest'ambito, sono pari $0, +2, -2, +4, -4, +6, -6, \ldots$ e dispari gli altri interi relativi.

2) E' l'insieme dei numeri pari, privato dello 0.

3) Per l'insieme $\mathbb{N} - \{0\}$, l'insieme dei numeri naturali non nulli, il simbolo utilizzato è $\mathbb{N}^*$.