4. MINIMO COMUNE MULTIPLO (m.c.m.)

Il "minimo comune multiplo" fra due (o più) interi, è il più piccolo fra i loro multipli comuni.

Es.

Cerchiamo il minimo comune multiplo fra 15 e 18.
Scriviamo i multipli di 15 e quelli di 18, evidenziando i multipli comuni:

$$\textit{Multipli di } 15: \; 15 \quad 30 \quad 45 \quad 60 \quad 75 \quad \boxed{90} \quad 105 \quad 120 \quad 135 \quad 150 \quad 165 \quad \boxed{180} \quad 195 \quad 210 \quad \ldots$$

$$\textit{Multipli di } 18: \; 18 \quad 36 \quad 54 \quad 72 \quad \boxed{90} \quad 108 \quad 126 \quad 144 \quad 162 \quad \boxed{180} \quad 198 \quad 216 \quad 234 \quad 252 \quad \ldots$$

I multipli comuni a 15 e 18 sono: 90, 180, 270, 360, …
E fra questi, il più piccolo è 90, quindi $\text{m.c.m.}(15, 18) = 90$

Nella pratica, per cercare il m.c.m. - nei casi semplici - si elencano, mentalmente, i successivi multipli di uno dei numeri dati (conviene scegliere il più grande!) e ci si arresta non appena si incontra un numero che sia multiplo anche dell'altro (o degli altri).

Ad esempio:

- per determinare il m.c.m. fra 6 e 8, immaginiamo la sequenza dei multipli di 8:
  8, 16, 24 *STOP!* 24 *è anche multiplo di* 6*; quindi* $\text{m.c.m.}(6, 8) = 24$
- per determinare il m.c.m. fra 10, 12 e 15, immaginiamo la sequenza dei multipli di 15:
  15, 30, 45, 60 *STOP!* 60 *è anche multiplo di* 10 *e di* 12*; quindi* $\text{m.c.m.}(10, 12, 15) = 60$

C'è anche una regola meccanica per determinare il m.c.m.:
basta scomporre i numeri dati in fattori primi, poi prendere tutti i fattori trovati, comuni e non comuni, ciascuno una sola volta e con l'esponente più alto.
La regola è valida anche se i numeri sono più di due. Ecco un paio di esempi:

$$\text{m.c.m.}(15,18) = ?$$
$$15 = 3 \cdot \boxed{5}$$
$$18 = \boxed{2} \cdot \boxed{3^2}$$
$$\text{m.c.m.}(15,18) = \boxed{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 90$$

$$\text{m.c.m.}(32, 36, 40) = ?$$
$$32 = \boxed{2^5}$$
$$36 = 2^2 \cdot \boxed{3^2}$$
$$40 = \boxed{5} \cdot 2^3$$
$$\text{m.c.m.}(32, 36, 40) = \boxed{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5} = 1440$$

Se due interi sono "primi fra loro" (= non hanno divisori comuni, a parte il divisore "banale" 1) allora il loro m.c.m. è il prodotto dei numeri stessi. Ad esempio, $\text{m.c.m.}(15, 32) = 15 \cdot 32 = 480$

Una relazione notevole lega il M.C.D. e il m.c.m. di una coppia di interi a, b qualsiasi: se li si moltiplica fra loro, il risultato di questa operazione è uguale al prodotto di a per b!

$$\textbf{M.C.D.}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \textbf{m.c.m.}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{ab}$$

♥ NOTA: nella scrittura ab, fra la lettera a e la lettera b è sottinteso il puntino di moltiplicazione: $ab = a \cdot b$.
In effetti, tale puntino solitamente si tralascia nei casi in cui il numero che starebbe *a destra* del puntino è simboleggiato da una *lettera*: $2 \cdot x = 2x$, $x \cdot y = xy$; invece in $x \cdot 2$ o $2 \cdot 3$ NON sarebbe corretto ometterlo.

Ad esempio, puoi verificare, per esercizio, che $\text{M.C.D.}(4, 6) \cdot \text{m.c.m.}(4, 6) = 4 \cdot 6$

Di conseguenza, $\textbf{M.C.D.}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{ab}}{\textbf{m.c.m.}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ e $\textbf{m.c.m.}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{ab}}{\textbf{M.C.D.}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$

ESERCIZI Calcola, col metodo che ti sembra più opportuno, il m.c.m. delle seguenti famiglie di interi.

1) (6, 9) **2)** (11, 33)
3) (12, 16) **4)** (75, 50)
5) (25, 20) **6)** (72, 108)
7) (6, 8, 45) **8)** (16, 24, 100)
9) (8, 10, 12, 15) **10)** (8, 16, 24, 32)
11) (96, 64) **12)** (216, 320)
13) (225, 3750) **14)** (16, 20, 24)
15) (48, 120) **16)** (375, 1250)

17) Se due numeri hanno per prodotto 2160 e per M.C.D. 12, qual è il loro m.c.m.?

18) Se Anna va a fare footing ogni 3 giorni e Bruno ogni 7, e quest'oggi si sono allenati entrambi, fra quanti giorni accadrà di nuovo che facciano allenamento tutti e due?

RISULTATI

1) 18 2) 33 3) 48 4) 150 5) 100 6) 216 7) 360 8) 1200
9) 120 10) 96 11) 192 12) 8640 13) 11250 14) 240 15) 240
16) 3750 17) 180 18) 21